

CHUYÊN ĐỀ : QUAN HỆ SONG SONG

I- ĐẠI CƯƠNG ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Bài 1 : Cho hình chóp S.ABCD , đáy là tứ giác lồi ABCD có các cạnh đối không song song với nhau .Gọi M là điểm trên cạnh SA .Tìm giao tuyến các cặp mặt phẳng sau

- a. (SAC) và (SBD) b. (SAD) và (SCD) c. (SBC) và (SAD)
d. (BCM) và (SAD) e. (CDM) và (SAB) f. (BDM) và (SAC)

Bài 2 : Cho tứ diện ABCD . Gọi M,N,P là 3 điểm lần lượt nằm trên ba cạnh AB,CD,AD .Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

- a. (ABN) và (CDM) b. (ABN) và (BCP)

Bài 3 : Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành ABCD tâm O.Gọi E là trung điểm của SC

- a. Tìm giao tuyến của (BED) và (SAC) b. Tìm giao tuyến của (ABE) và (SBD)
b. Tìm giao điểm của SD và (ABE)

Bài 4 : Cho hình chóp S.ABCD và O là giao điểm của AC và BD .Lấy điểm M,N lần lượt thuộc các cạnh SA ,SC .Tìm giao điểm của

- a. Mặt phẳng (BMN) và SO b. Mặt phẳng (BMN) và SD

Bài 5 : Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O , hai điểm M,N lần lượt là trung điểm của SB ,SD . Điểm P thuộc cạnh SC và không là trung điểm của SC

Tìm giao điểm

- a. Mặt phẳng (MNP) và SO b. Mặt phẳng (MNP) và SA
b. Gọi F ,G ,H lần lượt là giao điểm của QM và AB ,QP và AC , QN và AD chứng minh 3 điểm F, G, H thẳng hàng .

Bài 6 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD không là hình thang .Gọi O là giao điểm của AC và BD ,K là một điểm trên cạnh SD

- a. Tìm giao điểm E của mặt phẳng (ABK) và CD
b. Tìm giao điểm F của mặt phẳng (ABK) và SC
c. Chứng minh các đường thẳng AF ,BK và SO đồng quy

Bài 7 : Cho hình chóp S.ABCD có AB và CD không song song . Gọi M là điểm thuộc miền trong của tam giác SCD

- a. Tìm giao điểm của CD và mặt phẳng (MAB)
b. Tìm giao tuyến của (SCD) và (MAB)
c. Tìm giao điểm AM và mặt phẳng (SBD)
d. Tìm giao điểm BM và mặt phẳng (SAC)

Bài 8: Cho hình chóp $S.ABCD$, E là một điểm trên cạnh BC , F là một điểm trên cạnh SD

- Tìm giao điểm K của BF và mặt phẳng (SAC)
- Tìm giao điểm J của EF và mặt phẳng (SAC)
- Chứng minh ba điểm C, K, J thẳng hàng
- Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (BCF)

Bài 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC và BD cắt nhau tại O . Một mặt phẳng cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' . Giả sử AD cắt BC tại E , $A'D'$ cắt $B'C'$ tại E' . Chứng minh rằng

- S, E, E' thẳng hàng
- $A'C', B'D', SO$ đồng quy tại một điểm

Bài 10: Cho tứ diện $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy điểm M , Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho MN không song song AC . Cho điểm O nằm trong tam giác ABC . Tìm giao điểm của mặt phẳng (OMN) với các đường thẳng AC, BC và AB .

Bài 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$. Gọi E và F là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh SB và CD .

- Tìm giao điểm của EF với mặt phẳng (SAC)
- Tìm giao điểm của mặt phẳng (AEF) với các đường thẳng BC và SC

Bài 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P là điểm nằm trên AB, BC, SO . Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP)

Bài 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với đáy lớn AD . Gọi M là một điểm trên cạnh SB . Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AMD) .

Bài 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AD . G là trọng tâm của tam giác SAD . Đường thẳng BN cắt CD tại K .

- Chứng minh ba điểm M, G, K thẳng hàng
- Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MCG)
- Tính tỉ số mà thiết diện chia đoạn SA . Từ đó cho biết thiết diện là hình gì?

Bài 15: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là 2 điểm thuộc miền trong tam giác ABC và BCD . Giả sử MN cắt mặt phẳng (ABC) tại E và cắt mặt phẳng (ACD) tại F .

