

DẠNG TOÁN ÔN TẬP KÌ THI TN.THPT NĂM 2025

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

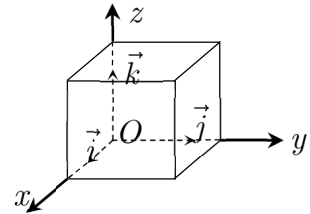
§1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



1. Định nghĩa hệ trục tọa độ

Hệ gồm 3 trục Ox , Oy , Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung điểm gốc O . Gọi $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$ và $\vec{k} = (0;0;1)$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox , Oy , Oz . Hệ ba trục như vậy gọi là hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian hay gọi là hệ trục $Oxyz$.

Lưu ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$.



2. Tọa độ vectơ

Định nghĩa: $\vec{a} = (x;y;z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Tính chất: Cho $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$, $k \in \mathbb{R}$.

① $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$.

② $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.

③ Hai vectơ bằng nhau $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

④ $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

⑤ Môđun (độ dài) vectơ: $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

⑥ Tích vô hướng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Suy ra: $\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \\ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \end{cases}$

3. Tọa độ điểm

Định nghĩa: $M(a;b;c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = (a;b;c)$.

Cần nhớ: $\begin{cases} M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0, M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0, M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0 \\ M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0, M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0, M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0 \end{cases}$.

Tính chất: cho hai điểm $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$.

① $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

② Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

③ Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

④ Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, khi đó tọa độ điểm G là

$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$.

4. Tích có hướng của hai vectơ

Định nghĩa: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 vectơ $\begin{cases} \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \end{cases}$. Tích có hướng của hai

vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là một vectơ, ký hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$ (hoặc $\vec{a} \wedge \vec{b}$) và được xác định bởi công thức:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$$

Lưu ý: Nếu $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ thì ta luôn có $\vec{c} \perp \vec{a}$ và $\vec{c} \perp \vec{b}$.

Tính chất:

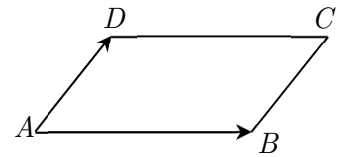
- ① $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}, [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}, [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}.$ ② $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}.$
 ③ $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}).$ ④ $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}.$

Ứng dụng của tích có hướng:

- ① Để $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$. Ngược lại, để $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} \neq 0$ (thường gọi là tích hỗn tạp).

Do đó để chứng minh 4 điểm A, B, C, D là bốn điểm của một tứ diện, ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng, nghĩa là $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

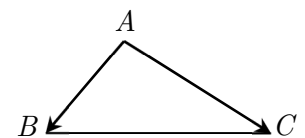
Ngược lại, để chứng minh 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng, ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ cùng thuộc một mặt phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.



- ② Diện tích của hình bình hành $ABCD$ là $S_{\square ABCD} = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \right|$.

- ③ Diện tích $\triangle ABC$ là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right|$.

- ④ Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AA'} \right|$.



- ⑤ Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right|$.

5. Phương trình mặt cầu

- ① **Phương trình mặt cầu (S) dạng 1:**

Để viết phương trình mặt cầu (S), ta cần tìm tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R . Khi đó:

$$(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm: } I(a; b; c) \\ \bullet \text{ Bán kính: } R \end{cases} \Rightarrow (S): \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}.$$

- ② **Phương trình mặt cầu (S) dạng 2:**

Khai triển dạng 1, ta được $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0$ và đặt $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$ thì được phương trình mặt cầu dạng 2 là

$$(S): \boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0}.$$

Với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu dạng 2 có tâm $I(a; b; c)$, bán kính là

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}.$$

Dạng toán 1: Bài toán liên quan đến vectơ và độ dài đoạn thẳng

Cần nhớ: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$.

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$. • $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- $\vec{a} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ví dụ: $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (2; -3; 1)$.
- $M(a; b; c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Ví dụ: $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{k} \Leftrightarrow M(2; 0; -3)$.
- Điểm thuộc trục và mặt phẳng tọa độ (thiếu cái nào, cho cái đó bằng 0):
 - $M \in (Oxy) \xrightarrow{z=0} M(x_M; y_M; 0)$. • $M \in (Oyz) \xrightarrow{x=0} M(0; y_M; z_M)$.
 - $M \in (Oxz) \xrightarrow{y=0} M(x_M; 0; z_M)$. • $M \in Ox \xrightarrow{y=z=0} M(x_M; 0; 0)$.
 - $M \in Oy \xrightarrow{x=z=0} M(0; y_M; 0)$. • $M \in Oz \xrightarrow{x=y=0} M(0; 0; z_M)$.

Dạng toán 2: Bài toán liên quan đến trung điểm, tọa độ trọng tâm

Cần nhớ:

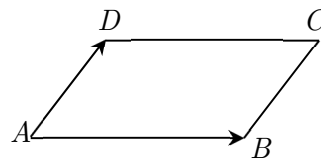
- M là trung điểm $AB \Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$. Nhớ $M = \frac{A + B}{2}$.
- G là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$; $G = \frac{A + B + C}{3}$.
- Gọi G_1 là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, khi đó tọa độ điểm G_1 là
 $G_1\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$. Nhớ: $G_1 = \frac{A + B + C + D}{4}$.

Dạng toán 3: Bài toán liên quan đến hai vectơ bằng nhau

Cần nhớ: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $k \in \mathbb{R}$.

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$. • $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.
- Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi hoành = hoành, tung = tung, cao = cao, nghĩa là:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases} \cdot \text{Để } ABCD \text{ là hình bình hành thì } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$



Dạng toán 4: Hai vectơ cùng phương, ba điểm thẳng hàng

Cần nhớ: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $k \in \mathbb{R}$.

- Hai vectơ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{\text{Hoành}}{\text{Hoành}} = \frac{\text{Tung}}{\text{Tung}} = \frac{\text{Cao}}{\text{Cao}}$. Nghĩa là:

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k. \text{ Khi } k > 0 \text{ thì } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng phương và chiều.}$$

- Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$.
- A, B, C là ba đỉnh tam giác $\Leftrightarrow A, B, C$ không thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \narrow\uparrow \overrightarrow{AC}$.

Dạng toán 5: Nhóm bài toán liên quan đến hình chiếu, điểm đối xứng của điểm lên trục, lên mặt phẳng tọa độ

① **Hình chiếu:** “Thiếu bạn nào, cho bạn đó 0 điểm”. Nghĩa là hình chiếu của $M(a;b;c)$ lên:

- Ox là $M_1(a;0;0)$.
- Oy là $M_2(0;b;0)$.
- Oz là $M_3(0;0;c)$.
- (Oxy) là $M_4(a;b;0)$.
- (Oxz) là $M_5(a;0;c)$.
- (Oyz) là $M_6(0;b;c)$.

② **Đối xứng:** “Thiếu bạn nào, cho bạn đó dấu trừ”. Nghĩa là điểm đối xứng của $N(a;b;c)$ qua:

- Ox là $N_1(a;-b;-c)$.
- Oy là $N_2(-a;b;-c)$.
- Oz là $N_3(-a;-b;c)$.
- (Oxy) là $N_4(a;b;-c)$.
- (Oxz) là $N_5(a;-b;c)$.
- (Oyz) là $N_6(-a;b;c)$.

③ **Khoảng cách:** Để tìm khoảng cách từ M đến trục (hoặc mp tọa độ), ta tìm hình chiếu H của M lên trục (hoặc mp tọa độ), từ đó suy ra khoảng cách cần tìm là $d = MH$.

Dạng toán 6: Nhóm bài toán liên quan đến tích vô hướng của hai vectơ

☞ **Cần nhớ:** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\text{Tích vô hướng: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

(hoành $\times$ hoành, cộng tung $\times$ tung, cộng cao $\times$ cao)

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (\text{góc giữa 2 vectơ có thể nhọn hoặc tù}).$$

Và $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ (2 vectơ vuông góc thì nhân nhau = 0)

- $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
- $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ hay $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$ và $|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Dạng toán 7: Nhóm bài toán liên quan đến tích có hướng của hai vectơ

☞ **Cần nhớ:** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\begin{cases} \vec{a} = (a_1;a_2;a_3) \\ \vec{b} = (b_1;b_2;b_3) \end{cases}$.

$$\text{Tích có hướng } [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$$

(Hoành che hoành, tung che tung – đổi dấu; cao che cao)

Ứng dụng:

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} \neq 0$.
- A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
- A, B, C, D là các đỉnh tứ diện $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

① Diện tích ΔABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right|$.

② Diện tích của hình bình hành $ABCD$ là $S_{\square ABCD} = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \right|$.

- ③ Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right|$.
- ④ Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AA'} \right|$.

Dạng toán 8: Xác định các yếu tố cơ bản của mặt cầu

① **Phương trình mặt cầu (S) dạng 1:**

Để viết phương trình mặt cầu (S), ta cần tìm tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R . Khi đó:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm: } I(a;b;c) \\ \text{Bán kính: } R \end{cases} \Leftrightarrow (S): \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}.$$

② **Phương trình mặt cầu (S) dạng 2:**

$$(S): \boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0}.$$
 Với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình

mặt cầu dạng 2 có tâm $I(a;b;c)$, bán kính: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

☛ **Lưu ý:** Để $f(x;y;z) = 0$ là một phương trình mặt cầu thì phải thỏa mãn hai điều kiện:

- Hệ số trước x^2, y^2, z^2 phải bằng nhau.
- $R^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Dạng toán 9: Viết phương trình mặt cầu loại cơ bản

① **Phương trình mặt cầu (S) dạng 1:**

Để viết phương trình mặt cầu (S), ta cần tìm tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R . Khi đó:

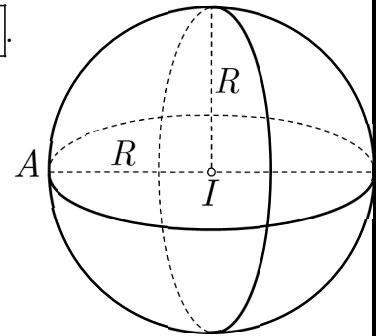
$$(S): \begin{cases} \text{Tâm: } I(a;b;c) \\ \text{Bán kính: } R \end{cases} \Leftrightarrow (S): \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}.$$

② **Phương trình mặt cầu (S) dạng 2:**

$$(S): \boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0}.$$

Với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu dạng 2

Tâm $I(a;b;c)$, bán kính: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} > 0$.

