

CHƯƠNG

II

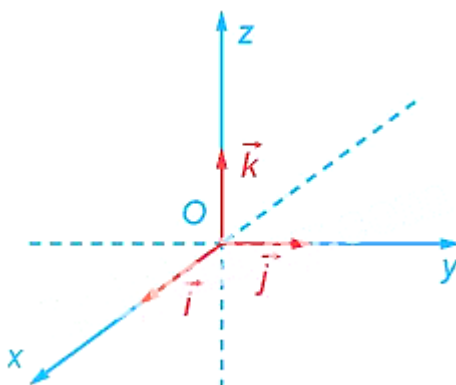
VECTƠ
TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



LÝ THUYẾT.

I. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục.

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz .

Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$, hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.

Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

II. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian $Oxyz$, cho một điểm M tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$, trong đó x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ của M .

Nhận xét. Nếu điểm M có tọa độ $(x; y; z)$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ thì:

- Hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy và Oz có tọa độ lần lượt là $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$ và $(0; 0; z)$.
- Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz)$ và (Ozx) có tọa độ lần lượt là $(x; y; 0)$, $(0; y; z)$ và $(x; 0; z)$.

Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a}$ tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là toạ độ của vector $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{a}(x; y; z)$.

Nhận xét

- Toạ độ của vector $\vec{a}$ cũng là toạ độ của điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.
- Trong không gian, cho hai vector $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Khi đó, $\vec{a} = \vec{b}$ nếu và chỉ nếu
$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$. Khi đó: $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M)$.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Một căn phòng có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với chiều rộng $AB = 4$, chiều dài $AD = 8$, chiều cao $AA' = 10$ được gắn vào hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ. Người ta muốn treo một bóng đèn ở tâm hình hộp. Tìm toạ độ vị trí điểm M để treo bóng đèn.

Câu 2: Một công ty viễn thông đang lên kế hoạch xây dựng một tháp viễn thông tại một thành phố để cung cấp dịch vụ tốt hơn. Công ty cần xác định vị trí của tháp sao cho có thể phủ sóng hiệu quả đến ba toà nhà quan trọng trong thành phố. Giả sử các toà nhà này được đặt tại các vị trí có toạ độ như sau:

Toà nhà $A(0; 0; 0)$

Toà nhà $B(6; 0; 0)$

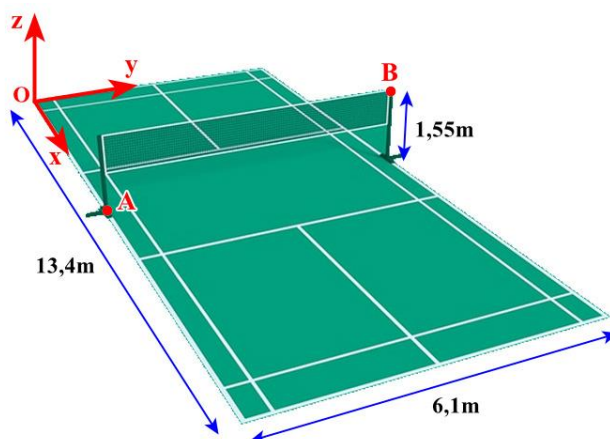
Toà nhà $C(3; \sqrt{3}; 2\sqrt{6})$

Tháp viễn thông phải đặt ở vị trí sao cho tổng khoảng cách từ tháp đến 3 toà nhà là nhỏ nhất. Khi đó tổng khoảng cách từ vị trí của tháp đến ba toà nhà bằng bao nhiêu?

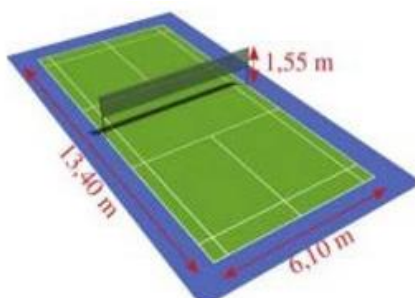


Câu 3: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2,5 km về phía nam và 2 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1,5 km về phía bắc và 3 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,6 km. Người ta cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu cho hai khinh khí cầu sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó tới hai khinh khí cầu nhỏ nhất. Giả sử vị trí cần tìm cách địa điểm hai khinh khí cầu bay lên là a km theo hướng nam và b km theo hướng tây. Tính tổng $2a + 3b$.

