

CHUYÊN ĐỀ :

VÉC TƠ

BÀI 1 : TỔNG- HIỆU HAI VÉC TƠ

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC

Tìm hiệu: $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}$

Bài 2. Cho ΔABC đều cạnh a , trực tâm H . Tính độ dài của các vector

$\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB}; \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Tính độ dài của các vector

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a tâm O . Hãy tính: $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|, |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|, |\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. [0H1-1] Cho tam giác ABC , khẳng định nào sau là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Câu 2. [0H1-1] Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

Câu 3. [0H1-2] Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$. C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$

Câu 4. [0H1-2] Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC . Hỏi $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng vec tơ nào?

A. $\overrightarrow{AM}$. B. $\overrightarrow{PB}$. C. $\overrightarrow{AP}$. D. $\overrightarrow{MN}$.

Câu 5. [0H1-1] Cho tam giác ABC . Vector $\overrightarrow{AB}$ được phân tích theo hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng

A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$. C. $-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC}$

Câu 6. [0H1-2] Trong mặt phẳng cho 4 điểm tùy ý A, B, C, D . Tính $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$

A. $\vec{0}$. B. $\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{CA}$. D. 1 .

Câu 7. [0H1-2] Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}$ bằng vec tơ nào sau đây?

A. $\vec{0}$ B. $\overrightarrow{BD}$ C. $\overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{DC}$

Đào Phương Thảo

- Câu 8.** [0H1-2] Cho hình bình hành $ABCD$ với I là giao điểm của 2 đường chéo. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
- A. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
- Câu 9.** [0H1-2] Cho hình bình hành $ABCD$. Vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ bằng vec-tơ:
- A. $\overrightarrow{DB}$. B. $\overrightarrow{BD}$. C. $\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{CA}$.
- Câu 10.** [0H1-1] Cho tam giác ABC , trọng tâm G . Kết luận nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$. B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$. D. Không xác định được $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.
- Câu 11.** [0H1-1] Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây là đúng?
- A. $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.
- Câu 12.** [0H1-1] Cho hai điểm phân biệt A, B . Điều kiện để điểm I là trung điểm AB là
- A. $IA = IB$. B. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. C. $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$. D. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.
- Câu 13.** [0H1-2] Chỉ ra vector tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$ trong các vector sau:
- A. $\overrightarrow{MR}$. B. $\overrightarrow{MQ}$. C. $\overrightarrow{MP}$. D. $\overrightarrow{MN}$.
- Câu 14.** [0H1-3] Cho hình thoi $ABCD$ tâm O , cạnh bằng a và góc A bằng 60° . Kết luận nào sau đây đúng:
- A. $|\overrightarrow{OA}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $|\overrightarrow{OA}| = a$. C. $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$. D. $|\overrightarrow{OA}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 15.** [0H1-2] Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$?
- A. $a\sqrt{2}$ B. $3a$ C. $a\sqrt{2}$ D. $2a$
- Câu 16.** [0H1-2] Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và $AB = 3$, $AC = 4$. Vectơ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$ có độ dài bằng
- A. $\sqrt{13}$ B. $2\sqrt{13}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$
- Câu 17.** [0H1-2] Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$ bằng:
- A. $a\sqrt{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $2a$ D. a
- Câu 18.** [0H1-3] Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng:
- A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $a\sqrt{5}$
- Câu 19.** [0H1-2] Cho hình chữ nhật $ABCD$ biết $AB = 4a$ và $AD = 3a$ thì độ dài $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = ?$

Đào Phương Thảo

- A. $7a$ B. $6a$ C. $2a\sqrt{3}$ D. $5a$
- Câu 20.** [0H1-2] Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng a . Độ dài $\overline{AB} + \overline{BC}$ bằng
- A. a B. $2a$ C. $a\sqrt{3}$ D. $a\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Câu 21.** [0H1-3] Cho tam giác đều ABC có cạnh a . Giá trị $|\overline{AB} - \overline{CA}|$ bằng bao nhiêu?
- A. $2a$ B. a C. $a\sqrt{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
- Câu 22.** [0H1-1] Cho tam giác ABC , trọng tâm là G . Phát biểu nào là đúng?
- A. $\overline{AB} + \overline{BC} = |\overline{AC}|$ B. $|\overline{GA}| + |\overline{GB}| + |\overline{GC}| = 0$
C. $|\overline{AB} + \overline{BC}| = \overline{AC}$ D. $|\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}| = 0$
- Câu 23.** [0H1-2] Cho hình chữ nhật $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD phát biểu nào là đúng?
- A. $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$ B. $\overline{AC} = \overline{BD}$
C. $|\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}| = \vec{0}$ D. $\overline{AC} - \overline{AD} = \overline{AB}$
- Câu 24.** [0H1-2] Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây là đúng?
- A. $\overline{OA} = \overline{CA} + \overline{CO}$ B. $\overline{BC} - \overline{AC} + \overline{AB} = \vec{0}$
C. $\overline{BA} = \overline{OB} - \overline{OA}$ D. $\overline{OA} = \overline{OB} - \overline{BA}$
- Câu 25.** [0H1-2] Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G . Độ dài vector $\overline{AG}$ bằng:
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.
- Câu 26.** [0H1-2] Cho hình chữ nhật $ABCD$. Vector nào dưới đây có độ dài lớn nhất:
- A. $\overline{AB}$. B. $\overline{AD}$. C. $\overline{BC} - \overline{BA}$. D. $\vec{0}$
- Câu 27.** [0H1-2] Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 5, BC = 12$. Độ dài của vector $\overline{AC}$ là:
- A. 4. B. 6. C. 8. D. 13.
- Câu 28.** [0H1-2] Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3cm, BC = 5cm$ cm. Tính $|\overline{AB} + \overline{BC}|$?
- A. $3cm$. B. $4cm$. C. $5cm$. D. $6cm$.
- Câu 29.** [0H1-2] Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3cm, AD = 4cm$. Tính $|\overline{AC}|$?

Đào Phương Thảo

A. 3cm.

B. 4cm.

C. 5cm.

D. 6cm.

Câu 30. [0H1-3] Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC=12$. Tổng hai vectơ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ có độ dài bằng bao nhiêu ?

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. $2\sqrt{3}$

Câu 31. [0H1-3] Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng:

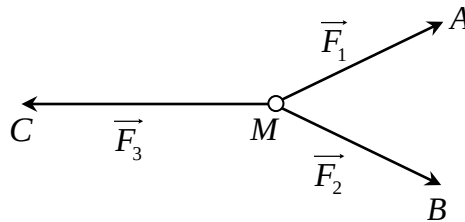
A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $a\sqrt{5}$.

Câu 32. [0H1-3] Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng $50N$ và góc $AMB = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ là



A. $100\sqrt{3}N$.

B. $25\sqrt{3}N$.

C. $50\sqrt{3}N$.

D. $50\sqrt{2}N$.

2.1. Tìm tập hợp điểm thỏa điều kiện cho trước

➤ *Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức véc tơ*

Phương pháp:

- Để xác định một điểm M ta cần phải chỉ rõ vị trí của điểm đó đối với hình vẽ. Thông thường ta biến đổi đẳng thức vectơ đã cho về dạng $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$, trong đó O và $\vec{a}$ đã được xác định. Ta thường sử dụng các tính chất về:

- Điểm chia đoạn thẳng theo tỉ số k .
- Hình bình hành.
- Trung điểm của đoạn thẳng.
- Trọng tâm tam giác, ...

➤ *Tìm tập hợp điểm*

Phương pháp:

- Cho điểm A và một số thực $k > 0$: Tập hợp các điểm M sao cho $MA = k$ là đường tròn tâm A

bán kính $R = k$.