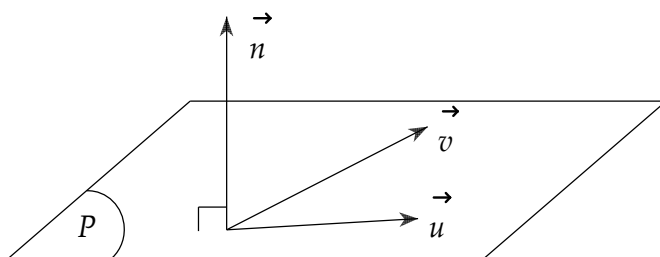


§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



1. Vectơ pháp tuyến – Vectơ chỉ phương

- Vectơ pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng (P) là $\vec{n} \perp (P)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$.
- Vectơ chỉ phương (VTCP) $\vec{u}$ của mặt phẳng (P) là vectơ có giá song song hoặc nằm trong (P).
- Nếu mặt phẳng (P) có cặp VTCP là $\vec{u}, \vec{v}$ thì (P) có VTPT là $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$.
- Nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ là 1 vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) thì $k\vec{n}$, ($k \neq 0$) cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).



➤ **Chẳng hạn:**

$$\vec{n}_{(P)} = (2; -4; 8) = 2 \cdot (1; -2; 4) \text{ thì}$$

$\vec{n} = (1; -2; 4)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (P).

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

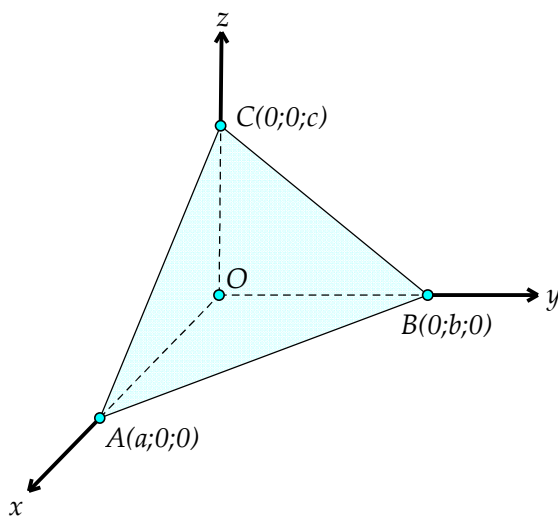
- Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; c)$. Chẳng hạn: $(P): 2x - 3y + z - 1 = 0 \Rightarrow$ một VTPT $\vec{n}_{(P)} = (2; -3; 1)$.
- Để viết phương trình mặt phẳng (P) , cần xác định 1 điểm đi qua và 1 VTPT.

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTPT: } \vec{n}_{(P)} = (a; b; c) \end{cases} \Rightarrow (P): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

3. Phương trình mặt phẳng đoạn chắn

Nếu mặt phẳng (P) cắt ba trục tọa độ lần lượt tại các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$

với $(abc \neq 0)$ thì $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ gọi là phương trình mặt phẳng đoạn chắn.



➤ Chứng minh:

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-a; b; 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-a; 0; c) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (bc; ac; ab).$$

$$\Rightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua } A(a; 0; 0) \\ \text{VTPT: } \vec{n}_{(P)} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (bc; ac; ab) \end{cases}$$

Suy ra

$$(P): bc \cdot (x - a) + ac \cdot (y - 0) + ab \cdot (z - 0) = 0$$

$$\Rightarrow (P): bc \cdot x + ac \cdot y + ab \cdot z = abc$$

$$\xrightarrow{\text{chia } abc \neq 0} (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

4. Các mặt phẳng tọa độ (thiếu cái gì, cái đó bằng 0).

- Mặt phẳng $(Oxy): z = 0$ nên (Oxy) có VTPT $\vec{n}_{(Oxy)} = \vec{k} = (0; 0; 1)$.
- Mặt phẳng $(Oyz): x = 0$ nên (Oyz) có VTPT $\vec{n}_{(Oyz)} = \vec{i} = (1; 0; 0)$.
- Mặt phẳng $(Oxz): y = 0$ nên (Oxz) có VTPT $\vec{n}_{(Oxz)} = \vec{j} = (0; 1; 0)$.

5. Khoảng cách

- Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ được xác định

bởi công thức:
$$d(M; (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song có cùng vectơ pháp tuyến:

Cho 2 mặt phẳng song song $(P): ax + by + cz + d = 0$ và $(Q): ax + by + cz + d' = 0$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là
$$d((Q), (P)) = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

6. Góc

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Ta luôn có: $\cos((\alpha), (\beta)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$

✓ **Cần nhớ:** Góc giữa 2 mặt phẳng là góc nhọn, còn góc giữa 2 vectơ có thể nhọn hoặc tù.

7. Vị trí tương đối

a) Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

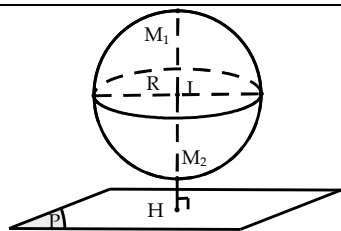
Cho hai mặt phẳng $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

- (P) cắt $(Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$ • $(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$
- $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$ • $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$

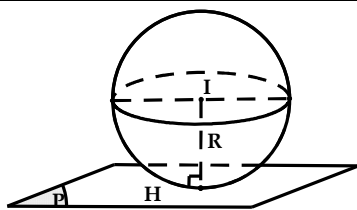
b) Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và có $d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó:

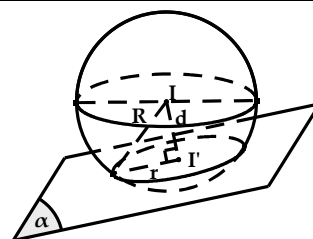
Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.



Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của (S) và H là tiếp điểm.



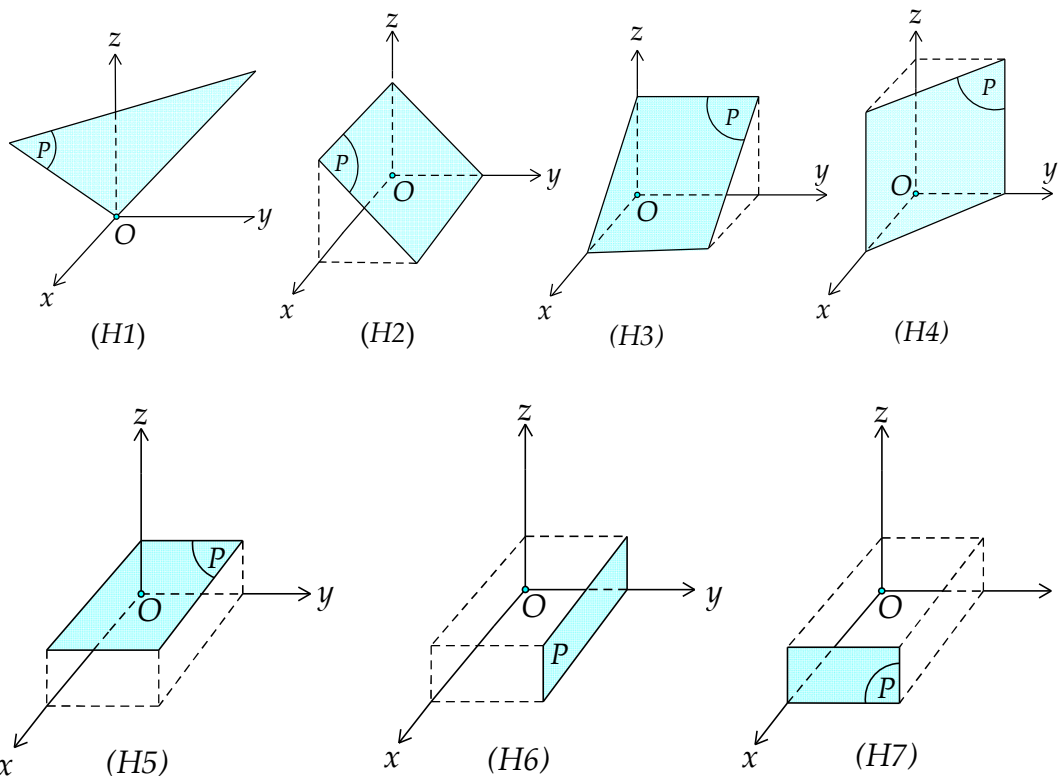
Nếu $d < R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}.$



Lưu ý: Chu vi của đường tròn giao tuyến $C = 2\pi r$, diện tích đường tròn $S = \pi r^2$. Nếu $d_{[I; (P)]} = 0$ thì giao tuyến là một đường tròn qua tâm I và được gọi là đường tròn lớn. Lúc này (P) được gọi là mặt phẳng kính của mặt cầu (S) .

8. Các trường hợp đặc biệt của mặt phẳng

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (P)	Tính chất mặt phẳng (P)
$D = 0$	$(P): Ax + By + Cz = 0$ (H1)	(P) đi qua gốc tọa độ O
$A = 0$	$(P): By + Cz + D = 0$ (H2)	$(P) \parallel Ox$ hoặc $(P) \supset Ox$
$B = 0$	$(P): Ax + Cz + D = 0$ (H3)	$(P) \parallel Oy$ hoặc $(P) \supset Oy$
$C = 0$	$(P): Ax + By + D = 0$ (H4)	$(P) \parallel Oz$ hoặc $(P) \supset Oz$
$A = B = 0$	$(P): Cz + D = 0$ (H5)	$(P) \parallel (Oxy)$ hoặc $(P) \equiv (Oxy)$
$A = C = 0$	$(P): By + D = 0$ (H6)	$(P) \parallel (Oxz)$ hoặc $(P) \equiv (Oxz)$
$B = C = 0$	$(P): Ax + D = 0$ (H7)	$(P) \parallel (Oyz)$ hoặc $(P) \equiv (Oyz)$



Dạng toán 1. Khoảng cách, góc và vị trí tương đối

1. Khoảng cách

— Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ được xác

định bởi công thức:
$$d(M; (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

— Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song có cùng vectơ pháp tuyến:

Cho 2 mặt phẳng song song $(P): ax + by + cz + d = 0$ và $(Q): ax + by + cz + d' = 0$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là
$$d((Q), (P)) = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Lưu ý. Bản chất là lấy 1 điểm bất kỳ $M \in (Q)$. Khi đó $d((P); (Q)) = d(M; (P))$.

2. Góc

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Ta luôn có:
$$\cos((\alpha), (\beta)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

✓ **Cần nhớ:** Góc giữa 2 mặt phẳng là góc nhọn, còn góc giữa 2 vectơ có thể nhọn hoặc tù.