Câu 4: Hình dưới đây mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó (đơn vị trên mỗi trục là mét) và hai điểm A, B như hình. Xác định tọa độ của $\overrightarrow{AB}$.



Câu 5: Hình vẽ 1a mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như hình 1b (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới. Biết tọa độ của vector $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$. Khi đó $S = a - b + 2c$ bằng bao nhiêu?

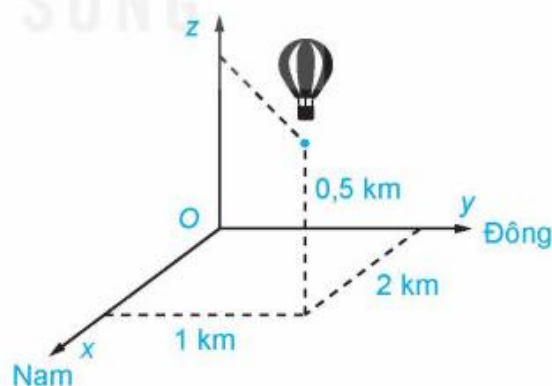


(Hình 1a)

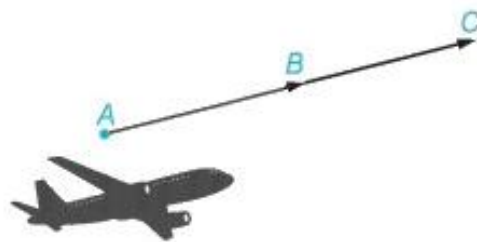


(Hình 1b)

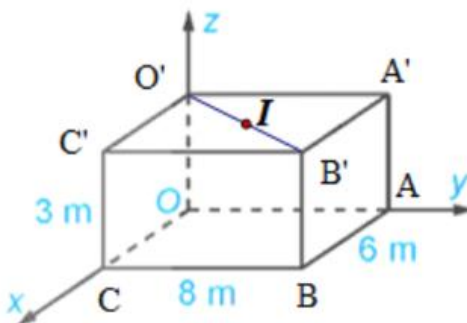
Câu 6: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\text{ m}$. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và $1,5\text{ km}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\text{ km}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, Oy hướng về phía đông, Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét. Tìm tọa độ của mỗi chiếc khinh khí cầu.



- Câu 7:** Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong vòng 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là gì?



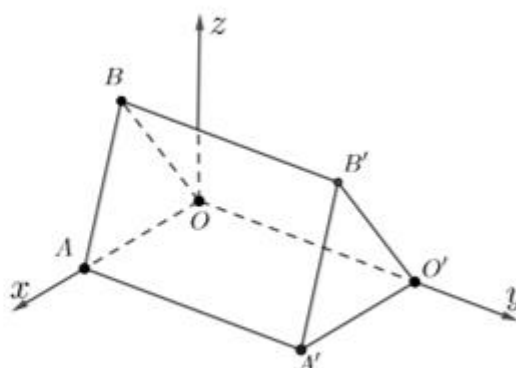
- Câu 8:** Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m , chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m . Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét. Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.



- Câu 9:** Những căn lều gỗ trong Hình 1 được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong Hình 2. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thể hiện như Hình 2 (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240; 450; 0)$ và $(120; 450; 300)$. Mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là $a\text{ cm}$, chiều rộng là $b\text{ cm}$, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là $c\text{ cm}$. Tính $a+b+c$ (Làm tròn đến hàng đơn vị).

