



CHUYÊN ĐỀ : PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A

Lý thuyết

1. Khái niệm phương trình tương đương



Định nghĩa:

- Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.
- Nếu phương trình $f(x)=0$ tương đương với phương trình $g(x)=0$ thì ta viết:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0$$

Chú ý

- Để giải phương trình, ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương.
- Ta có một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng sau:
 - (1) **Cộng** hoặc **trừ** hai vế của phương trình với cùng 1 số hoặc cùng 1 biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.
 - (2) **Nhân** hoặc **chia** hai vế của phương trình với cùng 1 số khác 0 hoặc cùng 1 biểu thức luôn có giá trị khác 0 mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.
- Để chỉ sự tương đương của các phương trình, người ta dùng kí hiệu " $\Leftrightarrow$ ".

2. Phương trình $\sin x = a$



Xét phương trình $\sin x = a$ (1)

- Nếu $|a| > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $|a| \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm
$$\begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$



Chú ý

- » $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$
- » Trường hợp đặc biệt:
- (1) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 - (2) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 - (3) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- » Phương trình $\sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

3. Phương trình $\cos x = a$



Xét phương trình $\cos x = a$ (1)

- Nếu $|a| > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $|a| \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý

- » $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$
- » Trường hợp đặc biệt:
- (1) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 - (2) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 - (3) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- » Phương trình $\cos x = \cos \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

4. Phương trình $\tan x = a$ & $\cot x = a$



Phương trình	$\tan x = a$	$\cot x = a$
Điều kiện	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$	$x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$
Nghiệm	$x = \arctan(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \operatorname{arccot}(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



Chú ý

$$\gg \tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \left(\text{hay } v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \\ u = v + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\gg \cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq k\pi \left(\text{hay } v \neq k\pi \right) \\ u = v + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

» Trường hợp đặc biệt:

$$(1) \quad \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(4) \quad \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(5) \quad \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \quad \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(6) \quad \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\gg \text{Phương trình } \tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\gg \text{Phương trình } \cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Phương trình $\sin x = a$



Phương pháp

Xét phương trình $\sin x = a$ (1)

» Nếu $|a| > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

» Nếu $|a| \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Chú ý:

» $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

» Trường hợp đặc biệt:

$$(1) \quad \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \quad \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

» Phương trình $\sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$



Ví dụ 1.1.

Giải các phương trình sau

$$(1) \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \quad \sin(x - 60^\circ)$$

$$(3) \quad \sin 3x = -\frac{4}{3}$$

$$(4) \quad \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(5) \quad 2\sin(3x + 1) = 1$$

$$(6) \quad \sin\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0$$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

» Nếu $|a| \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm
$$\begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\gg \quad \cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

» Trường hợp đặc biệt:

$$(1) \quad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(3) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình $\cos x = \cos \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k.360^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$



Ví dụ 2.1.

Giải các phương trình sau

$$(1) \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \cos(x-2) = \frac{2}{5}$$

$$(3) \cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$(4) \quad 2 \cos x = -1$$

(5) $2024 \cdot \cos(x + 30^\circ) = 2025$

(6) $\cos(\cos(x+2)) = 1$

 Lời giải

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]



➤ Dạng 3. Phương trình $\tan x = a$ và $\cot x = a$



Phương pháp

Xét phương trình $\cos x = a$ (1)

Phương trình	$\tan x = a$	$\cot x = a$
Điều kiện	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$	$x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$
Nghiệm	$x = \arctan(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \operatorname{arccot}(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chú ý:

$$\gg \tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ (hay } v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ u = v + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\gg \cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq k\pi \text{ (hay } v \neq k\pi) \\ u = v + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

» Trường hợp đặc biệt:

$$(1) \quad \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(4) \quad \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(5) \quad \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \quad \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(6) \quad \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\gg \text{Phương trình } \tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\gg \text{Phương trình } \cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



Ví dụ 3.1.

Giải các phương trình sau

$$(1) \quad \tan 2x = \tan \frac{2\pi}{7}$$

$$(2) \quad \tan \frac{x}{2} = \sqrt{3}$$

$$(3) \quad \tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(4) \quad \cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

$$(5) \quad \left(\cot \frac{x}{2} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$$

$$(6) \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

✍️ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

[illegible]



Dạng 4. Phương trình có nghiệm thuộc khoảng – đoạn



Phương pháp

Phương pháp tìm nghiệm trong khoảng, đoạn $(a; b)$ hoặc $[a; b]$ hoặc $[a; b)$ hoặc $(a; b]$:

- » **Bước 1:** Giải phương trình (đưa về phương trình cơ bản).
- » **Bước 2:** Ứng với mỗi nghiệm thuộc khoảng đoạn, tìm điều kiện của các số nguyên k thỏa mãn.