3. Vị trí tương đối

a) Vị trí tương đối giữa hai điểm M, N với mặt phẳng (P)

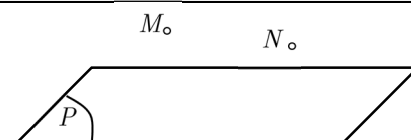
Xét hai điểm $M(x_M; y_M; z_M)$, $N(x_N; y_N; z_N)$

Và mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$.

- Nếu $(ax_M + by_M + cz_M + d)(ax_N + by_N + cz_N + d) < 0$ thì M, N nằm 2 bên so (P) .
- Nếu $(ax_M + by_M + cz_M + d)(ax_N + by_N + cz_N + d) > 0$ thì M, N nằm 1 bên so (P) .

b) Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.



- $(P) \text{ cắt } (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.
- $(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.
- $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.
- $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

c) Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) .

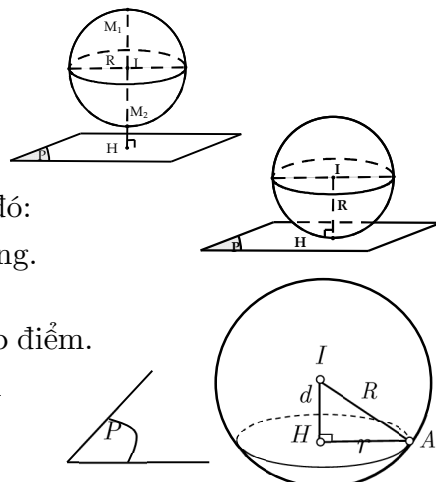
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

và có $d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó:

- Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.
- Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu.

Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của (S) và H là tiếp điểm.

- Nếu $d < R$: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

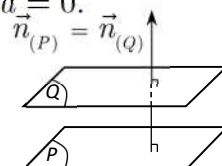


Dạng toán 2: Viết phương trình mặt phẳng (cần tìm 1 điểm đi qua + vtpt)

Loại 1. Mặt phẳng (P) : $\begin{cases} \text{Qua } A(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTPT: } \vec{n}_{(P)} = (a; b; c) \end{cases} \Rightarrow (P): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Loại 2. Viết phương trình mp(P) qua $A(x_0; y_0; z_0)$ và $(P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0$.

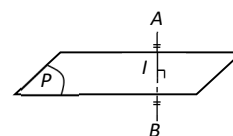
Phương pháp: Mặt phẳng (P) : $\begin{cases} \text{Qua } A(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTPT: } \vec{n}_{(P)} = \vec{n}_{(Q)} = (a; b; c) \end{cases}$ (Loại 1).



Loại 3. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB với A, B đã cho trước.

Phương pháp. Tìm I là trung điểm của AB . Khi đó:

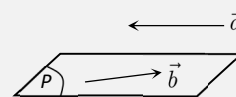
$(P): \begin{cases} \text{Qua } I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right): \text{là trung điểm } AB. \\ \text{VTPT: } \vec{n}_{(P)} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \end{cases}$ (Dạng 1)



Cần nhớ: Mặt phẳng trung trực (P) của đoạn AB là mặt phẳng vuông góc tại trung điểm của AB .

Loại 4. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua điểm M và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$.

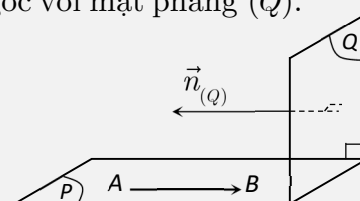
Phương pháp. $(P): \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTPT: } \vec{n}_{(P)} = [\vec{a}, \vec{b}] \end{cases}$ (Dạng 1).



Loại 5. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (Q) .

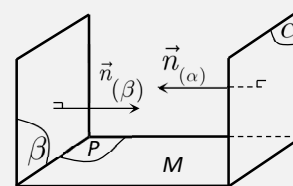
Phương pháp. Tìm $\overrightarrow{AB}$ và VTPT của (Q) là $\vec{n}_{(Q)}$. Khi đó:

$(P): \begin{cases} \text{Qua } A, \text{ (hay } B) \\ \text{VTPT: } \vec{n}_{(P)} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(Q)}] \end{cases}$ (Dạng 1).



Loại 6. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với hai mặt phẳng (α) , (β) .

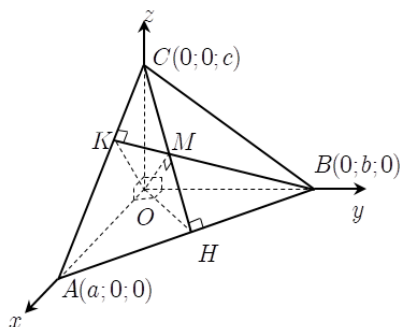
Phương pháp. Tìm $\vec{n}_{(\alpha)}$ và $\vec{n}_{(\beta)}$. Khi đó:



Loại 7. Viết phương trình mặt phẳng đoạn chắn.

Phương pháp. Nếu mặt phẳng (P) cắt ba trục tọa độ lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$,

$B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $(abc \neq 0)$ thì $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ gọi là phương trình đoạn chắn.



$$\bullet V_{O.ABC} = \frac{abc}{6}.$$

$$\bullet M \text{ trực tâm } \triangle ABC \Leftrightarrow OM \perp (ABC)$$

$$\bullet \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OM^2}.$$

Loại 8. Một số bài toán viết phương trình mặt phẳng liên quan đến khoảng cách cỡ bản

Để viết phương trình mặt phẳng liên quan đến khoảng cách, thường sử dụng hai ý tưởng sau:

Ý tưởng 1. Tìm trực tiếp được VTPT $\vec{n}_{(P)} = (a;b;c)$ dựa vào mối liên hệ song song, vuông góc. Khi đó, ta chỉ cần tìm d trong phương trình $(P): ax + by + cz + d = 0$ dựa vào công thức tính khoảng cách.

Ý tưởng 2. Nếu không có VTPT trực tiếp thì ta cần gọi $\vec{n}_{(P)} = (a;b;c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Dựa vào khoảng cách để thành lập một phương trình hoặc hệ phương trình để tìm mối liên hệ giữa a , b , c . Sau đó chọn a , b hoặc c .

Một số bài toán thường gặp

Bài toán 1. Viết phương trình mặt phẳng $(P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0$ và cách điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ một khoảng k cho trước.

Phương pháp:

- Vì $(P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow (P): ax + by + cz + d' = 0$.
- Sử dụng công thức khoảng cách $d_{[M,(P)]} = k \Rightarrow d'$.

Bài toán 2. Viết phương trình mặt phẳng $(P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0$ và (P) cách (Q) một khoảng k cho trước.

Phương pháp:

- Vì $(P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow (P): ax + by + cz + d' = 0$.
- Chọn một điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in (Q)$ và sử dụng công thức:

$$d_{[(Q):(P)]} = d_{[M,(P)]} = k \Rightarrow d'.$$

Bài toán 3. Viết phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với hai mặt phẳng (α) , (β) , đồng thời (P) cách điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ một khoảng bằng k cho trước.

Phương pháp:

- Tìm $\vec{n}_{(\alpha)}$, $\vec{n}_{(\beta)}$. Từ đó suy ra $\vec{n}_{(P)} = [\vec{n}_{(\alpha)}, \vec{n}_{(\beta)}] = (a; b; c)$.
- Khi đó phương trình (P) có dạng $(P): ax + by + cz + d = 0$, (cần tìm d).
- Vì $d_{[M; (P)]} = k \Rightarrow d$.

Bài toán 4. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $M(x_0; y_0; z_0)$.
(trong trường hợp này, (P) được gọi là mặt phẳng tiếp diện).

Phương pháp:

- Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu.
- Khi đó $(P): \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTPT: } \vec{n}_{(P)} = \overrightarrow{IM} \end{cases} \text{ (dạng 1)}$

Bài toán 5. Viết phương trình mặt phẳng $(P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0$ và (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) cho trước.

Phương pháp:

- Vì $(P) \parallel (Q): ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow (P): ax + by + cz + d' = 0$.
- Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu.
- Vì (P) tiếp xúc (S) nên có $d_{[I; (P)]} = R \Rightarrow d'$.

9. Phương trình đường thẳng

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương (VTCP) $\vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3)$ có

phương trình tham số
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

- Điểm M thuộc đường thẳng $d \Leftrightarrow M(x_0 + a_1 t; y_0 + a_2 t; z_0 + a_3 t)$.

- Nếu $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ thì $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ được gọi là phương trình chính tắc của d .

☞ **Đặc biệt:**

✓ Trục Ox : $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ có VTCP $\vec{i} = (1; 0; 0)$. ✓ Trục Oy : $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ có VTCP $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

✓ Trục Oz : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ có VTCP $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

10. Vị trí tương đối

a) **Vị trí tương đối của hai đường thẳng** $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = x'_0 + a'_1 t' \\ y = y'_0 + a'_2 t' \\ z = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$.

☞ **Phương pháp 1.** Xét hệ phương trình với hai ẩn là t và t' , tức xét:
$$\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$$

- Nếu hệ có nghiệm duy nhất thì d và d' cắt nhau.

- Nếu hệ có vô số nghiệm thì $d \equiv d'$.
- Nếu hệ vô nghiệm thì $d \parallel d'$ hoặc d, d' chéo nhau.
 - $\vec{u}_d \uparrow \vec{u}_{d'}$ thì $d \parallel d'$.
 - Nếu $\vec{u}_d \nparallel \vec{u}_{d'}$ thì d, d' chéo nhau.

☛ **Phương pháp 2.** Xét $M(x_o, y_o, z_o) \in d, M(x'_o, y'_o, z'_o) \in d'$ và $\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}$.

- $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d = k\vec{a}_{d'} \\ M \notin d' \end{cases}$.
- $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d = k\vec{a}_{d'} \\ M \in d' \end{cases}$.
- d cắt $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d \text{ ko } \uparrow \vec{a}_{d'} \\ [\vec{a}, \vec{a}'] \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \end{cases}$.
- d chéo $d' \Leftrightarrow [\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}] \cdot \overrightarrow{MN} \neq 0$.