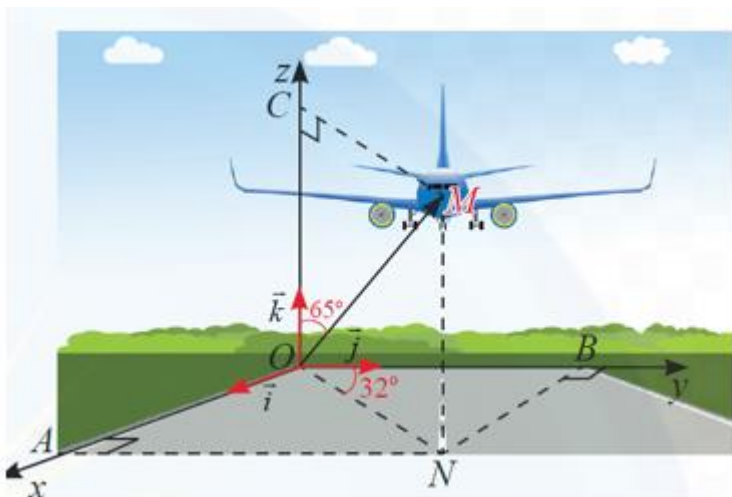


Hình 1



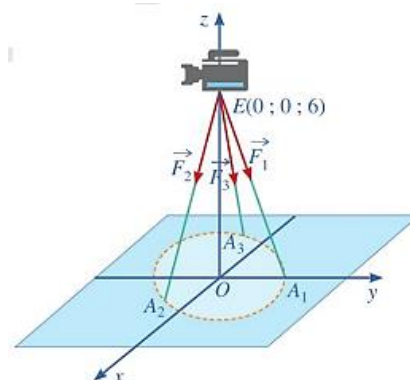
Hình 2

Câu 10: Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14$, $NOB = 32^\circ$, $MOC = 65^\circ$. Tìm tọa độ điểm M .

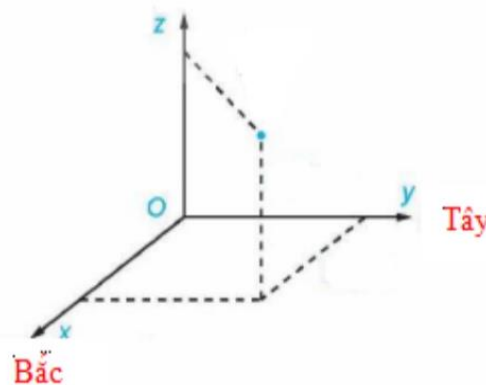


Câu 11: Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(100;50;5)$ đến điểm $B(200;100;10)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(x; y; z)$. Khi đó tính $x + y + z$

Câu 12: Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0;1;0)$, $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$, $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ (Hình 40). Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 300 N. Tìm tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.



Câu 13: Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại một điểm. Sau một thời gian chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc 30(km) và phía Tây 40(km), đồng thời cách mặt đất 1,5(km). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng Oxy trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômet (xem hình vẽ). Khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát gần nhất với giá trị nào dưới đây (đơn vị km)?



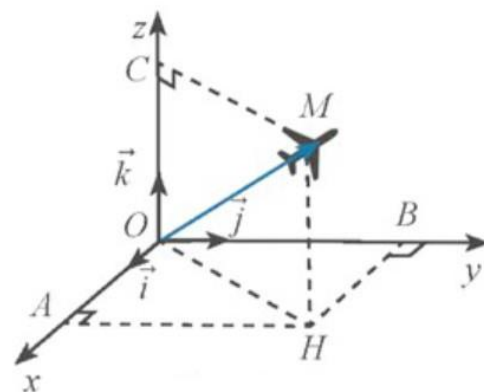
Câu 14: Một gia đình định lắp thang máy trong nhà ở, cabin của thang máy có dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông như hình vẽ. Biết rằng công ty cung cấp thang máy cho biết thể tích khoang cabin là $5,4m^3$ và diện tích toàn phần của nó là $18,9m^2$.

Gia đình định lắp 1 chiếc camera ở vị trí trên trần cabin (điểm P), gần 1 góc vuông sao cho nó cách 2 vách đứng của khoang cabin đều là $10cm$ (hình vẽ). Chọn hệ trục như hình vẽ, đơn vị trên mỗi trục là $10cm$. Hãy tìm tọa độ của điểm P , biết rằng cạnh của đáy cabin không tới $2m$

