

DẠNG TOÁN ÔN TẬP KÌ THI TN.THPT NĂM 2025

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

① Phương trình mặt cầu (S) dạng 1:

Để viết phương trình mặt cầu (S), ta cần tìm tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R . Khi đó:

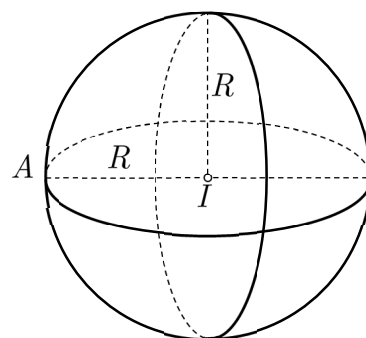
$$(S): \begin{cases} \text{Tâm: } I(a;b;c) \\ \text{Bán kính: } R \end{cases} \Leftrightarrow (S): \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}.$$

② Phương trình mặt cầu (S) dạng 2:

$$(S): \boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0}.$$

Với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu dạng 2

Tâm $I(a;b;c)$, bán kính: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} > 0$.



Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và có $d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó:

Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của (S) và H là tiếp điểm.	Nếu $d < R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Lưu ý: Chu vi của đường tròn giao tuyến $C = 2\pi r$, diện tích đường tròn $S = \pi r^2$. Nếu $d_{[I;(P)]} = 0$ thì giao tuyến là một đường tròn qua tâm I và được gọi là đường tròn lớn. Lúc này (P) được gọi là mặt phẳng kính của mặt cầu (S) .

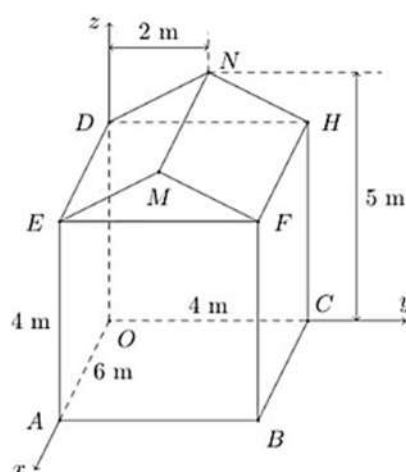
DẠNG CÂU 19. BÀI TẬP RÈN LUYỆN (65 CÂU)

- Câu 19.1.** (ĐMH 2025) Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm $A(3;1;0)$, $B(3;6;6)$, $C(4;6;2)$, $D(6;2;14)$; vị trí $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA=3$, $MB=6$, $MC=5$, $MD=13$. Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu?
- Câu 19.2.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-1;5;-4)$, $B(2;-3;6)$, $C(0;4;2)$, $D(1;7;-5)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA = \sqrt{62}$, $MB = \sqrt{35}$, $MC = \sqrt{6}$, $MD = \sqrt{89}$. Tìm điểm M .
- Câu 19.3.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;4;-1)$, $B(4;-2;3)$, $C(5;0;6)$, $D(8;-1;0)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA = \sqrt{26}$, $MB = \sqrt{30}$, $MC = \sqrt{22}$, $MD = \sqrt{68}$. Tìm điểm M .
- Câu 19.4.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;4;-1)$, $B(7;0;-2)$, $C(-3;2;4)$, $D(4;-1;5)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA = 6$, $MB = 9$, $MC = \sqrt{41}$, $MD = \sqrt{26}$. Tìm điểm M .
- Câu 19.5.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(4;0;3)$, $B(-3;2;1)$, $C(5;-2;7)$, $D(4;6;-5)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA = \sqrt{34}$, $MB = \sqrt{83}$, $MC = \sqrt{51}$, $MD = \sqrt{122}$. Tìm điểm M .
- Câu 19.6.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;2;4)$, $B(3;1;5)$, $C(-6;2;3)$, $D(4;-2;3)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA = \sqrt{50}$, $MB = \sqrt{33}$, $MC = \sqrt{153}$, $MD = 9$. Tìm điểm M .
- Câu 19.7.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;5;-6)$, $B(0;1;3)$, $C(2;-4;1)$, $D(5;-2;-3)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA = \sqrt{209}$, $MB = \sqrt{97}$, $MC = \sqrt{186}$, $MD = \sqrt{203}$. Tìm điểm M .
- Câu 19.8.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-3;4)$, $B(2;5;-3)$, $C(1;-4;2)$, $D(0;2;5)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA = \sqrt{182}$, $MB = \sqrt{178}$, $MC = \sqrt{229}$, $MD = \sqrt{52}$. Tìm điểm M .
- Câu 19.9.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;1;-2)$, $B(3;4;2)$, $C(0;5;6)$, $D(4;2;5)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $AM = \sqrt{42}$, $BM=8$, $CM=\sqrt{106}$, $DM=\sqrt{46}$. Tìm điểm M .
- Câu 19.10.** Trong không gian với một hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (mỗi đơn vị đo trên trục là một kilômét), radar phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ vị trí điểm $M(500;200;8)$ đến điểm $N(a;b;c)$ trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau 10 phút tiếp theo máy bay sẽ ở vị trí điểm $P(900;360;16)$. Tính giá trị biểu thức $S = a - b - 2c$.