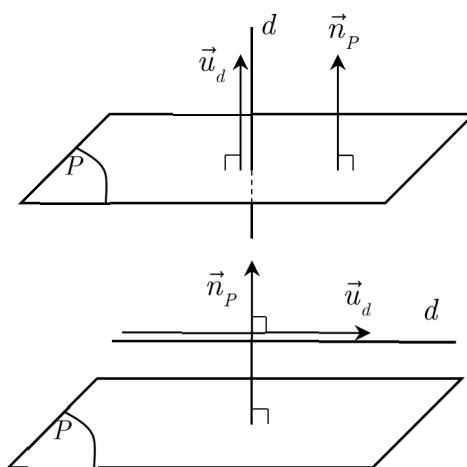
b) Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Xét hệ:
$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t & (1) \\ y = y_o + a_2 t & (2) \\ z = z_o + a_3 t & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases} \quad (*)$$

Lấy (1), (2), (3) thế vào (4)

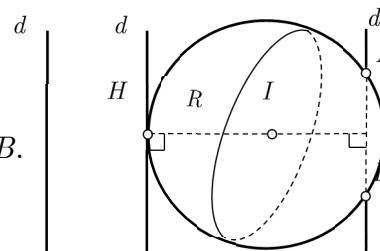
- Nếu (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow d$ cắt (α) .
- Nếu (*) có vô nghiệm $\Leftrightarrow d \parallel (\alpha)$.
- Nếu (*) vô số nghiệm $\Leftrightarrow d \subset (\alpha)$.



c) Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S)

Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R và đường thẳng Δ . Để xét vị trí tương đối giữa Δ và (S) ta tính $d(I, \Delta)$ rồi so sánh với bán kính R .

- Nếu $d(I, \Delta) > R$: Δ không cắt (S) .
- Nếu $d(I, \Delta) = R$: Δ tiếp xúc với (S) tại H .
- Nếu $d(I, \Delta) < R$: Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B .



11. Khoảng cách

a) Khoảng cách từ M đến d là $d(M, d) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_d|}{|\vec{u}_d|}$ với $A \in d$ và $\vec{u}_d$ là VTPT d .

b) Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau $d(d, d') = \frac{|[\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{AB}|}{|[\vec{u}, \vec{u}']|}$ với $A \in d, B \in d'$.

12. Góc

a) **Góc giữa hai đường thẳng**

Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 có VTCP $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$.

$$\cos(d_1; d_2) = \cos \alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \text{ với } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

b) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d có VTCP $\vec{u}_d = (a; b; c)$ và mặt (P) có VTPT $\vec{n}_{(P)} = (A; B; C)$ thì

$$\sin \alpha = |\cos(\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d)| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)}|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_{(P)}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ với } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Dạng toán 3: Góc

1. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$.

$$\cos(d_1; d_2) = \cos \alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \text{ với } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (A; B; C)$ được xác định bởi công thức:

$$\sin \alpha = |\cos(\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d)| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)}|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_{(P)}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ với } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Dạng toán 4: Khoảng cách

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm M đến một đường thẳng d qua điểm A có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d$

được xác định bởi công thức
$$d(M, d) = \frac{|\overrightarrow{AM}, \vec{u}_d|}{|\vec{u}_d|}.$$

☛ **Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song** là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

☛ **Khoảng cách giữa đường thẳng d song song với mặt phẳng (P)** là khoảng cách từ một điểm M thuộc đường thẳng d đến mặt phẳng (P) . Cụ thể:

$$\forall d \parallel (P) \Rightarrow d(d; (P)) = d(M; (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\text{với } \begin{cases} M \in d \\ (P) : ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Đường thẳng d đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d$ và d' đi qua điểm B và có vectơ

chỉ phương $\vec{u}_{d'}$ là
$$d(d, d') = \frac{|[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] \cdot \overrightarrow{AB}|}{|[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]|}.$$

Dạng toán 5: Vị trí tương đối

1) Vị trí tương đối của hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = x'_0 + a'_1 t' \\ y = y'_0 + a'_2 t' \\ z = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$.

☛ Phương pháp 1. Xét hệ phương trình với hai ẩn là t và t' , tức xét: $\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$.

- Nếu hệ có nghiệm duy nhất thì d và d' cắt nhau.
- Nếu hệ có vô số nghiệm thì $d \equiv d'$.
- Nếu hệ vô nghiệm thì $d \parallel d'$ hoặc d, d' chéo nhau.
 - $\vec{u}_d \uparrow\uparrow \vec{u}_{d'}$ thì $d \parallel d'$.
 - Nếu $\vec{u}_d \nparallel \vec{u}_{d'}$ thì d, d' chéo nhau.

☛ Phương pháp 2. Xét $M(x_0, y_0, z_0) \in d$, $M(x'_0, y'_0, z'_0) \in d'$ và $\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}$.

- $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d = k\vec{a}_{d'} \\ M \notin d' \end{cases}$.
- $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d = k\vec{a}_{d'} \\ M \in d' \end{cases}$.
- d cắt $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d \text{ ko } \uparrow\uparrow \vec{a}_{d'} \\ [\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}] \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \end{cases}$.
- d chéo $d' \Leftrightarrow [\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}] \cdot \overrightarrow{MN} \neq 0$.

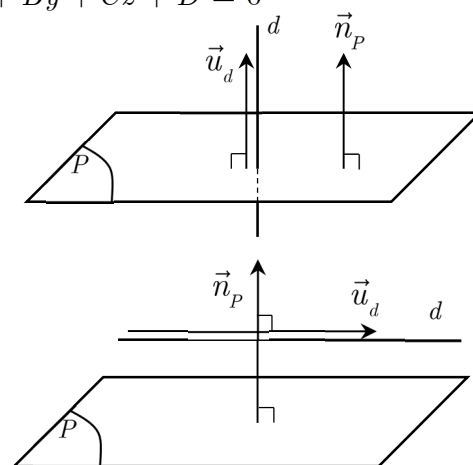
2) Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Xét hệ: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t & (1) \\ y = y_0 + a_2 t & (2) \\ z = z_0 + a_3 t & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases} \quad (*)$

Lấy (1), (2), (3) thế vào (4)

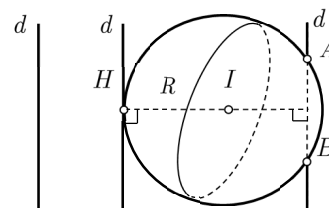
- Nếu (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow d$ cắt (α) .
- Nếu (*) có vô nghiệm $\Leftrightarrow d \parallel (\alpha)$.
- Nếu (*) vô số nghiệm $\Leftrightarrow d \subset (\alpha)$.



3) Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S)

Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R và đường thẳng Δ . Để xét vị trí tương đối giữa Δ và (S) ta tính $d(I, \Delta)$ rồi so sánh với bán kính R .

- Nếu $d(I, \Delta) > R$: Δ không cắt (S) .
- Nếu $d(I, \Delta) = R$: Δ tiếp xúc với (S) tại H .
- Nếu $d(I, \Delta) < R$: Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B .



☛ Cách khác: chuyển d về dạng tham số và thế vào (S) .

Số nghiệm là số giao điểm.

Dạng toán 6: Viết phương trình đường thẳng

① **Loại 1.** Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng d , biết d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3)$.

☞ **Phương pháp.** Ta có: $d : \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTCP : } \vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3) \end{cases}$

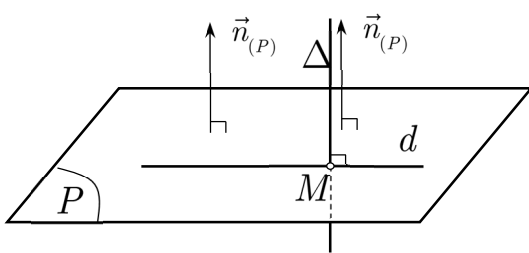
• Tham số $d : \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ • Chính tắc $d : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (a_1 a_2 a_3 \neq 0)$.

② **Loại 2.** Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng d , biết d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, đồng thời vuông góc với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

☞ **Phương pháp.** Ta có: $d : \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTCP : } \vec{u}_d = [\vec{a}, \vec{b}] = (a_1; a_2; a_3) \end{cases}$

• Tham số $d : \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ • Chính tắc $d : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (a_1 a_2 a_3 \neq 0)$.

Bài mẫu 1: Cho đường thẳng $\Delta : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$, mặt phẳng $(P) : x + 2y + 2z - 4 = 0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ là



Lời giải: Ta có: $\begin{cases} \vec{u}_\Delta = (1; 1; -1) \\ \vec{n}_P = (1; 2; 2) \end{cases}$

Từ hình vẽ, ta có $\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{u}_\Delta] = (-4; 3; -1)$.

Tìm điểm $M(t; 1+t; 2-t) \in \Delta \cap (P) \Rightarrow M \in (P)$

$$\Leftrightarrow t + 2(1+t) + 2(2-t) - 4 = 0$$

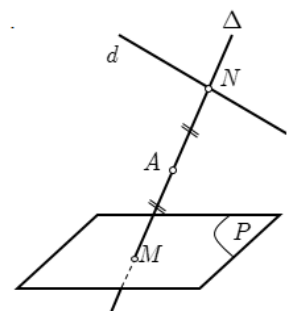
$$\Rightarrow t = -2 \Rightarrow M(-2; -1; 4) \in d \quad (\text{Xem hình vẽ})$$

$$\Rightarrow d : \begin{cases} \text{Qua } M(-2; -1; 4) \\ \vec{u}_d = (-4; 3; -1) \end{cases} \Rightarrow d : \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

Bài mẫu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - y + z - 10 = 0$, điểm $A(1; 3; 2)$ và đường thẳng $d : \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M, N sao cho A là trung điểm của đoạn MN .

Lời giải:

$$\text{Đặt } d : \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1} = t \Rightarrow N(2t-2; t+1; -t+1) \in d.$$



Vì A là trung điểm của MN nên:
$$\begin{cases} x_M = 2x_A - x_N \\ y_M = 2y_A - y_N \\ z_M = 2z_A - z_N \end{cases}$$

Suy ra
$$\begin{cases} x_M = 2.1 - (2t - 2) = 4 - 2t \\ y_M = 2.3 - (t + 1) = 5 - t \\ z_M = 2.2 - (-t + 1) = 3 + t \end{cases} \Rightarrow M(4 - 2t; 5 - t; 3 + t) \in (P) : 2x - y + z - 10 = 0$$

$\Leftrightarrow 2.(4 - 2t) - (5 - t) + (3 + t) - 10 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow M(8; 7; 1)$ và $N(-6; -1; 3)$.

Khi đó $\Delta : \begin{cases} \text{Qua } N(-6; -1; 3) \\ \text{VTCP : } \vec{u} = \overrightarrow{NM} = (14; 8; -2) = 2.(7; 4; -1) \end{cases} \Rightarrow \Delta : \frac{x + 6}{7} = \frac{y + 1}{4} = \frac{z - 3}{-1}.$

☞ **Nhớ.** Học sinh đọc kỹ lời giải và làm lại tương tự, có thể rút ngắn cách làm. Đề bài có thể mở rộng $\overrightarrow{NA} = k.\overrightarrow{AM}$ khi đó ta sử dụng hai vectơ bằng nhau để tìm M, N , trong trường hợp $k = 1$ thì A chính là trung điểm của MN , hoặc cho trọng tâm hoặc hình bình hành.