Ví dụ: Ở bước 1 ta tìm được họ nghiệm
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi : a < -\frac{\pi}{4} + k\pi < b \longrightarrow k = ?$$

$$\text{Với } x = \frac{3\pi}{2} + k\pi : a < \frac{3\pi}{2} + k\pi < b \longrightarrow k = ?$$

- » **Bước 3:** Kết luận nghiệm.



Ví dụ 4.1.

Giải phương trình lượng giác $\cos x = 0$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.2.

Tìm nghiệm của phương trình $2 \sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$ trên khoảng $(-180^\circ; 180^\circ)$.

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.3.

Giải phương trình lượng giác $\tan x = -1$ trên khoảng $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

✎ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.4.

Giải phương trình lượng giác $\cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ trên khoảng $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

✎ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.5.

Tìm nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ trên đoạn $[2\pi; 4\pi]$

✎ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 5. Bài toán thực tế liên quan phương trình lượng giác



Phương pháp

- » **Bước 1:** Đọc và hiểu nội dung bài toán thực tế đã cho.
- » **Bước 2:** Phân tích bài toán để nhận diện bài toán thuộc nội dung kiến thức liên quan đến hàm số lượng giác, phương trình lượng giác nào.
- » **Bước 3:** Dùng kiến thức đã học, giải bài toán và kết luận nghiệm.



Ví dụ 5.1.

Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2017 được cho bởi một hàm số $y = 4 \sin \left[\frac{\pi}{178} (t - 60) \right] + 10$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 5.2.

Chiều cao $h(m)$ của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20 \sin \left(\frac{\pi}{25} t + \frac{\pi}{3} \right)$. Sau 2 phút kể từ khi bắt đầu chuyển động, Cabin đạt độ cao tối đa bao nhiêu lần?

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

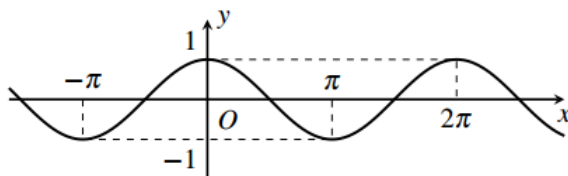
.....



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

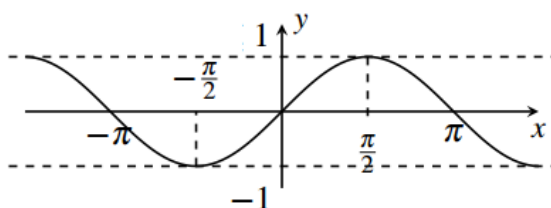
» Câu 1. Cho hàm số $y = \cos x$ có đồ thị như hình vẽ.



Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ trong khoảng $(0; 2\pi)$ là:

- A. $x = 0$. B. $x = \pi$. C. $x = 2\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2}$.

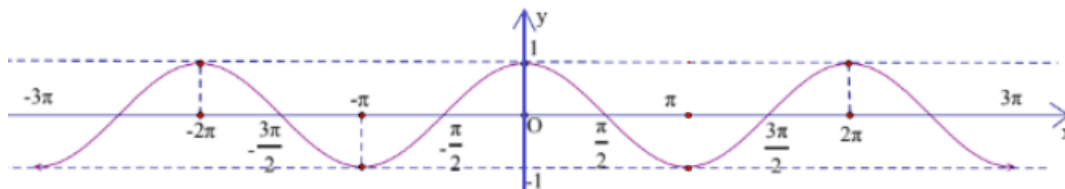
» Câu 2. Cho hàm số $y = \sin x$ có đồ thị như hình vẽ.



Nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ trong khoảng $(0; \pi)$ là:

- A. $x = 0$. B. $x = \pi$. C. $x = -\frac{\pi}{2}$. D. $x = \frac{\pi}{2}$.

» Câu 3. Cho hàm số $y = \cos x$ có đồ thị như hình vẽ.



Tập nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là?

- A. $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

» Câu 4. Phương trình $\cos x = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

» Câu 5. Phương trình $2 \cdot \sin x - 1 = 0$ có tập nghiệm là

- A. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{1}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.