Đào Phương Thảo

- Cho hai điểm A, B . Tập hợp các điểm M sao cho $MA = MB$ là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M sao cho

a) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ b) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}|$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. [0H1-1] Cho hai điểm A, B phân biệt và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** M là trung điểm của đoạn AB . **B.** Với mọi M bất kỳ.
C. Không có M thỏa mãn. **D.** M nằm trên đường tròn đường kính AB .

Câu 2. [0H1-1] Cho hai điểm A, B phân biệt và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** M là trung điểm của đoạn AB . **B.** Với mọi M bất kỳ.
C. Không có M thỏa mãn. **D.** M nằm trên đường tròn đường kính AB .

Câu 3. [0H1-1] Cho hai điểm A, B phân biệt và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** M là trung điểm của đoạn AB . **B.** Với mọi M bất kỳ.
C. Không có M thỏa mãn. **D.** M nằm trên đường tròn đường kính AB .

Câu 4. [0H1-2] Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khi đó điểm M là:

- A.** Đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACMB$.
B. Đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABMC$.
C. Đỉnh thứ tư của hình bình hành $CAMB$.
D. Đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Câu 5. [0H1-2] Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** M là trung điểm BC . **B.** M là trung điểm AB .
C. M là trung điểm AC . **D.** $ABMC$ là hình bình hành.

Câu 6. [0H1-2] Cho vector $\overrightarrow{AB}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

A. 1. **B. 2.** **C. 3.** **D. 4.**

Câu 7. [0H1-2] Cho tam giác ABC và một điểm M thỏa mãn: $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$. Tập hợp điểm M là

A. Đường tròn tâm A , bán kính $R = BC$. **B.** Đường tròn tâm B , bán kính $R = AC$.

C. Đường tròn tâm C , bán kính $R = AB$. **D.** Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Câu 8. [0H1-2] Cho hai điểm cố định A, B và điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$. Tập hợp các điểm M là:

A. Đường tròn đường kính AB . **B.** Trung điểm của đoạn thẳng AB .

C. Đường trung trực đoạn thẳng AB . **D.** Đường tròn tâm A , bán kính AB .

Câu 9. [0H1-2] Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

A. Vô số. **B.** 1 điểm. **C.** 2 điểm. **D.** không có điểm nào.

Câu 10. [0H1-2] Cho $\triangle ABC$. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ thì điểm M là

A. đỉnh thứ tư của hình bình hành nhận AC và BC làm hai cạnh.

B. đỉnh thứ tư của hình bình hành nhận AB và AC làm hai cạnh.

C. đỉnh thứ tư của hình bình hành nhận AB và BC làm hai cạnh.

D. trọng tâm tam giác ABC .

Câu 11. [0H1-2] Nếu $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì khẳng định nào dưới đây đúng?

A. M là đỉnh của hình bình hành $MCBA$

B. M là đỉnh của hình bình hành $MCAB$.

C. M là trọng tâm của tam giác ABC .

D. M là đỉnh của hình bình hành $MACB$

Câu 12. [0H1-2] Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a . Một điểm M di động sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB . Tính độ dài lớn nhất của MH ?

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** a . **D.** $2a$.

Câu 13. [0H1-2] Cho tam giác ABC , có bao nhiêu điểm M thỏa mãn:

$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Bài 2. PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTOR

I – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Cho số $k \neq 0$ và vector $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vector $\vec{a}$ với số k là một vector, kí hiệu $k\vec{a}$.

+) $k > 0$ thì $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$

+) $k < 0$ thì $k\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$

2. Tính chất:

Cho $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì và hai số h, k ta có:

$$\textcircled{1} k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \qquad \textcircled{2} (h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a} \qquad \textcircled{3} h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$$

$$\textcircled{4} 1.\vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}$$

$$\textcircled{5} \text{ Nếu } I \text{ là trung điểm của } AB \text{ thì với mọi điểm } M \text{ ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

$$\textcircled{6} \text{ Nếu } G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \text{ thì với mọi điểm } M \text{ ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

3. Điều kiện để hai vector cùng phương:

$$\text{+) } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \neq \vec{0} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \exists k : \vec{a} = k\vec{b}$$

$$\text{+) Ba điểm phân biệt } A, B, C \text{ thẳng hàng khi và chỉ khi có số } k \neq 0 \text{ để } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$$

II – CÁC DẠNG TOÁN:

3.1 Xác định và tính độ dài tích của một số với một vector

A. Bài tập tự luận

Bài 1. Cho hai điểm phân biệt A, B . Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ cùng hướng và $AM = 3AB$.

Bài 2. Cho tam giác ABC .

a) Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Đào Phương Thảo

Bài 3. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính
a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}|$ b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại B có $A = 30^\circ$, $AB = a$. Gọi I là trung điểm của AC . Hãy tính:
a) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$ b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

B. Câu hỏi trắc nghiệm

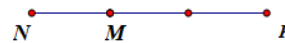
Câu 1. [0H1-1] Khẳng định nào sai ?

- A. $1.\vec{a} = \vec{a}$.
- B. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k > 0$.
- C. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k < 0$.
- D. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi có một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

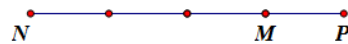
Câu 2. [0H1-1] Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



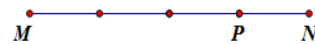
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- A. Hình 3.
- B. Hình 4.
- C. Hình 1.
- D. Hình 2.

Câu 3. [0H1-1] Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây đúng ?

- A. $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$.
- B. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$.
- C. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$.
- D. $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$.

Câu 4. [0H1-1] Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

- A. $AB = AC$.
- B. $\exists k \neq 0: \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
- C. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.
- D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$ điểm M .

Câu 5. [0H1-1] Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a} = m\vec{b}$, biết rằng $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 15$

- A. $m = 3$.
- B. $m = -\frac{1}{3}$.
- C. $m = \frac{1}{3}$.
- D. $m = -3$.

Câu 6. [0H1-2] Cho $\triangle ABC$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Các cặp vector nào sau đây cùng phương ?

Đào Phương Thảo

- A. $2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$. B. $\vec{a} - 2\vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}$. C. $5\vec{a} + \vec{b}, -10\vec{a} - 2\vec{b}$. D. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$.

Câu 7. [0H1-2] Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a . Độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ bằng:

- A. $2a$. B. a . C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8. [0H1-2] Biết rằng hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vec tơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

- A. -7 . B. 7 . C. 5 . D. 6 .

Câu 9. [0H1-2] Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của AB . Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- A. M là trung điểm của BC .
B. M là trung điểm của IC
C. M là trung điểm của IA
D. M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$

Câu 10. [0H1-2] Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm M là:

- A. Trung điểm của AC B. Điểm C
C. Trung điểm của AB D. Trung điểm của AD
AC.

Câu 11. [0H1-3] Cho hình thoi $ABCD$ tâm O , cạnh $2a$. Góc $BAD = 60^\circ$. Tính độ dài vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

- A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 2a\sqrt{3}$ B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{3}$
C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 3a$ D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 3a\sqrt{3}$

Câu 12. [0H1-3] Cho tam giác ABC có điểm O thỏa mãn: $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$.

Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

- A. Tam giác ABC đều B. Tam giác ABC cân tại C
C. Tam giác ABC vuông tại C D. Tam giác ABC cân tại B

Câu 13. [0H1-3] Cho tam giác ABC , có bao nhiêu điểm M thỏa mãn: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 1$

- A. 0 . B. 1 . C. 2 . D. vô số.

Câu 14. [0H1-3] Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng vector $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$. Hãy xác định vị trí của điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.