Bài mẫu 3. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất.

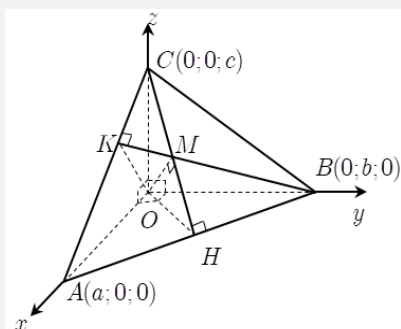
Lời giải:

Ta có: $(ABC) : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $M(1; 2; 3) \in (ABC) \Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3\sqrt{\frac{6}{abc}}$

$\Rightarrow abc \geq 162 \Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6}abc \geq 27$. Dấu " $=$ " $\Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c}$ và $abc = 162 \Rightarrow \begin{cases} a = 3; \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}.$

$\Rightarrow (ABC) : \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

☞ **Cần nhớ:** Phương trình mặt phẳng đoạn chắn $(P) : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$



- $V_{O.ABC} = \frac{abc}{6} \quad (a, b, c > 0).$
- M trực tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow OM \perp (ABC)$
- $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OM^2}.$

DẠNG CÂU 16. BÀI TẬP RÈN LUYỆN (50 CÂU)

Câu 16.1. (ĐMH 2025) Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7 500 000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6 600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6 400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6;20;0)$ đến điểm $N(-6;-12;16)$.

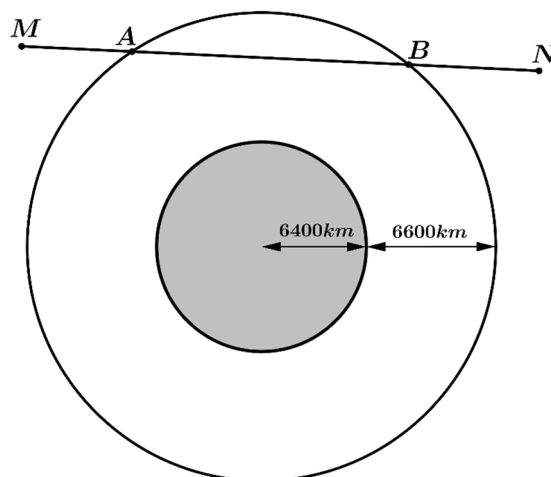
a) Đường thẳng MN có phương trình

$$\text{tham số là } \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t \\ z = -4t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

b) Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3;-4;12)$.

c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18 900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị km).

d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút.



Câu 16.2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-2;1)$ với tốc độ 4,5 m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).

a) Phương trình tham số của đường cáp là:

$$\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

b) Giả sử sau thời gian t (s) kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$) thì cabin đến điểm M . Khi đó tọa độ điểm M là $M\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right)$.

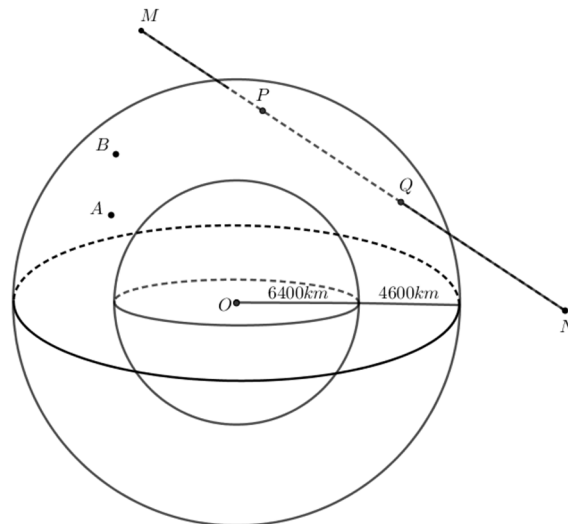


c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$, khi đó quãng đường AB dài 800 m.

d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 30° .

Câu 16.3. Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7500000km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, các nhà nghiên cứu của trung tâm Vũ Trụ Nasa đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 4600km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6400km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là

1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ $v_1 = 2\sqrt{2} \cdot 10^3$ (km/h) không đổi theo đường thẳng xuất phát từ điểm $M(0; 5; 12)$ đến $N(12; 5; 0)$



a) Khoảng cách thiên thạch gần với trái đất nhất có độ dài bằng 3449 km (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

b) Các nhà nghiên cứu của trung tâm vũ trụ Nasa đưa ra giả thiết nếu lúc thiên thạch đang ở vị trí M bất ngờ đổi hướng và lao xuống trái đất với phương thẳng thì quãng đường dài nhất nó có thể va chạm với trái đất là 11315 km (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

c) Tại thời điểm thiên thạch đang ở vị trí M thì có 2 vệ tinh đang ở vị trí $A(-6; -5; -6)$

và $B(7; -6; 7)$ có vận tốc khác nhau di chuyển trong mặt phẳng trung trực của MN và luôn cách trái đất với khoảng cố định. Khoảng cách xa nhất của 2 vệ tinh có thể đạt là 18412 km (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Nếu vệ tinh A di với vận tốc $v_2 = \frac{\pi\sqrt{97}}{3} \cdot 10^3$ (km/h) thì sẽ va chạm với thiên thạch.

Câu 16.4. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1; 3; 7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km.

a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+7)^2 = 9$

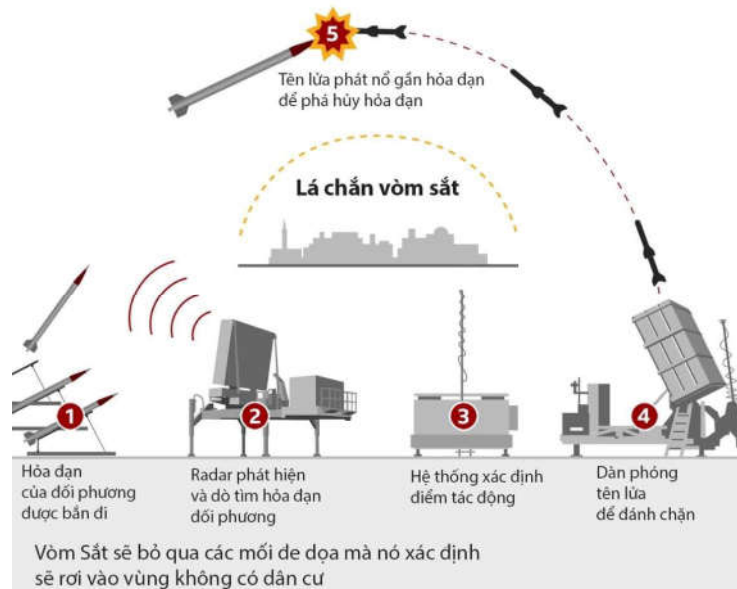
b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí điểm $A(2; 2; 7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó

c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $B(5; 6; 7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $B(5; 6; 7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị km là 8 km.

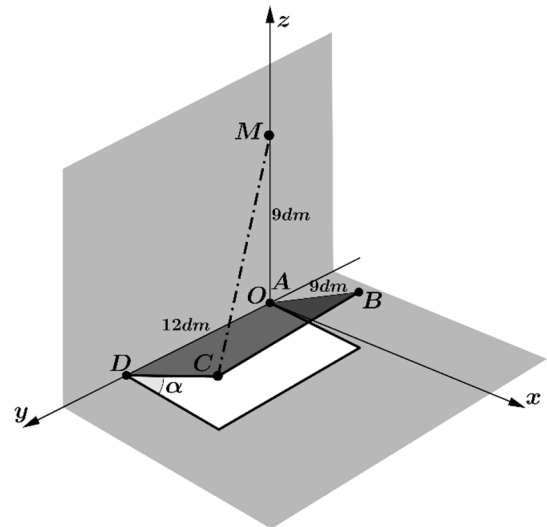


Câu 16.5. Hệ thống phòng không “vòm sắt” là một trong những hệ thống đánh chặn tên lửa từ xa rất nổi tiếng của Israel. Để “vòm sắt” hoạt động được chính xác người ta trang bị một Radar có khả năng phát hiện tên lửa với bán kính 417 km. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, một hệ thống “vòm sắt” đang ở vị trí gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ và một quả tên lửa đang ở vị trí $A(688; 185; -8)$ được phóng lên và bay theo một quỹ đạo là đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-91; -75; 0)$.



- a) Phương trình mặt cầu thể hiện vùng phủ sóng của Radar là $x^2 + y^2 + z^2 = 417$
 b) Radar phát hiện một quả tên lửa ngay tại vị trí được phóng lên
 c) Giả sử hệ thống "Vòm sắt" gặp trục trặc không thể bắn hạ quả tên lửa khi đó vị trí cuối cùng quả tên lửa xuất hiện trên màn hình radar là $B(415; -40; -8)$
 d) Nếu hệ thống gặp trục trặc không bắn hạ được tên lửa thì khoảng cách gần nhất từ hệ thống "vòm sắt" đến quả tên lửa là ≈ 190 km

Câu 16.6. Một nắp bể nước hình chữ nhật $ABCD$ nằm cạnh bờ tường có kích thước $9\text{dm} \times 12\text{dm}$ được kéo ra từ mặt sàn. Do tác dụng của trọng lực nên nắp bể không thể mở ra được nếu không có người giữ. Người ta dùng một sợi dây xích dài 15 dm và kéo căng nối đỉnh C của hình chữ nhật với điểm M nằm phía trên bờ tường sao cho $AM = 9\text{dm}$ và AM vuông góc với mặt sàn. Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, khi đó nắp bể mở ra và tạo với mặt sàn một góc α (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng dm). Bỏ qua độ dày của nắp bể.



- a) Điểm M thuộc mặt phẳng có phương trình $z = 0$.
 b) Tọa độ điểm C là $C(9\sin\alpha; 12; 9\cos\alpha)$.
 c) Góc giữa nắp bể và mặt sàn sau khi kéo lên là $\alpha = 60^\circ$.
 d) Phương trình mặt phẳng chứa nắp bể nước sau khi kéo bởi dây xích là $x - \sqrt{3}z = 0$.