Hãy xác định hai điểm E và F .

Bài 16: Cho hình chóp $S.ABCD$, K là trung điểm của SA , d là đường thẳng qua C và song song với BD . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (K, d)

Bài 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của BC , N là điểm thuộc cạnh SB , K là điểm trên đoạn AC . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNK) trong các trường hợp.

- K nằm giữa A và O
- K nằm giữa O và C
- K trùng O

II- HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Bài 1 : Cho tứ diện S.ABC . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AB.G là một điểm trên cạnh AC .Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng

- a. (SAC) và (EFC) b. (SAC) và (EFG)

Bài 2 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD .Gọi M và N lần lượt trung điểm SA và SB , P là một điểm trên cạnh BC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

- a. (SBC) và (SAD) b. (SAB) và (SCD) c. (MNP) và (ABCD)

Bài 3 : Cho tứ diện ABCD . Gọi G và J lần lượt là trọng tâm của tam giác BCD và tam giác ACD

- a. CMR $GJ \parallel AB$ b. Tìm giao tuyến của hai mp (ABD) và (GJD)

Bài 4 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD tâm O và I là một điểm trên đoạn SO .

- a. Tìm giao điểm E và F của mặt phẳng (ICD) lần lượt với các đường SA và SB.
CMR $EF \parallel AB$
b. Gọi K là giao điểm của DE và CF . CMR $SK \parallel BC$

Bài 5: Cho tứ diện ABCD . Gọi I và J lần lượt là trung của BC và BD , K thuộc cạnh AD

- a. Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (IJK)
b. Tìm vị trí điểm K trên AD sao cho thiết diện là hình bình hành
c. Tìm điều kiện của tứ diện và vị trí của điểm K trên AD để thiết diện là hình thoi

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình ABCD. Gọi M là trung điểm của SC và N là trọng tâm của tam giác ABC

- a. Tìm giao điểm I của SD và mặt phẳng (AMN)
b. CMR $NI \parallel SB$
c. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (AMN) với mặt phẳng (SAD)

Bài 7 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD với đáy lớn AB. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC , G là trọng tâm của tam giác SAB.

- a. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNG) và mặt phẳng (SAB)
b. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNG) . Tìm mối liên hệ giữa AB và CD để thiết diện là hình bình hành .

Bài 8 : Cho tứ diện ABCD có trọng tâm các mặt đối diện với các đỉnh A , B , C , D lần lượt là A' , B' , C' , D' . Gọi M ,N, P, Q , R ,S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB ,CD , BC , AD , BD ,AC . CMR

- a. CMR AA' , BB' , CC' đồng quy tại G
b. CMR G là trung điểm của các đoạn của các đoạn MN , PQ , RS

Bài 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , G là trọng tâm tam giác ACD

- $CMR \quad OG // (SCB)$
- Tìm giao tuyến của (ACG) và (SBC)

III- ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

Bài 1: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$.

- $CMR \quad OO' // (ADF)$ và $OO' (BCF)$
- Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD và ABF . $CMR \quad GG' // (DCEF)$

Bài 2: Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD . M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. $CMR \quad MG // (ACD)$

Bài 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$, tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SD .

- $CMR \quad MN // (SBC)$, $SB // (OMN)$, $SC // (OMN)$
- Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (OMN) . Thiết diện là hình gì?

Bài 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD , M là một điểm trên đoạn IJ . Gọi (P) là mặt phẳng qua M , song song với AB và CD .

- Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ICD)
- Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) . Thiết diện là hình gì?

Bài 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi M là trung điểm của SB .

- Hãy xác định thiết diện của hình chóp của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) qua M , song song với SO và AD
- Hãy xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (Q) chứa OM và song song với SC

Bài 6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh BC và AD . Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (P) qua MN và song song CD . Hãy xác định vị trí của hai điểm M và N để thiết diện là hình bình hành.

Bài 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi K và J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và SBC

- $CMR \quad KJ // (SAB)$
- Hãy xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) chứa KJ và song song với AD

Bài 8: Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn AB và một điểm S ở ngoài mặt phẳng hình thang. Gọi M là trung điểm của CD . (P) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC

- Hãy tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (P) . Thiết diện này là hình gì?
- Tìm giao tuyến của (P) và (SAD)

IV- HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Bài 1 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD , $AD \parallel BC$. $AD=2BC$.