» Câu 6. Phương trình $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ có tất cả các nghiệm là:

A. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

» Câu 7. Tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z}).$

» Câu 8. Nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ là

A. $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

C. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi.$

D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi.$

» Câu 9. Phương trình $\cos 2\pi x = \frac{2025}{2024}$ có bao nhiêu nghiệm trong $(-\pi; \pi)$

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 5.

» Câu 10. Nghiệm của phương trình $2\cos(x - 15^\circ) - 1 = 0$ là

A. $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = 135^\circ + k360^\circ \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -60^\circ + k360^\circ \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases} x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}.$

» Câu 11. Giải phương trình $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A. $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

» Câu 12. Nghiệm của phương trình $\cos x = \cos \frac{\pi}{12}$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + l2\pi \end{cases} \ (k, l \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + l2\pi \end{cases} \ (k, l \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$



» **Câu 13.** Phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ có nghiệm là

- A.** $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **C.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

» **Câu 14.** Giải phương trình $\cos x = 1$.

- A.** $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

» **Câu 15.** Phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ có tập nghiệm là:

- A.** $\left\{\pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\left\{\pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

» **Câu 16.** Tổng các nghiệm của phương trình $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$ trên khoảng $(-180^\circ; 180^\circ)$ là

- A.** 20° . **B.** 100° . **C.** 80° . **D.** 120° .

» **Câu 17.** Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$.

- A.** $\frac{47\pi}{18}$. **B.** $\frac{4\pi}{18}$. **C.** $\frac{45\pi}{18}$. **D.** $\frac{7\pi}{18}$.

» **Câu 18.** Số nghiệm phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[2\pi; 4\pi]$ là

- A.** 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

» **Câu 19.** Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin x$ bằng nhau?

- A.** $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

» **Câu 20.** Số nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ trên đoạn $[0; \pi]$ là

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 5.

» **Câu 21.** Nghiệm của phương trình $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 = 0$ là

- A.** $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = -\frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

» **Câu 22.** Tập nghiệm của phương trình $\cos 3x + \sin \frac{2\pi}{3} = 0$ là

- A.** $\left\{\pm \frac{5\pi}{16} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\left\{\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.



C. $\left\{ \pm \frac{5\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $\left\{ \pm \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

» Câu 23. Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm?

A. $\cos x = 3$.

B. $\sin 2x = -2$.

C. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$.

D. $\cos(2x - 1) = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

» Câu 24. Phương trình nào sau đây có nghiệm?

A. $\sin 2021x - 2 = 0$.

B. $\cos(2x + 2021) = 3$.

C. $\sin^2 x + 1 = 0$.

D. $\cos(2x + 2021) = -1$.

» Câu 25. Phương trình $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ có tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất bằng

A. $\frac{4\pi}{3}$.

B. 2π .

C. $\frac{\pi}{3}$.

D. π .

» Câu 26. Nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$.

» Câu 27. Tập nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$ là?

A. $x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

» Câu 28. Cho phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Số nghiệm của phương trình trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ là?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

» Câu 29. Phương trình $3\cos^2 x + 7\cos x - 10 = 0$ có nghiệm là?

A. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

» Câu 30. Phương trình $\cos(2x + 30^\circ) + \sin x = 0$ có nghiệm là

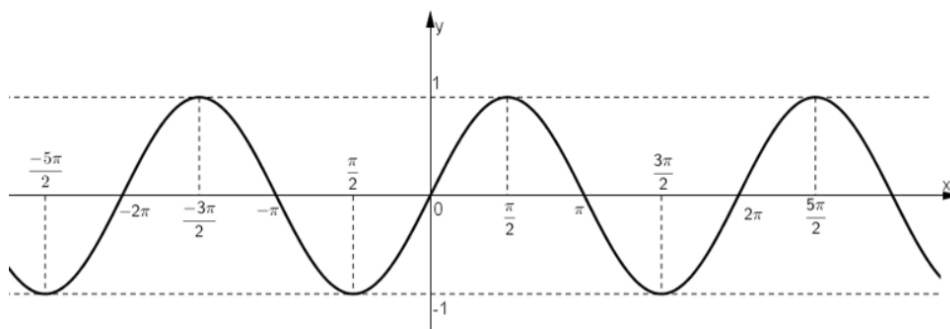
A. $\begin{cases} x = 60^\circ + k180^\circ \\ x = 40^\circ + k120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -40^\circ + k120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 15^\circ + k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

» Câu 31. Cho hàm số $y = \sin x$ có đồ thị như hình vẽ.