Câu 16.7. Vệ tinh hoạt động dựa trên nguyên lý của vật lý Newton. Một vật thể bị kéo bởi một lực hấp dẫn từ một vật thể khác sẽ chuyển động theo một quỹ đạo elip xung quanh vật thể đó. Để đưa vệ tinh lên quỹ đạo, người ta sử dụng các loại tên lửa đẩy khác nhau để cung cấp cho vệ tinh động lượng cần thiết để thoát khỏi trọng lực của Trái Đất và duy trì quỹ đạo ổn định. Để thuận tiện ta quy ước một quỹ đạo gần tròn thành một đường tròn. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, gốc tọa độ là tâm trái đất, một vệ tinh nhân tạo có quỹ đạo được coi như một đường tròn có bán kính 13440 km có điểm xuất phát là điểm $B(4032; 0; -5376)$ và đây cũng là điểm gần Trái Đất nhất của vệ tinh. Quỹ đạo của vệ tinh này nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục tung và có tâm nằm trên đường thẳng OB . Coi trái đất là hình cầu hoàn hảo có bán kính bằng 6400 km .

- a) Phương trình mặt phẳng chứa quỹ đạo của vệ tinh là $x + z = 0$.
 b) Khi xuất phát tại điểm B vệ tinh đang ở độ cao 320 km so với mặt đất.

c) Quỹ đạo của tên lửa là đường tròn có tâm $I(-4032; 0; 5736)$.

d) Khi Trái Đất quay, điểm cực Nam và cực Bắc của Trái Đất không thay đổi vị trí. Biết rằng điểm cực Nam của Trái Đất có tọa độ là $M(0; 3840; 5120)$. Khoảng cách gần nhất giữa vệ tinh và điểm cực Nam bằng 10112 km (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 16.8. Một mái nhà hình tròn được đặt trên ba cây cột trụ. Các cây cột trụ vuông góc với mặt sàn nhà phẳng và có độ cao lần lượt là 8m, 9m, 10m. Ba chân cột là ba đỉnh của một

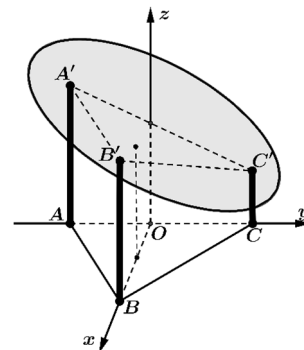
tam giác đều trên mặt sàn nhà với cạnh dài 8m. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với $B \in Ox$, $C \in Oy$, tia Oz cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$. Chọn gốc tọa độ O trùng với trung điểm của AC và mỗi đơn vị trên trục có độ dài 1m (xem hình vẽ).

a) Tọa độ các điểm $A'(0; -4; 10)$, $B'(4\sqrt{3}; 0; 9)$, $C'(0; 4; 8)$.

b) Phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$ là: $y + 4z - 36 = 0$.

c) Biết độ dốc của mái nhà tiêu chuẩn khoảng 27° đến 35° thì mái nhà trên có độ dốc ở mức tiêu chuẩn.

d) Biết rằng bề mặt mái nhà là hình tròn có tâm I trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ thì điểm I cách mặt sàn một khoảng là 9 mét.



Câu 16.9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một con chim bồ câu xuất phát từ

$O(0; 0; 0)$ di chuyển với vectơ vận tốc $\vec{v}_1 = (1; 2; 2)$. Cùng lúc đó, một con chim én cũng

bắt đầu di chuyển từ $A(0; 0; 5)$ với vectơ vận tốc $\vec{v}_2 = (0; 3; 4)$. Tồn tại một vùng không gian nguy hiểm, nơi mà ở đó thường xuyên xuất hiện những người săn bắt chim có dạng mặt cầu $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 4)^2 = 16$. Biết rằng mỗi đơn vị trên các trục tọa độ trong không gian tương đương 1m và đơn vị đo thời gian tính bằng giây.

a) Tốc độ di chuyển của chim bồ câu là 3 m/s

b) Chim én có di chuyển vào vùng nguy hiểm trong quá trình bay

c) Thời gian mà chim bồ câu di chuyển trong vùng nguy hiểm nhỏ hơn 5 giây

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng quỹ đạo của hai con chim bằng $\frac{2}{3}$ m.

Câu 16.10. Dự án Hyperloop là một giải pháp giao thông của tương lai khi nó sẽ giúp vận

chuyển người và hàng hóa bằng một đường ống chân không với tốc độ tương đương một chiếc máy bay. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một cabin xuất phát từ điểm

$A(10; 3; 0)$ và chuyển động theo đường cáp có

vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -2; 1)$. Hướng chuyển

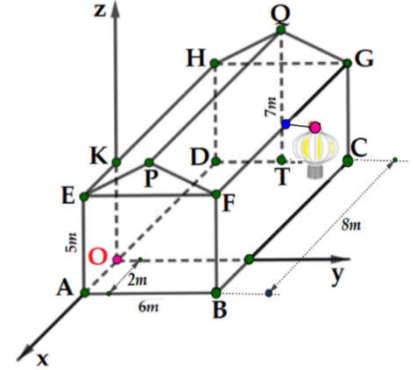
động cùng chiều với hướng vectơ $\vec{u}$ với tốc độ 4,5 m/s và đơn vị trên mỗi trục là mét.



a) Phương trình tham số của đường thẳng chứa đường cáp là
$$\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- b) Giả sử sau thời gian t giây ($t \geq 0$) kể từ khi xuất phát thì cabin đến điểm M . Khi đó tọa độ của điểm M $\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right)$ với $t \in \mathbb{R}$
- c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$. Khi đó quãng đường AB dài 800 mét.
- d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 30° .

Câu 16.11. Nhà bác An được mô tả như hình bên dưới, trong đó phần thân nhà là hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$. Ngôi nhà được lợp ngói hai mái là hai hình chữ nhật $PEHQ$ và $PFGH$, biết tam giác EFP là tam giác cân tại P . Gọi T là trung điểm của DC . Các kích thước của nhà lần lượt là $AB = 6m$; $AE = 5m$; $AD = 8m$; $QT = 7m$. Xét hệ trục tọa độ có gốc tọa độ là điểm O thuộc đoạn AD sao cho $OA = 2m$ và các trục tọa độ tương ứng là các trục Ox, Oy, Oz . Khi đó:



- a) Tọa độ điểm A là $(2; 0; 0)$.
- b) Véc tơ $\overrightarrow{AC}$ có tọa độ là $(6; 6; 0)$.
- c) Bác An muốn lắp một chiếc đèn lồng tại vị trí trung điểm của FG và đầu nguồn điện đặt tại vị trí O . Bác ấy thiết kế đường dây điện nối từ O đến K sau đó nối đến chiếc đèn lồng. Độ dài đoạn dây điện nối tối thiểu bằng $5 + 2\sqrt{10}$ (m).
- d) Mái nhà Bác An được lợp bằng ngói đất nung Đất Việt, giá tiền mỗi viên ngói là 11 000 đồng và để lợp được $1 \text{ (m}^2\text{)}$ diện tích mái nhà cần 22 viên ngói. Số tiền cần bỏ ra để mua ngói lợp mái nhà là 13 960 000 đồng (không kể hao phí do việc cắt và ghép các viên ngói, làm tròn kết quả đến hàng nghìn).

Câu 16.12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ cắt đường thẳng d tại B , cắt mặt phẳng (P) tại C thỏa mãn D là trung điểm của đoạn BC với $D\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$.

- a) Điểm $A(3; 5; 1)$ thuộc đường thẳng d .
- b) Khoảng cách từ điểm $M(1; 1; 3)$ đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{4}{3}$.
- c) Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là $I(-1; -1; -3)$.
- d) Đường thẳng Δ có một véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -2)$.

Câu 16.13. Một máy bay đang di chuyển về phía sân bay. Tại thời điểm hiện tại, vị trí của máy bay là $B(150; 150; 5000)$ (trong đó 5000m là độ cao của máy bay so với mặt đất). Máy bay đang di chuyển thẳng tới sân bay với vận tốc 700km/h. Sân bay có tọa độ $C(0; 0; 0)$ và máy bay đang tiến dần đến vị trí hạ cánh tại sân bay.

- a) Phương trình tham số của đường thẳng mà máy bay di chuyển theo là

$$\begin{cases} x = 150 - 150t \\ y = 150 - 150t \\ z = 5000 - 5000t \end{cases}$$

- b) Khoảng cách từ vị trí hiện tại của máy bay $B(150;150;5000)$ đến sân bay $C(0;0;0)$ là $\sqrt{15250000} \approx 3905,6\text{km}$
- c) Với vận tốc của máy bay là 700km/h , thời gian để máy bay hạ cánh là khoảng 5,5 giờ.
- d) Nếu hệ thống kiểm soát không lưu yêu cầu liên lạc với máy bay khi nó còn cách sân bay 40km thì khi máy bay ở vị trí $(6;6;200)$ nó còn cách sân bay là 40km .

Câu 16.14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp đều $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2\sqrt{2}$ và cạnh bên $SA = 4$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ (Minh họa như hình vẽ dưới đây)

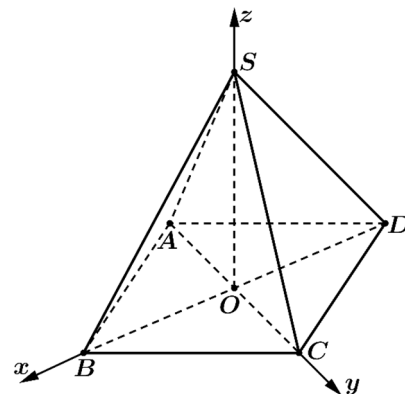
a) Tọa độ của điểm $A(0;2;0)$.

b) Trọng tâm của tam giác SAB là $G\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

c) Nếu điểm $E(a;0;b)$ là một điểm thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho ba điểm C, E, G thẳng hàng thì tích $ab = \sqrt{3}$.

d) Nếu điểm $M(0;m;n)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao

cho $MG + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của biểu thức $T = m^2 + n^2 = 1$.



Câu 16.15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Đường thẳng AB nhận $\vec{u} = (1;2;1)$ làm vectơ chỉ phương.

b) Đường thẳng AC có phương trình:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

c) Mặt phẳng (P) có phương trình $2x + 3y + z - 2025 = 0$ song song với mặt phẳng (ABC) .

d) Điểm $N\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$ là điểm thỏa mãn $3NA^2 + 2NB^2 - NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 16.16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 5 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-3;2;-1)$ và bán kính $R = 3$.

b) Gốc tọa độ $O(0;0;0)$ nằm trong mặt cầu (S) .

c) Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (Q) là 1.

d) Mặt phẳng (Q) có phương trình là: $2y - z = 0$.