- A. D là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCD$.
B. D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$
C. D là trọng tâm của tam giác ABC
D. D là trực tâm của tam giác ABC

Đào Phương Thảo

- Câu 15.** [0H1-3] Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM . Đường thẳng BN cắt AC tại P . Khi đó $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của x là:
A. $-\frac{4}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $-\frac{5}{3}$.
- Câu 16.** [0H1-4] Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?
A. $MN \perp AC$ B. $MN // AC$
C. M nằm trên đường thẳng AC D. Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau
- Câu 17.** [0H1-4] Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = a$. Độ dài của véc tơ $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$ là:
A. $\frac{a\sqrt{140}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{321}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{520}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{541}}{4}$.
- Câu 18.** [0H1-4] Cho tam giác ABC và đường thẳng d . Gọi O là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho vector $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.
A. Điểm M là hình chiếu vuông góc của O trên d .
B. Điểm M là hình chiếu vuông góc của A trên d .
C. Điểm M là hình chiếu vuông góc của B trên d .
D. Điểm M là giao điểm của AB và d .
- Câu 19.** [0H1-4] Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I và J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ . Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$. C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$. D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$.
- Câu 20.** [0H1-4] Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Hãy xác định điểm K thỏa mãn: $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$ và điểm D thỏa mãn: $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0}$.
A. K là trung điểm của MN và D là trung điểm của BC .
B. K là trung điểm của BC và D là trung điểm của MN
C. K là trung điểm của MN và D là trung điểm của AB
D. K là trung điểm của MN và D là trung điểm của AC

3.2 Chứng minh đẳng thức vector

Bài tập tự luận.

- Bài 1.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD .
a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$

Đào Phương Thảo

b) Gọi G là trung điểm của EF . Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$

Bài 3. Cho tam giác ABC . Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. [0H1-1] Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Với điểm M bất kỳ, ta luôn có:

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$. B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$. C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$. D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$.

Câu 2. [0H1-1] Cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Với mọi điểm M , ta luôn có:

A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$. B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$.
C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$. D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$.

Câu 3. [0H1-1] Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm, I là trung điểm BC . Đẳng thức nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$. B. $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$. C. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. D. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

Câu 4. [0H1-1] Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$. B. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CN}$. C. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$. D. $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Câu 5. [0H1-1] Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $MA = \frac{1}{5}AB$.

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$. C. $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$. D. $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.

Câu 6. [0H1-2] Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

Câu 7. [0H1-2] Cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **đúng**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. B. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$. C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CG}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Câu 8. [0H1-2] Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$. B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{AB}$.

Đào Phương Thảo

Câu 9. [0H1-2] Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây đúng?

- A. $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$.

Câu 10. [0H1-2] Cho G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Khi đó tổng $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$ bằng:

- A. $\overrightarrow{GG'}$. B. $3\overrightarrow{GG'}$. C. $2\overrightarrow{GG'}$. D. $4\overrightarrow{GG'}$.

Câu 11. [0H1-3] Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$.
C. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$.

Câu 12. [0H1-3] Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$ và điểm O . Gọi M, N lần lượt là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ và $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$. Khi đó:

- A. $\overrightarrow{MN} = 7\vec{a}$. B. $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$. C. $\overrightarrow{MN} = -7\vec{a}$. D. $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$.

Câu 13. [0H1-3] Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Câu 14. [0H1-3] Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ bằng:

- A. $\overrightarrow{MN}$. B. $2\overrightarrow{MN}$. C. $3\overrightarrow{MN}$. D. $-2\overrightarrow{MN}$.

Câu 15. [0H1-3] Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}$. B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.
C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MO}$. D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

Câu 16. [0H1-4] Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O . Gọi H là trực tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OG}$. B. $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. C. $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$. D. $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG}$.

Câu 17. [0H1-4] Cho tứ giác $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , I là điểm trên GC sao cho $IC = 3IG$. Với mọi điểm M ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ bằng:

- A. $2\overrightarrow{MI}$. B. $3\overrightarrow{MI}$. C. $4\overrightarrow{MI}$. D. $5\overrightarrow{MI}$.

Đào Phương Thảo

Câu 18. [0H1-4] Cho tam giác đều ABC có tâm O . Gọi I là một điểm tùy ý bên trong tam giác ABC . Hạ ID, IE, IF tương ứng vuông góc với BC, CA, AB . Giả sử

$$ID + IE + IF = \frac{a}{b} \overline{IO} \text{ (với } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản). Khi đó } a+b \text{ bằng:}$$

- A. 5. B. 4. C. 6. D. 7.

Câu 19. [0H1-4] Cho tam giác ABC biết $AB=8, AC=9, BC=11$. Gọi M là trung điểm BC và N là điểm trên đoạn AC sao cho $AN=x(0 < x < 9)$. Hệ thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overline{MN} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{9}\right) \overline{AC} + \frac{1}{2} \overline{AB}$. B. $\overline{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right) \overline{CA} + \frac{1}{2} \overline{BA}$.

C. $\overline{MN} = \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{2}\right) \overline{AC} - \frac{1}{2} \overline{AB}$. D. $\overline{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right) \overline{AC} - \frac{1}{2} \overline{AB}$.

Câu 20. [0H1-4] Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm và H là điểm đối xứng với B qua G . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\overline{AH} = \frac{2}{3} \overline{AC} - \frac{1}{3} \overline{AB}$. B. $\overline{AH} = \frac{1}{3} \overline{AC} - \frac{1}{3} \overline{AB}$.

C. $\overline{AH} = \frac{2}{3} \overline{AC} + \frac{1}{3} \overline{AB}$. D. $\overline{AH} = \frac{2}{3} \overline{AB} - \frac{1}{3} \overline{AC}$.

3.3 Phân tích 1 vector theo 2 vector không cùng phương, chứng minh thẳng hàng, song song

1. Tính 1 vector theo các vector không cùng phương (biểu diễn vector).

★ Đặt vấn đề. Trong dạng toán này chúng ta giải quyết đòi hỏi " Biểu diễn vector thành tổ hợp vector " dựa vào định lý: "Cho trước 2 vector $\vec{a}, \vec{b}$ $\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \\ a & b \end{pmatrix}$ và không cùng phương. Với mọi vector $\vec{c}$ bao giờ cũng tìm được 1 cặp số thực α, β duy nhất, sao cho: $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ ".

★ Phương pháp giải. Ta có thể chọn 1 trong 2 hướng giải sau:

- ☐ Hướng 1. Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vector cần biểu diễn bằng phương pháp xen điểm, hiệu 2 vector cùng gốc, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...
- ☐ Hướng 2. Từ giả thiết lập được mối quan hệ vector giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức này bằng phương pháp xen điểm, hiệu 2 vector cùng gốc, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...

★ Lưu ý

Đào Phương Thảo

□ Lưu ý 1. Ta dùng xen điểm, hiệu vectơ cùng gốc, ... vào vectơ $\vec{c}$ dựa vào vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

□ Lưu ý 2. Nếu vectơ cần biến đổi (hay tính) có thể biến đổi bằng nhiều cách khác nhau.

Lúc đó ta để ý đến việc cộng (trừ, lập tỉ số,...) về theo vế.

★ Kiến thức nền tảng để làm:

* **Quy tắc 3 điểm** $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$ (phép cộng)

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ (phép trừ)

* **Quy tắc đường chéo hình bình hành**: Nếu ABCD là hình bình hành thì

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$$

* **Tính chất trung điểm**: I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ (M bất kì)

* **Tính chất trọng tâm**: G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG} \text{ (M bất kì)}$$

2. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh: $\vec{AB} = k.\vec{AC}$ (1)

Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

□ Sử dụng các qui tắc biến đổi vectơ.

