

SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa 1.

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên K . Ta nói:

+ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến** (tăng) trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

+ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K gọi chung là **đơn điệu** trên K .

2. Nhận xét.

a. Nhận xét 1.

Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f(x) + g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên D . Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x) - g(x)$.

b. Nhận xét 2.

Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên D thì hàm số $f(x) \cdot g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên D . Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x), g(x)$ không là các hàm số dương trên D .

c. Nhận xét 3.

Cho hàm số $u = u(x)$, xác định với $x \in (a; b)$ và $u(x) \in (c; d)$. Hàm số $f[u(x)]$ cũng xác định với $x \in (a; b)$. Ta có nhận xét sau:

i. Giả sử hàm số $u = u(x)$ đồng biến với $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ đồng biến với $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$ đồng biến với $u \in (c; d)$.

ii. Giả sử hàm số $u = u(x)$ nghịch biến với $x \in (a; b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ nghịch biến với $x \in (a; b) \Leftrightarrow f(u)$ nghịch biến với $u \in (c; d)$.

3. Định lý 1.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

a) Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

b) Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

4. Định lý 2.

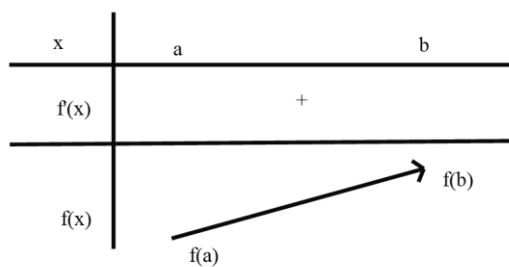
Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

a) Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K .

b) Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K .

c) Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số f không đổi trên K .

Chú ý: Khoảng K trong định lý trên ta có thể thay thế bởi đoạn hoặc một nửa khoảng. Khi đó phải có thêm giả thuyết “Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”. Chẳng hạn:



Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số f đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

Ta thường biểu diễn qua bảng biến thiên như sau:

5. Định lý 3.(mở rộng của định lý 2)

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K . Khi đó:

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f nghịch biến trên K .

Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên K

- Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K .

Chú ý:

***) Riêng hàm số:** $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Có TXĐ là tập D . Điều kiện như sau:

+) Để hàm số đồng biến trên TXĐ thì $y' > 0 \forall x \in D$

+) Để hàm số nghịch biến trên TXĐ thì $y' < 0 \forall x \in D$

+) Để hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì $\begin{cases} y' > 0 \forall x \in (a, b) \\ x \neq -\frac{d}{c} \end{cases}$

+) Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ thì $\begin{cases} y' < 0 \forall x \in (a, b) \\ x \neq -\frac{d}{c} \end{cases}$

Giả sử $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số đồng biến trên $\square$

$$\Leftrightarrow f'(x) \geq 0; \forall x \in \square \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

Hàm số nghịch biến trên $\square$

$$\Leftrightarrow f'(x) \leq 0; \forall x \in \square \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Trường hợp 2 thì hệ số c khác 0 vì khi $a = b = c = 0$ thì $f(x) = d$

(Đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox thì không đơn điệu)

* Với dạng toán tìm tham số m để hàm số bậc ba đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài bằng l ta giải như sau:

Bước 1: Tính $y' = f'(x; m) = ax^2 + bx + c$.

Bước 2: Hàm số đơn điệu trên $(x_1; x_2) \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Bước 3: Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng l

$$\Leftrightarrow |x_1 - x_2| = l \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = l^2 \Leftrightarrow S^2 - 4P = l^2 \quad (**)$$

Bước 4: Giải (*) và giao với (**) để suy ra giá trị m cần tìm.