Câu 16.17. Trong lĩnh vực xạ trị ung thư, chùm tia xạ được định hướng để tập trung vào khối u mô phỏng là một hình cầu $(U): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 1$. Để giảm thiểu tổn thương cho mô lành xung quanh, người ta thiết kế một hệ thống chắn xạ. Một phần của hệ thống chắn xạ được mô hình hóa bởi mặt phẳng $(Q): x + y + z - 7 = 0$. Người ta cần xác định vùng khối u nằm phía sau mặt phẳng chắn xạ so với nguồn xạ. Giả sử nguồn xạ đặt rất xa và các tia xạ song song theo phương vectơ $\vec{v} = (1;1;1)$.

- a) Tâm I của khối u có tọa độ $I(2;1;3)$
- b) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng chắn xạ (Q) là $n = (1;1;1)$
- c) Tâm J của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (Q) và khối u (U) có tọa độ thỏa mãn hệ thức $y_J = x_J - 1$
- d) Thể tích phần khối u nằm phía sau mặt phẳng (Q) theo hướng vectơ $\vec{v}$ là $\frac{\pi}{3} \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ cm³

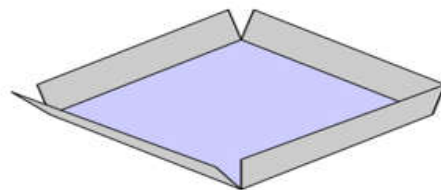
Câu 16.18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một tàu ngầm đang di chuyển dưới biển sâu với hướng di chuyển theo đường thẳng $\Delta: \frac{x-50}{3} = \frac{y+20}{-4} = \frac{z-10}{1}$. Hải quân phát hiện một khu vực nguy hiểm được rải mìn, khu vực này có dạng hình cầu (S) với tâm $C(200; -300; 60)$ và bán kính $R = 80$ (mét)

- a) Vectơ chỉ phương của đường di chuyển Δ vuông góc với $\overrightarrow{OC}$, với O là gốc tọa độ
- b) Đường di chuyển Δ nằm trong mặt phẳng $(P): 4x + 3y = 140$.
- c) Tàu ngầm sẽ đi vào khu vực nguy hiểm (S)
- d) Gọi M là điểm gần khu vực mìn nhất trên đường đi của tàu ngầm. Biết rằng tốc độ tàu ngầm không đổi là 5 (m/s). Thời gian ngắn nhất để tàu ngầm di chuyển từ vị trí hiện tại $A(50; -20; 10)$ đến điểm M là 63,5 giây (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 16.19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, hai mặt phẳng (SAB) , (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa cạnh bên SC với mặt phẳng đáy bằng 60° . Khi đó

- a) SA vuông góc với mặt phẳng đáy.
- b) Chiều cao khối chóp bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.
- c) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.
- d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng $\frac{a\sqrt{78}}{13}$.

Câu 16.20. Bạn An muốn dùng tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 3 dm, chiều dài 5 dm để làm một chiếc hộp không nắp, bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ có cạnh bằng x dm ở bốn góc của tấm bìa như hình vẽ. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



- a) Điều kiện của x là $0 < x < \frac{3}{2}$.
- b) Diện tích mặt đáy của chiếc hộp là $(3 - 2x)(5 - 2x)$

c) Thể tích của chiếc hộp là $4x^3 - 16x^2 + 15$

d) Với $x = \frac{8 - \sqrt{19}}{6}$ thì chiếc hộp có thể tích lớn nhất.

Câu 16.21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có cạnh $AB = 2a, AD = a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB và CD .

a) $SH \perp (ABCD)$.

b) Góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SHC}$.

c) Góc phẳng nhị diện $[S, AB, C]$ bằng 90° .

d) Góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$ bằng 45° .

Câu 16.22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$.

a) Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD) bằng $a\sqrt{2}$.

b) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

c) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD, AB bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 16.23. Cho tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB, CD .

a) Đường cao của tứ diện $ABCD$ là AO .

b) Thể tích của tứ diện $A.BCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

c) Số đo của góc phẳng nhị diện $[A, BC, D]$ bằng $70^\circ 31'$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD là $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 16.24. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , tam giác $AB'C'$ cân tại A , mặt phẳng $(AB'C')$ vuông góc với mặt phẳng $(A'B'C')$

và $AA' = a\sqrt{3}$.

a) Mặt bên $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

b) Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

c) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

d) Khoảng cách giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng BC' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16.25. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1; 2; 3), B(-3; 4; -1), C(2; 0; -2)$.

a) Góc $\widehat{ABC}$ là góc lớn hơn 60° .

b) Gọi $D(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$. Khi đó $a + b + 2c = 22$.

- c) Gọi E là điểm thuộc mặt phẳng Oxy để A, B, E thẳng hàng. Khi đó tổng hoành độ, tung độ, cao độ của điểm E bằng $\frac{3}{2}$.
- d) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , I là trung điểm của AB . Khi đó $\overrightarrow{IG} = (-1; 1; 1)$.

Câu 16.26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; -2; -1)$, $N(4; 3; 1)$.

- a) Hình chiếu của điểm M trên trục Oy có tọa độ là $(0; -2; 0)$.
- b) Gọi E là điểm đối xứng của điểm M qua N . Tọa độ của điểm E là $(5; 8; 3)$.
- c) Cho $P(1; m; n)$. Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $2m + 5n = 20$.
- d) Điểm $I(a; b; c)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy) thỏa mãn $T = \left| \overrightarrow{2IM} - \overrightarrow{IN} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $3a - 2b + c = 20$.

Câu 16.27. Một kho chứa hàng có dạng hình lăng trụ đứng $OAFPE.CBGQH$ với $OAFE$ là hình chữ nhật và EFH là tam giác cân tại P . Biết $OA = 4$ m; $AB = 6$ m; $HC = 5$ m; độ dốc của mái nhà, tức là số đo góc nhị diện $[Q, FG, H]$ bằng 45° . Người ta mô hình hóa nhà kho bằng cách chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ là điểm O và các trục tọa độ tương ứng như hình vẽ dưới đây (đơn vị trên mỗi trục là 1 m). Khi đó:

- a) Tọa độ của $\overrightarrow{PQ}$ là $(0; 6; 0)$.
- b) Tọa độ của điểm G là $(6; 4; 5)$.
- c) Chiều cao kho hàng tức là khoảng cách từ nóc nhà (điểm cao nhất của mái nhà) và sàn nhà bằng 7 m.
- d) Người ta muốn lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí trung điểm của GQ và đầu thu dữ liệu đặt tại vị trí O . Người ta thiết kế đường dây cáp nối từ O đến E rồi từ E đến H , sau đó nối thẳng đến camera. Độ dài đoạn cáp nối tối thiểu bằng $11 + \sqrt{10}$ m.

Câu 16.28. Trong không gian, xét hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là mặt phẳng) với tia Ox hướng về phía nam, tia Oy hướng về phía đông và tia Oz hướng thẳng đứng lên trời (tham khảo hình vẽ). Đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ lấy theo kilômét. Một chiếc radar đặt tại O có phạm vi theo dõi là 30 km. Một chiếc tàu thám hiểm tại vị trí A ở độ sâu 10 km so với mặt nước biển, cách O 25 km về phía nam và 15 km về phía tây. Một tàu đánh cá tại vị trí $B(-20; 15; 0)$.

- a) Khoảng cách từ chiếc tàu thám hiểm đến radar bằng 25 km.
- b) Radar không phát hiện được tàu thám hiểm đặt tại vị trí A .
- c) Radar phát hiện ra tàu đánh cá tại vị trí B .
- d) Một chiếc tàu của cảnh sát biển đang tuần tra di chuyển đến vị trí C cách O 15 km về phía nam. Để radar phát hiện ra thì tàu cảnh sát biển cần di chuyển về phía đông cách O tối đa $15\sqrt{3}$ km.

Câu 16.29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1, có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn OI sao cho $MO = \frac{1}{2}MI$. Gắn hệ trục tọa độ $A'xyz$.

a) Tọa độ điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

b) Tọa độ các điểm $A'(0;0;0)$, $B'(1;0;0)$, $D'(0;1;0)$ và $A(0;0;1)$.

c) Trong không gian giả sử điểm P, Q sao cho $\overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{A'B'} + 2\overrightarrow{A'D'} - 2\overrightarrow{A'A}$; $\overrightarrow{A'Q} = \frac{8}{3}\overrightarrow{A'B'} + \frac{4}{3}\overrightarrow{A'D'} + \frac{8}{3}\overrightarrow{A'A}$ và $J(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'PQ$, khi đó $a - b + c = 0$.

d) Trong không gian có đúng 2 điểm N sao cho N không trùng với các điểm A, B', D' và $\widehat{ANB'} = \widehat{B'ND'} = \widehat{D'NA} = 90^\circ$.

Câu 16.30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -2; 2)$, $B(-1; 1; -1)$, $C(-3; 1; 3)$ và mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 = 56$.

a) Đường thẳng đi qua hai điểm A và C có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -2 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b) Biết $N(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho thể tích tứ diện $NABC$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $a.b.c = 405$.

c) Cho điểm M di động trên mặt phẳng (Oxy) , biểu thức $T = \left| \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{13}$.

d) Mặt phẳng (ABC) không đi qua gốc tọa độ.

Câu 16.31. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 6, góc giữa $A'B$ và $(ACC'A')$ bằng 30° . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AC .

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là $2\sqrt{2}$.

b) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $18\sqrt{6}$.

c) $AA' = 6\sqrt{2}$.

d) $(A'BM) \perp (ACC'A')$.

Câu 16.32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -2; 1)$, $B(1; 0; 2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) .

a) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1; -2; 2)$.

b) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{n_{(P)}}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (Q) .

c) Phương trình mặt phẳng (Q) là $6x - y - 4z - 4 = 0$.

d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{\sqrt{53}}{53}$.

Câu 16.33. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy và tam giác SAB đều cạnh $2a$. Biết tam giác ABC vuông tại C và cạnh $AC = a\sqrt{3}$. Gọi H là trung

điểm của AB . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Mặt phẳng (SHC) và (ABC) vuông góc với nhau.
- b) Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{6}$.
- c) $d(C, (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- d) $SH \perp (ABC)$.

Câu 16.34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy, $SA = 2a$, $AB = a$.

- a) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{2a^3}{3}$.
- b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.
- c) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.
- d) Số đo góc nhị diện $[B, SC, D]$ bằng $103,5^\circ$ (làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 16.35. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $AB = 1$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) và $SA = \sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Những phương án nào dưới đây đúng?

1. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SB bằng $\frac{\sqrt{10}}{5}$.
3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng $\frac{\sqrt{6}}{4}$.
5. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 16.36. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;6;-7)$, $B(3;2;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình

$$x + y - z - 6 = 0$$

- a) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.
- b) Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là $x + y - z + 14 = 0$.
- c) Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là $x - 2y + 4z + 18 = 0$.
- d) M là một điểm trên mặt phẳng (P) , tổng $MA + MB$ ngắn nhất khi $M\left(\frac{13}{5}; \frac{14}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

Câu 16.37. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 2025 = 0$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Số đo góc giữa hai đường thẳng Δ và (P) bằng 90° .
- b) Biết hình chiếu của O lên (P) là $H(3; -1; 2)$. α là số đo góc giữa (P) và đường thẳng Δ , $\cos \alpha = \frac{1}{14}$
- c) Đường thẳng d là giao tuyến của (P) và (Oxy) , khi đó vectơ chỉ phương của d là $\vec{a} = (-2, 1, 0)$.
- d) Đường thẳng d_1 vuông góc với (P) tạo với $(Q): x + my - 3 = 0$ một góc 30° . Khi đó tổng tất cả các giá trị của tham số m bằng $\frac{-16}{5}$.

Câu 16.38. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$ và các mặt phẳng $(P): x - 4y + z + 5 = 0; (Q): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Gọi (R) là mặt phẳng chứa Ox và vuông góc với mặt phẳng (P) . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $(P) // (Q)$.
- b) Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình là $4x - y - 8z + 18 = 0$.
- c) Góc tạo bởi mặt phẳng (R) và (Q) xấp xỉ 74° .
- d) Có hai điểm thuộc tia Ox sao cho điểm đó cách đều mặt phẳng (P) và trục Oy

Câu 16.39. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1; 3; 7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km.

- a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 7)^2 = 9$.
- b) Điểm $A(2; 2; 7)$ nằm ngoài mặt cầu (S) .
- c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(2; 2; 7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.
- d) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(5; 6; 7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

Câu 16.40. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2} \text{ và } \Delta_2: \frac{x-4}{-1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-6}{2}.$$

- a) Vectơ có tọa độ $(1; 2; 3)$ là một vectơ chỉ phương của Δ_1 .
- b) Vectơ có tọa độ $(4; 5; 6)$ là một vectơ chỉ phương của Δ_2 .
- c) Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{u}_1 = (2; 1; -2)$ và $\vec{u}_2 = (-1; -2; 2)$ bằng $-\frac{8}{9}$.
- d) Phương trình mặt phẳng chứa (Δ_1) và song song (Δ_2) có phương trình $2y + 3z - 13 = 0$

Câu 16.41. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(5; -5; 2)$ và mặt phẳng $2x - 3y + z + 1 = 0$.

- a) Vectơ $\vec{n} = (2; 3; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

b) Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) . Phương trình

$$\text{tham số của đường thẳng } d \text{ là } \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -3 - 5t \\ z = 1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

c) Điểm $H(1;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (P) .

d) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng $2\sqrt{14}$.

Câu 16.42. Một tên lửa phóng từ mặt đất từ vị trí gốc tọa độ O theo hướng, vận tốc không đổi (đặt mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất). Tên lửa đi từ điểm $O(0;0;0)$ đến điểm $A(140;60;6)$ trong 8 phút.

a) Trong 8 phút tên lửa bay được quãng đường (làm tròn đến hàng đơn vị) xấp xỉ bằng 152 km.

b) Ở phút thứ 4 độ cao của tên lửa là 3 km.

c) Tọa độ của tên lửa sau 12 phút kể từ lúc phóng là $(210;90;12)$.

d) Sau 10 phút tiếp theo kể từ vị trí A tên lửa đạt độ cao là 13.5km.

Câu 16.43. Một nhà máy sản xuất ô tô thông minh đã thực hiện thử nghiệm cho xe chạy với vận tốc không đổi từ điểm A và theo hướng từ điểm A đến điểm B . Biết rằng, xe chạy được khi có sóng wifi và nếu không có sóng wifi thì xe bị dừng lại. Trạm phát sóng wifi đặt ở vị trí C trên đỉnh của một trụ cột và bán kính phát sóng của wifi bằng $10\sqrt{77}(m)$. Trong không gian nếu chọn hệ tọa độ $Oxyz$ thì $A(10;20;0)$, $B(20;30;0)$, $C(10;30;40)$ và đơn vị độ dài trên trục là mét.

a) Đường thẳng AB có phương trình $\begin{cases} x = 10 + t \\ y = 20 + t \\ z = 0 \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

b) Vị trí xe dừng lại là điểm $M(-40;-30;0)$.

c) Quãng đường xe đi được là $50\sqrt{2}(m)$.

d) Nếu thời gian đi từ A đến B mất 5 giây thì thời gian đi từ A đến khi xe dừng lại mất 30 giây.

Câu 16.44. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(2;1;5)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km.

a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

b) Điểm $M(3;2;4)$ nằm ngoài mặt cầu (S) .

c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(3;2;4)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(x;2;3)$ để có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó thì $0 \leq x \leq 4$.

Câu 16.45. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;-4;7)$, $B(5;1;6)$, $C(5;5;5)$.

a) Trung điểm K của đoạn thẳng AB có tọa độ là $K\left(3; -\frac{3}{2}; \frac{13}{2}\right)$.

b) Độ dài trung tuyến là $\frac{\sqrt{194}}{2}$.

c) Điểm I thỏa mãn $-2\vec{IA} - 3\vec{IB} + 6\vec{IC} = \vec{0}$, ta được: $I(-13; 35; -2)$.

d) Với M là điểm trong không gian $Oxyz$, ta có giá trị nhỏ nhất của $P = -2\vec{MA}^2 - 3\vec{MB}^2 + 6\vec{MC}^2$ là -1266 .

Câu 16.46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-2; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$.

a) Phương trình mặt cầu đường kính AB là $(S): x^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 36$.

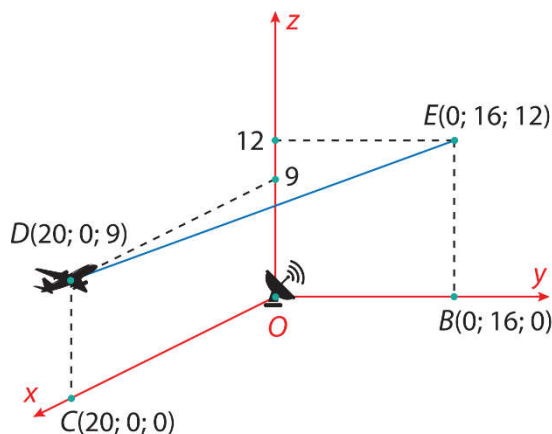
b) Mặt phẳng (α) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là $(\alpha): -x + z + 1 = 0$.

c) Đường thẳng (Δ) đi qua O , cắt và vuông góc với AB có phương trình là

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2t \\ y = 26t \\ z = 11t \end{cases}$$

d) Cho điểm M di động trên mặt phẳng (P) và luôn cách đều A, B . $OM_{\min} = 3\sqrt{2}$

Câu 16.47. Giả sử một máy bay thương mại M đang bay trên bầu trời theo một đường thẳng từ D đến E có hình chiếu trên mặt đất là đoạn CB . Tại D , máy bay bay cách mặt đất là 9000m và tại E là 12000m. Một radar được đặt trên mặt đất tại vị trí O cách C là 20000m, cách B là 16000m và $\widehat{BOC} = 90^\circ$. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị: 1000 m) với O là vị trí đặt radar, B thuộc tia Oy , C thuộc tia Ox , khi đó ta có tọa độ các điểm như hình vẽ sau:



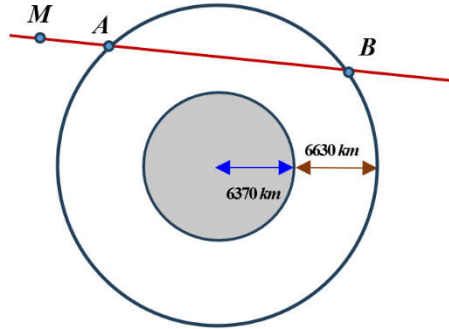
a) Tại D , máy bay cách radar 29000m (làm tròn đến hàng nghìn theo đơn vị mét).

b) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng DE . Khi máy bay bay đến điểm I , máy bay cách mặt đất 10500m.

c) Trên đoạn đường bay từ D đến E , máy bay sẽ đi qua điểm $P(16; 3; 2; 9, 6)$.

d) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà máy bay bay trong phạm vi theo dõi của radar (làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị mét) là 22000m. Biết bán kính hoạt động của radar là 20000m.

Câu 16.48. Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7500000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6630 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6370 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng đi qua hai điểm $M(-12;29;10)$ và $N(0;12;5)$



a) Trong hệ trục tọa độ đã cho thiên thạch di chuyển trên đường thẳng có phương

$$\text{tham số} \begin{cases} x = -12 - 12t \\ y = 29 + 17t \\ z = 10 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) Quãng đường mà thiên thạch di chuyển trong vùng theo dõi của hệ thống quan sát là 21401km (làm tròn đến hàng đơn vị).

c) Vị trí mà thiên thạch gần Trái Đất nhất là điểm $H\left(-30; \frac{109}{2}; \frac{25}{2}\right)$

d) Thiên thạch trên không thể va vào trái đất.

Câu 16.49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất. Một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(-40;5;2)$ và chuyển động thẳng đến điểm $B(808;-101;426)$ với tốc độ là 6 m/s.

a) Điểm $M(384;-48;214)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

b) Vector $\vec{u} = (8;1;4)$ là vector chỉ phương của đường thẳng AB .

c) Thời gian cabin cáp treo đi từ A đến B là 2 phút 39 giây.

d) Sau khi di chuyển từ A được 1 phút, cabin cáp treo cách mặt đất 162 mét.

Câu 16.50. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500;200;10)$ đến điểm $N(800;300;10)$ trong 20 phút.

a) Máy bay đang di chuyển theo hướng tiến lại gần vị trí đặt ra đa.

b) Khoảng cách $MN = 100\sqrt{10}$ km.

c) Tốc độ của máy bay khi di chuyển từ M đến N là $150\sqrt{10}$ km/h.

d) Nếu tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 4 phút tiếp theo là $Q(a;b;c)$ với $a + b + c = 1191$.

-----HẾT-----