□ Xác định (tính) vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ thông qua một tổ hợp trung gian.

★ Lưu ý

□ Dựa vào lời bình 3, ta có thể suy luận được phát biểu sau: " Cho ba điểm A, B, C. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là:

$\vec{MC} = a.\vec{MA} + (1-a).\vec{MB}$ với điểm M tùy ý và số thực a bất kỳ". Đặc biệt khi: $0 \leq a \leq 1$ thì C $\in$ AB. Kết quả trên còn được sử

dụng để tìm điều kiện của tham số k (hoặc m) cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

□ Nếu không dễ nhận thấy k trong biểu thức $\vec{AB} = k.\vec{AC}$, ta nên quy đồng

biểu thức phân tích vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ để tìm ra số k .

3. **Để chứng minh $\vec{AB} // \vec{DC}$** ta cần chứng minh $\vec{AB} = k \cdot \vec{DC}$.

II – CÁC DẠNG TOÁN:

3.3.1 **Tính 1 vectơ theo các vectơ không cùng phương** (biểu diễn vectơ).

Bài tập 1. Cho ΔABC , gọi G là trọng tâm của tam giác và B_1 là điểm đối xứng của B qua G . Gọi M là trung điểm của BC . Hãy biểu diễn các vectơ (tính)

a/ $\vec{CB_1}$ và $\vec{AB_1}$ theo $\vec{AB}$, $\vec{AC}$. b/ $\vec{MB_1}$ theo $\vec{AB}$, $\vec{AC}$.

Bài tập 2. Cho ΔABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm ΔABC .

a/ Tính $\vec{AI}$, $\vec{AJ}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

b/ Tính $\vec{AG}$ theo $\vec{AI}$ và $\vec{AJ}$.

Bài tập 3. Cho ΔABC và hai điểm D, E thỏa mãn hệ thức:

$$\vec{DB} = k \cdot \vec{DC}, \vec{EB} = \frac{1}{k} \vec{EC}, (k \neq 1)$$

Biểu diễn các vectơ $\vec{AD}$; $\vec{AE}$; $\vec{DE}$ theo các vectơ $\vec{AB}$; $\vec{AC}$.

3.3.2 **Chứng minh ba điểm thẳng hàng:**

Bài tập 4. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của

AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức: $\vec{OP} = -\frac{1}{3} \vec{OA}$.

a/ Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.

b/ Chứng minh 3 đường AC, BD và MN đồng quy.

Bài tập 5. Cho ΔABC , trọng tâm G . Gọi M, N lần lượt theo thứ

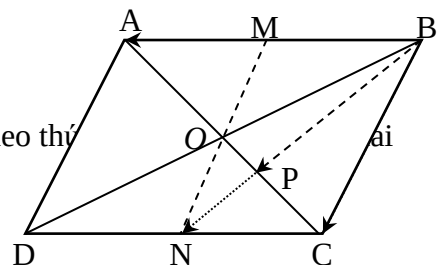
đoạn thẳng AB và BC . Lấy 2 điểm I, J sao cho:

$$2\vec{IA} + 3\vec{IC} = \vec{0}, 2\vec{JA} + 5\vec{JB} + 3\vec{JC} = \vec{0}.$$

Chứng minh rằng: M, N, J thẳng hàng.

Bài tập 6. Cho hình bình hành $ABCD$, có tâm là O và E, F được xác định bởi các hệ thức

$$\vec{AE} = \frac{1}{k} \vec{AB}; \vec{CF} = \frac{1}{k} \vec{CD}, (k \neq 0).$$



Chứng minh rằng $\overrightarrow{OE}$; $\overrightarrow{OF}$ là 2 vectơ đối nhau. Chứng minh O, E, F thẳng hàng và O là trung điểm của EF.

3.3.3 Để chứng minh $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{DC}$ ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{DC}$.

Bài tập 7. Cho hình bình hành ABCD, có tâm là O và E, F được xác định bởi các hệ thức

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{k}\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CF} = \frac{1}{k}\overrightarrow{CD}, \quad (k \neq 0).$$

Chứng minh tứ giác AECF là hình bình hành.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. [0H1-1] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Cho các điểm D,E,F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AI}$ được biểu diễn theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$. B. $\overrightarrow{AI} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. C. $\overrightarrow{AI} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$. D. $\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

Câu 2. [0H1-1] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Cho các điểm D,E,F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AG}$ được biểu diễn theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

Câu 3. [0H1-1] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Cho các điểm D,E,F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{DE}$ được biểu diễn theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{DE} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$. B. $\overrightarrow{DE} = 0\vec{a} - \vec{b}$. C. $\overrightarrow{DE} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$. D. $\overrightarrow{DE} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

Câu 4. [0H1-1] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Cho các điểm D,E,F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{DC}$ được biểu diễn theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{DC} = \vec{a} - \vec{b}$. B. $\overrightarrow{DC} = \vec{a} + \vec{b}$. C. $\overrightarrow{DC} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$. D. $\overrightarrow{DC} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

Câu 5. [0H1-2] Cho $\triangle ABC$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AM}$ được biểu diễn theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$. B. $\overrightarrow{AM} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. C. $\overrightarrow{AM} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$. D. $\overrightarrow{AM} = \frac{-\vec{a} + 3\vec{b}}{2}$

Đào Phương Thảo

- Câu 6.** [0H1-2] Cho $\triangle ABC$. Điểm M nằm trên đoạn BC sao cho $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AM}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là
- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$. B. $\overrightarrow{AM} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. C. $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$. D. $\overrightarrow{AM} = \frac{-\vec{a} + 3\vec{b}}{2}$
- Câu 7.** [0H1-3] Cho $\triangle ABC$ với có hai trung tuyến AK và BM. Đặt $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BM} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AB}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là
- A. $\overrightarrow{AB} = \frac{2\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$. B. $\overrightarrow{AB} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. C. $\overrightarrow{AB} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$. D. $\overrightarrow{AB} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$
- Câu 8.** [0H1-3] Cho $\triangle ABC$ với có hai trung tuyến AK và BM. Đặt $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BM} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{BC}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là
- A. $\overrightarrow{BC} = \frac{2\vec{a} + 4\vec{b}}{3}$. B. $\overrightarrow{BC} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. C. $\overrightarrow{BC} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$. D. $\overrightarrow{BC} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$
- Câu 9.** [0H1-4] Cho $\triangle ABC$ với có hai trung tuyến AK và BM. Đặt $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BM} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{CA}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là
- A. $\overrightarrow{CA} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$. B. $\overrightarrow{CA} = -\frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. C. $\overrightarrow{CA} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$. D. $\overrightarrow{CA} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$
- Câu 10.** [0H1-3] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm đoạn AG. K là điểm trên cạnh AB sao cho $AK = \frac{1}{5}AB$. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AI}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là
- A. $\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$. B. $\overrightarrow{AI} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{6}$. C. $\overrightarrow{AI} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{6}$. D. $\overrightarrow{AI} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{6}$
- Câu 11.** [0H1-3] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm đoạn AG. K là điểm trên cạnh AB sao cho $AK = \frac{1}{5}AB$. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AK}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là
- A. $\overrightarrow{AK} = \frac{-\vec{a} + \vec{b}}{5}$. B. $\overrightarrow{AK} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{5}$. C. $\overrightarrow{AK} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{6}$. D. $\overrightarrow{AK} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$
- Câu 12.** [0H1-3] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm đoạn AG. K là điểm trên cạnh AB sao cho $AK = \frac{1}{5}AB$. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{CI}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là
- A. $\overrightarrow{CI} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$. B. $\overrightarrow{CI} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. C. $\overrightarrow{CI} = \frac{4\vec{a} + \vec{b}}{6}$. D. $\overrightarrow{CI} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$