Hãy tìm tập tất cả các giá trị của m để phương trình $|\sin x| = m$ có nghiệm?

- A.** $-1 \leq m \leq 1$. **B.** $-1 \leq m \leq 0$. **C.** $-1 < m < 0$. **D.** $0 \leq m \leq 1$.

» Câu 32. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$\sin x \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \cos 2x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{4}.$$

A.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

B.
$$\begin{cases} x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

C.
$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{36} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

» Câu 33. Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

- A.** 20179. **B.** 20181. **C.** 16144. **D.** 16145.

» Câu 34. Nghiệm của phương trình $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$ là

A.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{7} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

B.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

C.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{7} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

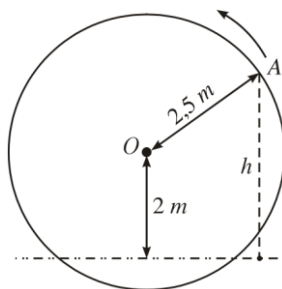
» Câu 35. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{180}(t-80)\right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

- A.** 170. **B.** 171. **C.** 172. **D.** 173.

» Câu 36. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5m; trục của nó đặt cách mặt nước 2m (hình vẽ). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) từ một chiếc gàu gắn tại điểm A của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$ trong đó



$y = 2 + 2,5 \sin \left[2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \right]$ với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút (quy ước $y > 0$ khi gầu ở bên trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới nước). Chiếc gầu cách mặt nước $2m$ lần đầu tiên khi nào?



- A. 4 phút. B. $\frac{1}{4}$ phút. C. 2 phút. D. $\frac{1}{2}$ phút.

» Câu 37. Guồng nước (hay còn gọi là con nước) không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hóa đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính $3,5m$; trục của nó đặt cách mặt nước $3m$. Khi guồng quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = 3,5 \sin \left(2\pi x - \frac{\pi}{2} \right) + 3$, với x (phút) là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$). Hãy chỉ ra giá trị của x nhỏ nhất để ống đựng nước cách mặt nước $3m$.

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{7}{8}$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 38. Cho phương trình $\sin x = a$ (1).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu $a > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.		
(b)	Nếu $a = 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.		
(c)	Nếu $-1 \leq a \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ với $a = \sin \alpha$.		
(d)	Phương trình (1) có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.		



» Câu 39. Cho phương trình lượng giác $2\sin x - \sqrt{2} = 0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình tương đương với phương trình $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$.		
(b)	Phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất là $\frac{\pi}{4}$.		
(d)	Số nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là hai nghiệm.		

» Câu 40. Cho phương trình lượng giác $\sin 2x = -\frac{1}{2} (*)$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình $(*)$ tương đương $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$		
(b)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 3 nghiệm		
(c)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ bằng $\frac{3\pi}{2}$		
(d)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{11\pi}{12}$		

» Câu 41. Cho phương trình lượng giác $2\cos x = \sqrt{3}$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình có nghiệm $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$		
(b)	Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có 4 nghiệm		
(c)	Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ bằng $\frac{25\pi}{6}$		
(d)	Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{13\pi}{6}$		

» Câu 42. Cho phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) (*)$, vậy:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.		
(b)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 2 nghiệm		
(c)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 2 nghiệm âm		
(d)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ bằng $\frac{7\pi}{6}$		



» Câu 43. Cho phương trình lượng giác $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.		
(b)	Khi $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$ thì phương trình có ba nghiệm		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{3}$		
(d)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(\frac{-\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right)$ bằng $\frac{\pi}{6}$		

» Câu 44. Cho hai đồ thị hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ và $y = \sin x$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$		
(b)	Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$		
(c)	Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm		
(d)	Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là: $\left(\frac{5\pi}{8}; \sin \frac{5\pi}{8}\right), \left(\frac{7\pi}{8}; \sin \frac{7\pi}{8}\right)$.		

» Câu 45. Cho phương trình lượng giác $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} = 0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình tương đương $\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.		
(b)	Phương trình có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{4}$.		
(d)	Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là hai nghiệm.		

» Câu 46. Cho phương trình $(2 \cos x - 1)(\sin 2x - m) = 0$ (1).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$x = \frac{7\pi}{3}$ là một nghiệm của phương trình (1).		



(b)	Khi $m = 2$ thì phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$		
(c)	Khi $m = 1$ thì tập nghiệm của phương trình (1) có tất cả 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.		
(d)	Chỉ tìm được một giá trị của m để phương trình (1) có đúng hai nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.		