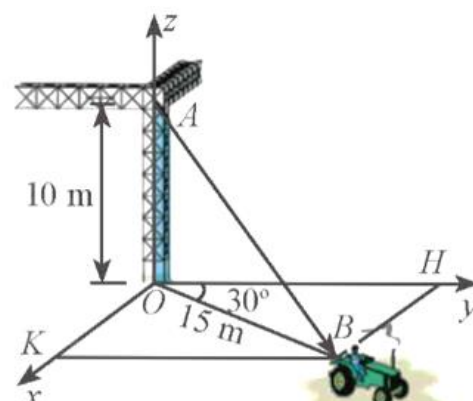


Câu 15: Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình vẽ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Biết

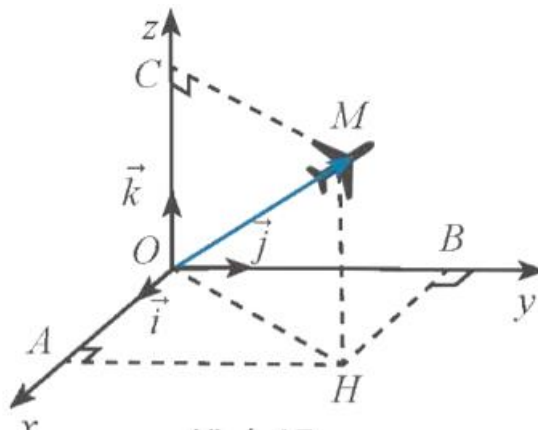
$OM = 79; (\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 68^\circ; (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 50^\circ$. Gọi tọa độ điểm $M(a; b; c)$. Giá trị của $a + b + c$ là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần mười).



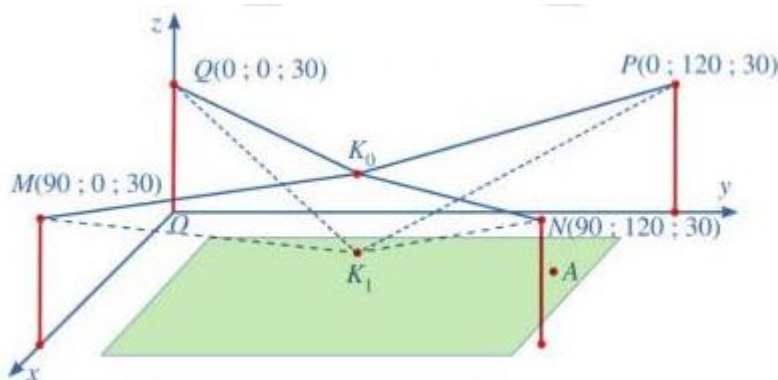
Câu 16: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ như hình bên, với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$.



Câu 17: Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình bên dưới. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$. Tìm tọa độ của điểm M .

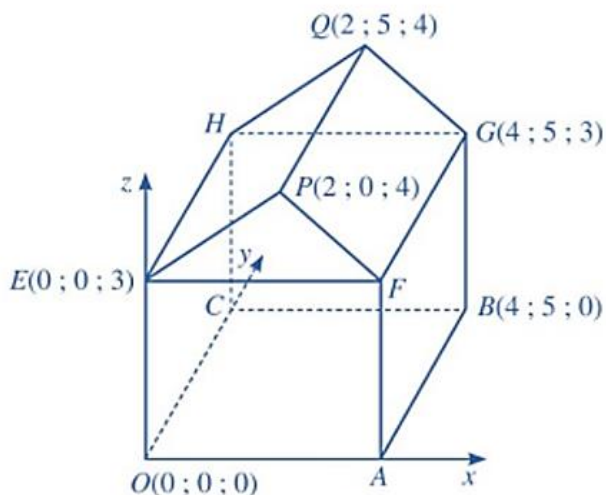


Câu 18: Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (Hình 34). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19 (Nguồn: <https://www.abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI).



Biết rằng vectơ $\overrightarrow{K_0K_1}$ có tọa độ là $(a;b;c)$; $a, b, c \in \mathbb{R}$. Khi đó $a+b+c$ bằng

Câu 19: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



- Tọa độ điểm A là $(4;0;0)$.
- Tọa độ $\overrightarrow{AH} = (4;5;3)$
- $\overrightarrow{FG} = 5\vec{k}$
- Khi $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{QG}$ thì tọa độ điểm T là $T(6;0;-1)$.