Đào Phương Thảo

Câu 13. [0H1-3] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AG}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{CK} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{5}$. B. $\overrightarrow{CK} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{6}$. C. $\overrightarrow{CK} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{5}$. D. $\overrightarrow{CK} = \frac{4\vec{a} + \vec{b}}{5}$

Câu 14. [0H1-3] Cho lục giác đều ABCDEF tâm O cạnh a. Phân tích vector $\overrightarrow{AD}$ theo hai vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$

A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AF}$. B. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$. C. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AF}$. D. $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$

Câu 15. [0H1-4] Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm AB. N là điểm trên cạnh AC sao cho NA=2NC. Gọi K là trung điểm MN. Phân tích vector $\overrightarrow{AK}$ theo hai vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Câu 16. [0H1-4] Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm AB. N là điểm trên cạnh AC sao cho NA=2NC. Gọi K là trung điểm MN. Gọi D là trung điểm BC. Phân tích $\overrightarrow{KD}$ theo hai vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

Câu 17. [0H1-3] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Và H là điểm đối xứng của B qua G. Khi đó, $\overrightarrow{AH}$ được biểu diễn theo hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

A. $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
C. $\overrightarrow{AH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Câu 18. [0H1-3] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Và H là điểm đối xứng của B qua G. Khi đó, $\overrightarrow{BH}$ được biểu diễn theo hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

A. $\overrightarrow{BH} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{BH} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{BH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{BH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Câu 19. [0H1-3] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Và H là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm BC. Khi đó, $\overrightarrow{MH}$ được biểu diễn theo hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

A. $\overrightarrow{MH} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{MH} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{MH} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{MH} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

Câu 20. [0H1-3] Cho hình bình hành ABCD, tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Gọi I là trung điểm BO. Khi đó, $\overrightarrow{AI}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{AI} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}$.

B. $\overrightarrow{AI} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

C. $\overrightarrow{AI} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{4}$.

D. $\overrightarrow{AI} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{4}$

Câu 21. [0H1-4] Cho hình bình hành ABCD, tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Gọi G là trọng tâm ΔOCD . Khi đó, $\overrightarrow{BG}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b}$.

B. $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$.

C. $\overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}$.

D. $\overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$

Câu 22. [0H1-2] Cho ΔABC với G là trọng tâm. B_1 là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm BC. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AM}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{2}$

Câu 23. [0H1-2] Cho ΔABC với G là trọng tâm. B_1 là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm BC. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AG}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$.

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$

Câu 24. [0H1-2] Cho ΔABC với G là trọng tâm. B_1 là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm BC. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{BC}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + 2\vec{b}$.

B. $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.

C. $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b}$.

D. $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} - \vec{b}$

Câu 25. [0H1-2] Cho ΔABC với G là trọng tâm. B_1 là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm BC. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{CB_1}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{CB_1} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$.

B. $\overrightarrow{CB_1} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

C. $\overrightarrow{CB_1} = -\frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

D. $\overrightarrow{CB_1} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$

Câu 26. [0H1-2] Cho ΔABC với G là trọng tâm. B_1 là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm BC. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AB_1}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{AB_1} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$.

B. $\overrightarrow{AB_1} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

C. $\overrightarrow{AB_1} = \frac{-\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$.

D. $\overrightarrow{AB_1} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$

Câu 27. [0H1-2] Cho ΔABC với G là trọng tâm. B_1 là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm BC. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{MB_1}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

Đào Phương Thảo

A. $\overrightarrow{MB_1} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$. B. $\overrightarrow{MB_1} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. C. $\overrightarrow{MB_1} = \frac{-5\vec{a} + \vec{b}}{6}$. D. $\overrightarrow{MB_1} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$

Câu 28. [0H1-4] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Gọi I là điểm trên đoạn BC sao cho $2CI=3BI$ và J thuộc đoạn BC kéo dài sao cho $5JB=2JC$. Đặt $\overrightarrow{AI} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AJ} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AB}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$. B. $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$. C. $\overrightarrow{AB} = \frac{5\vec{a} + 3\vec{b}}{3}$. D. $\overrightarrow{AB} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{4}$

Câu 29. [0H1-4] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Gọi I là điểm trên đoạn BC sao cho $2CI=3BI$ và J thuộc đoạn BC kéo dài sao cho $5JB=2JC$. Đặt $\overrightarrow{AI} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AJ} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AC}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{8}\vec{a} + \frac{9}{8}\vec{b}$. B. $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{8}\vec{a} - \frac{9}{8}\vec{b}$. C. $\overrightarrow{AC} = -\frac{5}{8}\vec{a} - \frac{9}{8}\vec{b}$. D. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{8}\vec{a} - \frac{9}{8}\vec{b}$

Câu 30. [0H1-4] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Gọi I là điểm trên đoạn BC sao cho $2CI=3BI$ và J thuộc đoạn BC kéo dài sao cho $5JB=2JC$. Đặt $\overrightarrow{AI} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AJ} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{AG}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{8}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{5\vec{a} - \vec{b}}{8}$. C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{8}$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$

Câu 31. [0H1-4] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. I là điểm trên cạnh AC sao cho $CI = \frac{1}{4}AC$,

J mà $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Khi đó, $\overrightarrow{BI}$ được biểu diễn theo hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ là

A. $\overrightarrow{BI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Câu 32. [0H1-4] Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. I là điểm trên cạnh AC sao cho $CI = \frac{1}{4}AC$,

J mà $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Khi đó câu nào sau đây là đúng :

A. $\overrightarrow{BI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. B. C, A, J thẳng hàng. C. B, I, J thẳng hàng. D. B, I, C thẳng hàng

Câu 33. [0H1-3] Cho $\triangle ABC$ với AM là trung tuyến. Gọi I là trung điểm AM và K là 1 điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{BK}$ được biểu diễn theo hai vector $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ là

A. $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$. B. $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{BC})$.

C. $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC})$.

D. $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$

Câu 34. [0H1-3] Cho $\triangle ABC$ với AM là trung tuyến. Gọi I là trung điểm AM và K là 1 điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, $\overrightarrow{BI}$ được biểu diễn theo hai vector $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ là

A. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

B. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}(3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

C. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}(3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

D. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$

Câu 35. [0H1-4] Cho $\triangle ABC$ với AM là trung tuyến. Gọi I là trung điểm AM và K là 1 điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó,, câu nào SAI?

A. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC})$.

B. B,I,K thẳng hàng.

C. $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

D. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$

Câu 36. [0H1-4] Cho $\triangle ABC$. Gọi I là trung điểm BC ; D và E là hai điểm sao cho : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$. Khi đó, câu nào SAI?

A. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC})$.

B. ba điểm A, I, S thẳng hàng.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

D. $\overrightarrow{AS} = 4\overrightarrow{AI}$

Câu 37. [0H1-3] Cho $\triangle ABC$. $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. P là điểm đối xứng với B qua C. Khi đó, $\overrightarrow{AP}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

A. $\overrightarrow{AP} = \vec{u} + 2\vec{v}$.

B. $\overrightarrow{AP} = -\vec{u} - 2\vec{v}$.

C. $\overrightarrow{AP} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

D. $\overrightarrow{AP} = -\vec{u} + 2\vec{v}$

Câu 38. [0H1-3] Cho $\triangle ABC$. $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. P là điểm đối xứng với B qua C. Gọi Q, R là hai điểm thỏa : $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Khi đó, $\overrightarrow{RP}$ được biểu diễn theo hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

A. $\overrightarrow{RP} = 3\left(-\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$.

B. $\overrightarrow{RP} = 5\left(-\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$.

C. $\overrightarrow{RP} = 4\left(-\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$.

D. $\overrightarrow{RP} = 4\left(-\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$

Đào Phương Thảo

Câu 39. [0H1-3] Cho $\triangle ABC$. $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. P là điểm đối xứng với B qua C. Gọi Q, R là hai điểm thỏa: $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Khi đó, $\overrightarrow{RQ}$ được biểu diễn theo hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

A. $\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$. B. $\overrightarrow{RQ} = -\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$.