Gọi E ,F ,I lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AD , SD .

- CMR (EFB) // (SCD) . Từ đó chứng minh $CI \parallel (EFB)$
- Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAD) . Tìm giao điểm K của FI với giao tuyến này .
CMR (SBF)// (KCD)

Bài 2 : Cho hình chóp S.ABCD , đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

- CMR (OMN) // (SBC)
- Giả sử hai tam giác SAD và ABC đều là tam giác cân tại A . Gọi AE và AF lần lượt là các đường phân giác trong tam giác ACD và SAB . Chứng minh $EF \parallel (SAD)$

Bài 3 : Cho hình hộp ABCD .A'B'C'D' có các cạnh AA' , BB' , CC' , DD' song song với nhau

- CMR (BDA') // (B'D'C)
- CMR đường chéo AC' đi qua trọng tâm G và G' lần lượt của tam giác BDA' và B'D'C
- CMR : G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau .

Bài 4 : Cho hình chóp S.ABCD . Gọi M là trung điểm của AD . Gọi (P) và (Q) là mặt phẳng qua điểm M và lần lượt song song với mặt phẳng (SBD) và (SAC)

- Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P)
- Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (Q)
- Gọi H và K lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) với AC và BD

CMR tứ giác OHMK là hình bình hành .

Bài 5 : Cho tứ diện ABCD và M ,N lần lượt là trung điểm của AB ,CD . Mặt phẳng (P) chứa MN cắt các cạnh AD và BC lần lượt tại P và Q .

- Cho trước điểm P hãy nói cách dựng điểm Q
- Gọi K là giao điểm của MN và PQ . CMR $KP=KQ$

Bài 6 : Cho hình chóp cụt ABC.A'B'C' . Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B' và AC

Xác định thiết diện của hình chóp cụt cắt bởi mặt phẳng chứa MP và song song với mặt phẳng (BB'C'C)

Bài 7 : Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC . Ta lấy một điểm S ở ngoài mặt phẳng (P) sao cho $SA=SB=SC$. Chứng minh các đường phân giác ngoài tại S của các tam giác SAB , SBC , SCA cùng nằm trong một mặt phẳng .

Bài 8: Cho hình chóp S.ABC . Gọi I , J , K lần lượt là trọng tâm của các mặt bên SAB , SBC , SAC .

- CMR $(IJK) // (ABC)$
- Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJK)

Bài 9 : Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên các cạnh AB và CD . CMR trung điểm K của MN luôn chạy trên một mặt phẳng cố định.

Bài 10 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .

- CMR $(OMN) // (SBC)$
- Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và ON . CMR $EF // (SBC)$

Bài 11: Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên là AA', BB', CC' . Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$. O là một điểm thuộc miền trong của mặt bên $(BB'C'C)$. Tìm thiết diện của hình chóp cụt và mặt phẳng (OMM') . Thiết diện là hình gì ?

V : BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, đáy lớn là AD . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD, SA

- CMR $MN // (SBC)$, $(MNP) // (SBC)$
- Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với SD . Chứng minh giao điểm I của MP và NQ nằm trên một đường thẳng cố định .

Bài 2 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi $ABCD$ và O là giao điểm hai đường chéo AC và BD , M là trung điểm của SA . Hãy xác định các thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) qua M , song song với SO và BC .

Bài 3 : Cho tứ diện $ABCD$ và (P) là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua các trung điểm I và K lần lượt của các cạnh AB và BC . Các cạnh DA và DC lần lượt cắt (P) tại M và N

- Tứ giác $MNKI$ có tính chất gì ? Tìm vị trí của M, N để tứ giác đó là hình bình hành
- Gọi O là giao điểm của MK và NI . CMR điểm O luôn luôn nằm trên đường thẳng cố định .

Bài 4 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$ và một điểm M di động trên cạnh AD . Một mặt phẳng (P) qua M song song với CD và SA cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q .

- Tứ giác $MNPQ$ là hình gì ? có thể là hình bình hành không ?
- Gọi I là giao điểm của NP và MQ . CMR điểm I luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên AD .

Bài 5 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$ tâm O . Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'

- Tìm giao điểm O' của mặt phẳng (P) và SO

b. CMR
$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2 \frac{SO}{SO'}$$