» Câu 47. Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tại thời điểm $t(h)$ ($0 \leq t \leq 24$) được cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất bằng $9m$.		
(b)	Độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất bằng $15m$.		
(c)	Trong 1 ngày có đúng 3 thời điểm mà độ sâu của mực nước trong kênh đạt giá trị lớn nhất.		
(d)	Độ sâu của mực nước trong kênh tại thời điểm $12(h)$ bằng $13m$.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 48. Họ nghiệm phương trình lượng giác: $\cos(x + 30^\circ) + 1 = 0$ có dạng $x = a^\circ + k \cdot b^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), với $a; b$ là các số nguyên. Tính giá trị $S = b - a$

» Điền đáp số:

» Câu 49. Phương trình lượng giác: $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ có họ nghiệm dạng $x = \frac{\pi}{a} + k \cdot \frac{\pi}{b}$ ($k \in \mathbb{Z}$), với $a; b$ là các số nguyên. Tính giá trị $T = a(a + b)$

» Điền đáp số:

» Câu 50. Họ nghiệm phương trình lượng giác: $\sqrt{3}\tan\frac{\pi x}{2} = 3$ có dạng $x = a^\circ + k \cdot b^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), với $m; n$ là các số nguyên và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị $P = m^n$

» Điền đáp số:

» Câu 51. Phương trình $2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; 2\pi)$

» Điền đáp số:



» **Câu 52.** Cho phương trình $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right)$ của phương trình.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 53.** Cho phương trình $\cos x = \sin 3x$. Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình (làm tròn đến hàng phần chục).

» **Điền đáp số:**

» **Câu 54.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m$ có nghiệm?

» **Điền đáp số:**

» **Câu 55.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm.

» **Điền đáp số:**

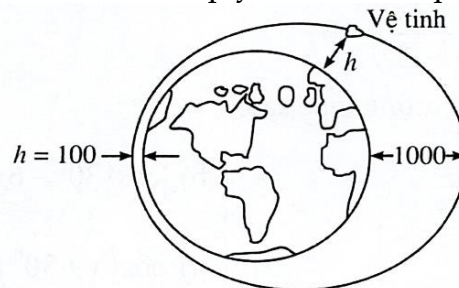
» **Câu 56.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin^2 x + \sin 2x - m\cos^2 x = 0$ có nghiệm.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 57.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10; 10]$ $m \tan x + 2 = m$ có nghiệm.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 58.** Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):



Độ cao h (tính bằng kilômét) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức $h = 550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t$. Trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất 250 km . Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm t để có thể thực hiện thí nghiệm đó? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 1)

» **Điền đáp số:**

» **Câu 59.** Mùa xuân ở Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) thường có trò chơi đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (mét) được tính từ vị trí chân người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$ ($t \geq 0$ và được tính bằng giây), trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại.



Hỏi trong 3 giây đầu tiên, có tất cả bao nhiêu lần người chơi đu ở cách vị trí cân bằng 1 mét?

Điền đáp số:

» Câu 60. Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , chọn điểm có toạ độ $(0; y_0)$ là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là:

$$y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + x \cdot \tan(\alpha) + y_0$$

Trong đó:

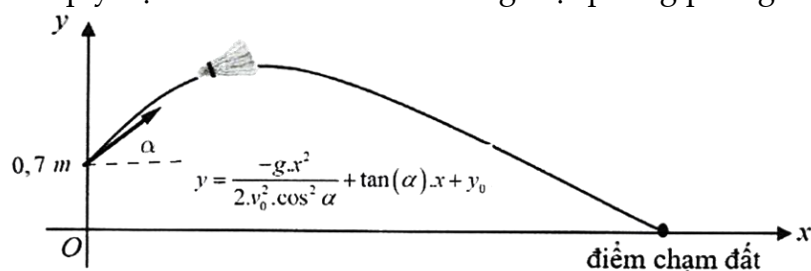
» g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là $9,8 m/s^2$);

» α là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);

» v_0 là vận tốc ban đầu của cầu;

» y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol. Một người chơi cầu lông đang đứng khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là $6,68 m$. Quan sát hình bên dưới, hỏi người chơi đã phát cầu góc khoảng bao nhiêu độ so với mặt đất? Biết cầu rời mặt vợt ở độ cao $0,7 m$ so với mặt đất; vận tốc xuất phát của cầu là $8 m/s$; người chơi không phát cầu quá 50° và bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng).



Điền đáp số:

----- Hết -----