C. $\overrightarrow{RQ} = -\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$. D. $\overrightarrow{RQ} = -\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

Câu 40. [0H1-3] Cho $\triangle ABC$. $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. P là điểm đối xứng với B qua C. Gọi Q, R là hai điểm thỏa: $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Khi đó, câu nào sau đây đúng:

A. $\overrightarrow{RP} = 3\left(-\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$.

B. C, Q, R thẳng hàng.

C. $\overrightarrow{RP} = 4\left(-\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$.

D. P, Q, R thẳng hàng.

MỘT SỐ BÀI TẬP TƯ LUẬN CÓ ĐÁP ÁN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có M, D lần lượt là trung điểm của AB, BC và N là điểm trên cạnh AC sao cho

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Gọi K là trung điểm của MN. Hãy tính các vectơ $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{KD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

HD: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$. Trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm D và E sao cho

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của DE và BC. Hãy tính vectơ $\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

HD: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$.

Bài 3. Cho 4 điểm A, B, C, D thỏa: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$. Chứng minh: B, C, D thẳng hàng.

HD: Tính $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Đào Phương Thảo

Bài 4. Cho ΔABC , lấy điểm M, N, P sao cho $\vec{MB} = 3\vec{MC}$; $\vec{NA} + 3\vec{NC} = \vec{0}$; $\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{0}$.

a/ Tính $\vec{PM}$; $\vec{PN}$ theo $\vec{AB}$; $\vec{AC}$.

b/ Chứng minh ba điểm: M, N, P thẳng hàng.

Bài 5. Cho ΔABC có hai đường trung tuyến BN, CP . Hãy biểu thị các vectơ $\vec{AB}$; $\vec{BC}$; $\vec{CA}$ theo các vectơ $\vec{BN}$; $\vec{CP}$.

$$\text{HD: } \vec{BC} = -\frac{2}{3}\vec{CP} + \frac{2}{3}\vec{BN}; \quad \vec{CA} = \frac{2}{3}\vec{BN} + \frac{4}{3}\vec{CP}; \quad \vec{AB} = \frac{4}{3}\vec{BN} + \frac{2}{3}\vec{CP}.$$

Bài 6. Cho ΔABC . Gọi I, J nằm trên cạnh BC và BC kéo dài sao cho $2CI = 3BI$, $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác.

a/ Tính $\vec{AI}$; $\vec{AJ}$ theo $\vec{AB}$; $\vec{AC}$. b/ Tính $\vec{AG}$ theo $\vec{AB}$; $\vec{AC}$.

$$\text{HD: } \vec{AI} = \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}; \quad \vec{AJ} = \frac{5}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}.$$

Bài 7. Cho ΔABC có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G . M là trung điểm của BC . Hãy tính $\vec{AI}$; $\vec{CI}$; $\vec{MI}$ theo $\vec{AB}$; $\vec{AC}$.

$$\text{HD: } \vec{AI} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}; \quad \vec{CI} = -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}; \quad \vec{MI} = -\frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}.$$

Bài 8. Cho ΔABC có trọng tâm là G và các đường trung tuyến AM, BP . Gọi G' là điểm đối xứng với điểm G qua P .

a/ Hãy biểu diễn các vectơ $\vec{AG'}$; $\vec{CG'}$ theo $\vec{AB}$; $\vec{AC}$.

b/ Chứng minh hệ thức: $5\vec{AC} - 6\vec{AB} = 6\vec{MG'}$.

$$\text{HD: } \vec{AG'} = \frac{2}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB}; \quad \vec{CG'} = -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}. \text{ Tính } \vec{MG'} \text{ theo } \vec{AB}; \vec{AC}.$$

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CD .

Hãy biểu diễn các vectơ $\vec{BC}$; $\vec{CD}$ theo các vectơ $\vec{AM}$; $\vec{AN}$.

$$\text{HD: } \vec{BC} = -\frac{2}{3}\vec{AM} + \frac{4}{3}\vec{AN}; \quad \vec{CD} = -\frac{4}{3}\vec{AM} + \frac{2}{3}\vec{AN}.$$

Đào Phương Thảo

Bài 10. Cho tứ giác ABCD có M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, BC. Hãy biểu diễn vectơ MN theo AB ; DC và theo AC ; DB .

$$\text{HD: } \vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{DC} \text{ và } \vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{DB}.$$

Bài 11. Cho ΔABC . Gọi I là điểm đối xứng của trọng tâm G qua. B.

a/ Chứng minh: $\vec{IA} - 5\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

b/ Đặt $AG = a$; $AI = b$. Tính AB ; AC theo a ; b .

$$\text{HD: } AB = \frac{1}{2}(a + b) \text{ và } AC = \frac{5}{2}a - \frac{1}{2}b.$$

Bài 12. Cho ΔABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính các vectơ AB, BC, CA

theo các vectơ BN, CP .

Bài 13. Cho ΔABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$.

a/ Tính AI theo AB ; AC .

b/ Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC$ và $KB = 3KA$. Tính JK theo AB ; AC .

c/ Tính BC theo AI và JK .

Bài 14. Cho hình bình hành ABCD có tâm là O. Hãy tính các vectơ sau theo vectơ AB và AD .

a/ AI với I là trung điểm của BO . b/ BG với G là trọng tâm ΔOCD .

Bài 15. Cho lục giác đều ABCDEF. Hãy biểu diễn các vectơ AC ; AD ; AF ; EF theo các vectơ

$$\vec{v} = \vec{AB} ; \vec{u} = \vec{AE}.$$

Bài 16. Cho ΔABC và điểm D thỏa hệ thức $3\vec{DB} - 2\vec{DC} = \vec{0}$.

a/ Hãy biểu diễn vectơ AD theo các vectơ AB ; AC rồi nêu cách dựng.

b/ Xác định điểm E thỏa mãn hệ thức $\vec{EA} + 3\vec{EB} - 2\vec{AC} = \vec{0}$.

$$\text{HD: } \vec{AD} = 3\vec{AB} - 2\vec{AC}, \text{ E nằm trên đường thẳng BC và có } \vec{EM} = \vec{BC}.$$

Đào Phương Thảo

Bài 17. Cho ΔABC . Các điểm D, E, G được xác định bởi hệ thức: $2\vec{AD} = \vec{AB}$, $\vec{AE} = 2\vec{CE}$, $2\vec{GD} = \vec{GC}$.

a/ Chứng minh $BE \parallel CD$.

b/ Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh: A, G, M thẳng hàng.

HD: a/ Tính $\vec{BE}$; $\vec{CD}$ theo $\vec{BA}$, $\vec{AC}$ b/ $\vec{GA} = \frac{2}{3}\vec{MA}$.

Bài 18. Cho hình bình hành ABCD và 2 điểm E, F thỏa các hệ thức: $2\vec{CE} + \vec{EB} = \vec{0}$, $3\vec{DF} + \vec{BD} = \vec{0}$.

a/ Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng.

b/ Xác định vị trí điểm M để hệ thức sau được thỏa mãn: $2\vec{AM} - 3\vec{AF} = \vec{0}$.

Bài 19. Cho ΔABC . Gọi M là trung điểm của cạnh BC và P, Q là hai điểm được xác định bởi hệ thức: $\vec{BP} = \vec{BC} - 2\vec{AB}$, $\vec{CQ} = k.\vec{AC} - \vec{BC}$, trong đó k là một số thực.

a/ Biểu diễn các vectơ $\vec{AP}$, $\vec{AQ}$ theo các vectơ $\vec{AB}$; $\vec{AC}$.

b/ Xác định giá trị của k để A, P, Q thẳng hàng.

c/ Tính giá trị của k để đường thẳng PQ đi qua điểm M.

HD: $\vec{AP} = -2\vec{AB} + \vec{AC}$, $\vec{AQ} = k.\vec{AC} + \vec{AB}$, $k = -\frac{1}{2}$, $k = \frac{2}{5}$.

Bài 20. Cho ΔABC .

a/ Dựng các điểm E, F, G thỏa các hệ thức:

$\vec{BE} = -3\vec{AB}$, $\vec{BF} = 3\vec{AC}$, $\vec{BG} = \vec{BE} + \vec{BF}$.

b/ Chứng minh điểm G nằm trên đường thẳng BC.

HD: $\vec{BG} = 3\vec{BC}$ $\Rightarrow$ B, G, C thẳng hàng.

Bài 21. Cho ΔABC .

a/ Dựng các điểm E, F, M, N sao cho các đẳng thức sau được thỏa: $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$,

$\vec{BF} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{EM} = 2\vec{BC}$, $\vec{FN} = 4\vec{BC}$.

b/ Các điểm A, M, N có thẳng hàng không? Tại sao?

HD: $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AN}$ $\Rightarrow$ thẳng hàng.

Đào Phương Thảo

Bài 22. Cho $\triangle ABC$ và hai điểm I, F được xác định bởi: $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FB} + 3\overrightarrow{FC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng ba điểm I, F, B thẳng hàng.

HD: $\overrightarrow{FB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{FI} \text{ ® I, F, B thẳng hàng.}$

Bài 23. Cho $\triangle ABC$.

a/ Đặt các điểm E và D sao cho: $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, $5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

b/ Chứng minh các điểm A, D, E thẳng hàng.

HD: $5\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \text{ ® A, D, E thẳng hàng.}$

Bài 24. Cho $\triangle EDF$.

a/ Đặt điểm H sao cho $\overrightarrow{EH} = 4\overrightarrow{ED} - 3\overrightarrow{EF}$.

b/ Chứng minh điểm H nằm trên DF.

HD: $\overrightarrow{DH} = 3\overrightarrow{FD} \text{ ® D, H, F thẳng hàng ® H nằm trên DF hay H } \in \text{DF.}$

Bài 25. Cho $\triangle ABC$ có I là trung điểm của trung tuyến AM và D là điểm thỏa hệ thức:

$3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

a/ Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$.

b/ Chứng minh ba điểm B, I, D thẳng hàng.

HD: $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} \text{ ® B, I, D thẳng hàng.}$

Bài 26. Cho hình bình hành ABCD.

a/ Đặt các điểm E, F sao cho: $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.

b/ Đặt điểm G sao cho tứ giác AEGF là hình bình hành.

c/ Chứng tỏ 3 điểm A, C, G thẳng hàng.

HD: $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AC} \text{ ® A, C, G thẳng hàng.}$

Bài 27. Cho hình bình hành ABCD. Gọi I là trung điểm của AB và I là điểm thỏa hệ thức:

$3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID}$. Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

HD: $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AE} \text{ ® A, C, E thẳng hàng.}$

Bài 28. Cho $\triangle ABC$.

a/ Đặt các điểm K, L sao cho: $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$.

b/ Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

HD: Biểu diễn $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ rồi so sánh.

Đào Phương Thảo

Bài 29. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, N và P là hai điểm thỏa mãn hệ thức:
 $NA + 2NC = 0, PB - 2PC = 0$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

HD: Tính MN, MP theo AB; AC rồi so sánh.

Bài 30. Cho $\triangle ABC$. Hai điểm M, N được xác định bởi: $3MA + 4MB = 0, NB - 3NC = 0$.
Chứng minh MN đi qua trọng tâm $\triangle ABC$.

HD: Tính GM, GN @ GM = - $\frac{2}{7}$ GN @ G, M, N thẳng hàng @ đpcm.

Bài 31. Cho $\triangle ABC$.

a/ Dựng các điểm D, E thỏa các hệ thức: $AD = \frac{3}{2}AB, DE = \frac{3}{2}BC$.

b/ Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

HD: $AE = \frac{3}{2}AC$ @ A, C, E thẳng hàng.

Bài 32. Cho hình bình hành ABCD. Gọi I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm xác định bởi
 $AE = \frac{2}{3}AC$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

HD: Tính DE và DI theo DA, DC.

Bài 33. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AD và M là trung điểm AD. Điểm N được lấy trên AC sao
cho $3AN = AC$. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

HD: Tính BM và BN theo AB; AC rồi so sánh.

Bài 34. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm BC và O là trung điểm của AM. Trên BC lấy điểm I sao
cho $AI = \frac{2}{3}AB, AJ = \frac{2}{5}AC$. Chứng minh ba điểm I, J, O thẳng hàng.

HD: Tính IJ, IO theo AB; AC rồi so sánh.

Bài 35. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N là hai điểm di động trên AB, CD sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC}$ và
I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC.

a/ Tính IJ theo AB và DC.

b/ Chứng minh trung điểm P của MN nằm trên đường thẳng IJ.

Bài 36. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P là các điểm thỏa: $MA = -MB, BC = 3BN, 4AP = 3AC$.

Đào Phương Thảo

a/ Tính $\overline{AN}$, $\overline{MP}$ theo $\overline{AB}$ và $\overline{DC}$.

b/ Chứng minh rằng M, I, P thẳng hàng với điểm I thỏa: $16\overline{AI} = 9\overline{AN}$.

Bài 37. Cho $\triangle ABC$ với I, J, K được xác định bởi: $\overline{IB} = m.\overline{IC}$, $\overline{JC} = n.\overline{JA}$, $\overline{KA} = p.\overline{KB}$.

a/ Tính $\overline{IJ}$ và $\overline{IK}$ theo m, n, p , $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$.

b/ Tìm mối liên hệ giữa m, n, p để I, J, K thẳng hàng.

Bài 38. Cho tứ giác $ABCD$ với I, J là trung điểm của $\overline{AB}$ và $\overline{CD}$. Gọi điểm M, N thỏa mãn các hệ thức: $\overline{MA} + k.\overline{MC} = \vec{0}$, $\overline{NB} + k.\overline{ND} = \vec{0}$ ($k \neq -1$) và O là trung điểm của $\overline{MN}$.

a/ Chứng minh O, I, J thẳng hàng

b/ Chứng minh O cũng là trung điểm của $\overline{RS}$ với R và S được xác định bởi các hệ thức:

$$\overline{RA} = -\overline{RD}, \overline{SB} = -\overline{SC}.$$

Bài 39. Cho $\triangle ABC$ có J chia $\overline{BC}$ theo tỉ số bằng -3 , N chia $\overline{AC}$ theo tỉ số bằng -1 , K chia $\overline{BA}$ theo tỉ số bằng 3 .

a/ Chứng minh rằng: K, N, J thẳng hàng.

b/ Tính tỉ số $\frac{\overline{IB}}{\overline{IN}}$, $\frac{\overline{AJ}}{\overline{AI}}$ với $I = \overline{AJ} \cap \overline{BN}$.

Bài 40. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . M, N trên cạnh $\overline{AB}, \overline{CD}$ thỏa $3\overline{AM} = \overline{AB}$, $2\overline{CN} = \overline{CD}$.

a/ Tính $\overline{AN}$ theo $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$.

b/ Gọi G là trọng tâm $\triangle BMN$. Chứng minh rằng $\overline{AG} = -\frac{11}{8}\overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{BC}$.

c/ Gọi I thỏa mãn đẳng thức $11\overline{BI} = 6\overline{BC}$. Chứng minh rằng A, I, G thẳng hàng.

d/ Tìm điểm M thỏa: $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \vec{0}$.

Bài 41. Cho $\triangle ABC$. Lấy điểm I thỏa $3\overline{AI} = \overline{AB}$, $4\overline{AJ} = 3\overline{AC}$ và M là giao điểm của đường thẳng $\overline{IJ}$ và $\overline{BC}$. Đặt $\overline{BM} = m.\overline{MC}$.

a/ Chứng minh rằng: $12\overline{IJ} = 9\overline{BC} - 6\overline{BA}$.

b/ Tính $\overline{IM}$ theo $\overline{BA}$, $\overline{BC}$.

c/ Tìm giá trị m ?

Bài 42. Cho $\triangle ABC$. Gọi P, Q, R lần lượt là các điểm thỏa các đẳng thức: $3\overline{PB} + 4\overline{PC} = \vec{0}$, $\overline{AQ} = 2\overline{QC}$, $k.\overline{RA} = \overline{RB}$ với ($k \neq 1$).

Đào Phương Thảo

a/ Chứng minh rằng: $\overrightarrow{2PQ} = \overrightarrow{2BC} + \overrightarrow{7BA}$.

b/ Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RP} = \frac{k}{1-k} \overrightarrow{BA} + \frac{4}{7} \overrightarrow{BC}$.

c/ Tìm k sao cho P, Q, R thẳng hàng.

Bài 43. Cho hình bình hành ABCD.

a/ Gọi I, F, K lần lượt là các điểm thỏa các hệ thức $\overrightarrow{AI} = a \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = b \cdot \overrightarrow{AC}$,
 $\overrightarrow{AK} = g \cdot \overrightarrow{AD}$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để I, F, K thẳng hàng là

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{g} \quad (a, b, g \neq 0).$$

b/ Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên đoạn AB và CD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$, $\frac{CN}{CD} = \frac{1}{2}$. Gọi

G là trọng tâm của $\triangle BMN$. Tính AN, AG theo AB và AC. Gọi H là điểm xác định bởi

$\overrightarrow{BH} = k \cdot \overrightarrow{BC}$. Tính AH theo AB, AC và k. Tìm k để đường thẳng AH qua điểm G.

Bài 44. Cho tứ giác ABCD. Lấy các điểm M, N theo thứ tự thuộc AB và CD sao cho

$$\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{DN} = k \cdot \overrightarrow{DC}.$$

a/ Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = (1-k) \overrightarrow{AD} + k \cdot \overrightarrow{BC}$.

b/ Gọi E, F, I lần lượt theo thứ tự thuộc các AD, BC và MN sao cho $\overrightarrow{AE} = l \cdot \overrightarrow{AD}$,

$$\overrightarrow{BF} = l \cdot \overrightarrow{BC}$$

và $\overrightarrow{MI} = l \cdot \overrightarrow{MN}$. Chứng minh rằng: E, F, I thẳng hàng.

Bài 45. Cho $\triangle ABC$. Gọi O, G, H lần lượt theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm

của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: O, H, G thẳng hàng.

Bài 46. Cho hình thang ABCD, đáy AB. Gọi M, N theo thứ tự là các trung điểm của AD, BC.

a/ Chứng minh: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

b/ Chứng minh: $MN \parallel DC$.

$$\text{HD: b/ Vì } AB \parallel DC \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{k}{2} \overrightarrow{DC}.$$

Bài 47. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và I là điểm thỏa mãn hệ thức $4\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh: $MP \parallel BG$.

Đào Phương Thảo

HD: Hãy chứng minh $\vec{MI} = \frac{3}{4}\vec{MG}$.

Bài 48. Cho tứ giác ABCD. Gọi E và F lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABD$ và BCD.

Chứng minh: $EF \parallel AC$.

HD: Gọi I là trung điểm BD, hãy chứng minh $\vec{EF} = \frac{1}{3}\vec{CA}$.

Bài 49. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của cạnh BC. Các điểm D, E thỏa mãn các đẳng thức

$\vec{BD} = 4\vec{BA}$, $\vec{AE} = 3\vec{AC}$. Chứng minh: $DE \parallel AM$.

HD: Hãy chứng minh $\vec{AM} = \frac{1}{6}\vec{DE}$.

$$\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB}, \quad \vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AC}$$

Bài 50. Cho $\triangle ABC$. Dựng các điểm M, N sao cho:

Chứng minh: $MN \parallel BC$.

HD: Hãy chứng minh $\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{BC}$.

Bài 51. Cho $\triangle ABC$. Dựng các điểm I, J sao cho: $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{AJ} = \frac{1}{3}\vec{AC}$. Chứng minh: $IC \parallel BJ$.

HD: Hãy chứng minh $\vec{CI} = -\frac{1}{3}\vec{BJ}$.

Bài 52. Cho hình bình hành ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Dựng các điểm

E, F thỏa mãn: $\vec{DE} = \frac{1}{4}\vec{DI}$, $\vec{BF} = \frac{1}{4}\vec{BJ}$. Chứng minh: $EF \parallel CE$.

HD: Hãy chứng minh $\begin{cases} \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} \\ \vec{CE} = \vec{CD} + \vec{DE} \end{cases} \Rightarrow \vec{AF} = -\vec{CE}$.

Bài 53. Cho tứ giác ABCD. Qua đỉnh A kẻ đường thẳng song song với cạnh BC, đường này cắt đường chéo BD tại điểm E. Đường thẳng qua B song song với cạnh AD, cắt đường chéo AC tại điểm

F. Chứng minh rằng: $EF \parallel CD$.

HD: Hai vectơ $\vec{OC}, \vec{OA}$ $\vec{OC} = m\vec{OA}$.

Tương tự $\vec{OD} = n\vec{OB}$ $\vec{DC} = (\vec{OC} - \vec{OD}) = m\vec{OA} - n\vec{OB}$.

Đào Phương Thảo

Vì $AE \parallel BC$ nên $\frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OA} = m$ và $OE = \frac{1}{m}OB$, tương tự: $OF = \frac{1}{n}OA$.

Ta có: $FE = OE - OF = \frac{1}{m}OB - \frac{1}{n}OA = \frac{1}{m+n} \left(nOB - mOA \right)$.

Đặt $FE = -\frac{1}{m \cdot n} \left(mOA - nOB \right)$ và $FE = -\frac{1}{m \cdot n}DC$ và $FE \parallel DC$.

Bài 54. Cho $\triangle ABC$. Các điểm D, E, G được xác định bởi hệ thức: $2AD = AB$, $AE = 2CE$,

$$2GD = GC.$$

a/ Chứng minh $BE \parallel CD$.

b/ Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh: A, G, M thẳng hàng.

Bài 55. Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của cạnh AB và D, E, F theo thứ tự được xác định bởi các hệ thức: $3DB - 2DC = 0$; $EA + 3EB - 2EC = 0$; $5AF - 2AC = 0$.

a/ Chứng minh rằng: $EM \parallel BC$.

b/ Chứng minh rằng: ba điểm A, D, E thẳng hàng.

c/ Chứng minh rằng: ba đường thẳng AD, BC, MF đồng qui tại một điểm.