Câu 19.11. Ban tổ chức Lễ hội khinh khí cầu Ninh Bình cung cấp dịch vụ chụp ảnh bằng Flycam phục vụ du khách. Xét trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (mỗi đơn vị trên trục là một kilômét), Flycam sẽ xuất phát từ vị trí của Ban tổ chức là điểm $I(3;0;0)$, bay đến vị trí được yêu cầu chụp ảnh trong bán kính không quá 3km . Trong một tình huống, khinh khí cầu thứ nhất đang ở vị trí $M(5;4;4)$ có vận tốc bay không đổi là 20 km/h , khinh khí cầu thứ hai đang ở vị trí $N(6;0;3)$ có vận tốc bay không đổi là 10 km/h . Hai người bạn trên hai khinh khí cầu này muốn chọn một vị trí $A(a;b;c)$ để chụp ảnh bằng Flycam của Ban tổ chức sao cho tổng thời gian bay của hai khinh khí cầu đến A là nhỏ nhất (giả thiết đường bay của khinh khí cầu là đường thẳng). Tính $S = a + b + c$.

Câu 19.12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất. Biết mặt phẳng (P) cắt Ox , Oy , Oz lần lượt tại ba điểm A , B , C . Tính thể tích tứ diện $OABC$.

Câu 19.13. Một kĩ sư xây dựng thiết kế khung một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$ như hình vẽ bên nhờ một phần mềm đồ họa máy tính (đơn vị trên mỗi trục là mét). Biết rằng sàn nhà, bốn mặt bên cùng với các mặt phẳng $(DEMN)$ và $(MNHF)$ là các hình chữ nhật, tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(DEMN)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Câu 19.14. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh $SB = 5, CD = 3\sqrt{2}$ được gắn vào hệ trục sao cho tâm của đáy $ABCD$ trùng với gốc tọa độ O như hình vẽ.

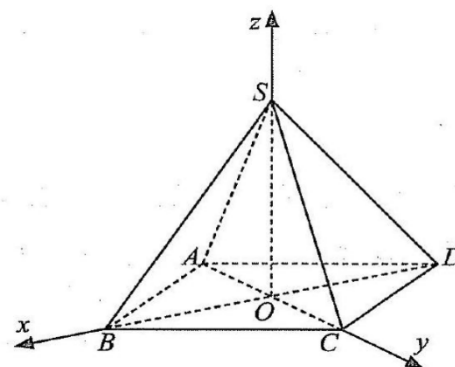
a) Tọa độ đỉnh $S(0;0;4)$.

b) Trọng tâm của tam giác SCD là điểm $G(-1;1;1)$

c) Gọi M là trung điểm cạnh SD thì $BM = 2\sqrt{6}$.

d) Nếu $E(a;0;b)$ thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho

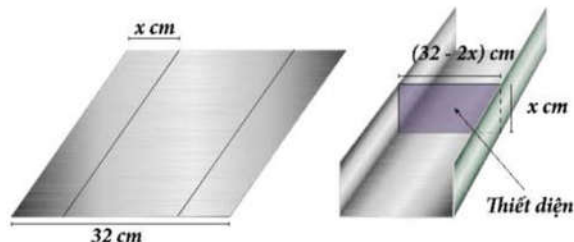
$|EG - EA|$ là lớn nhất thì $4a^2 - b^2 = 5$.



Câu 19.15. Trong không gian với hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo là kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu của Mỹ di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $D(1000;600;14)$ đến điểm $H(a;b;c)$ trong 30 giây. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 giây tiếp theo là điểm $K(1400;800;16)$. Tính giá trị của tổng $a + b + 2c$.

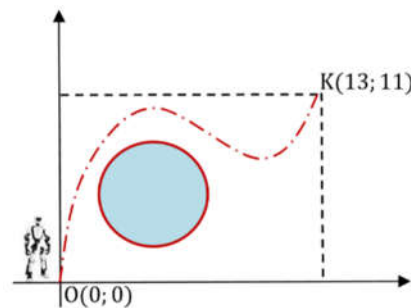


Câu 19.16. Làm máng xối nước bằng một tấm nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm nhôm thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông (như hình vẽ). Để tạo ra đường rãnh có diện tích mặt ngang (thiết



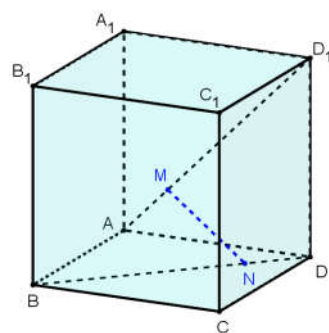
diện) lớn nhất để cho nước đi qua nhiều nhất. Diện tích lớn nhất của thiết diện là bao nhiêu cm^2 ?

Câu 19.17. Trên hệ trục tọa độ Oxy , một Robot AI được lập trình để đi từ điểm $O(0;0)$ đến $K(13;11)$, trên đường đi phải tránh vùng chướng ngại vật là miền trong của hình tròn tâm $I(5;5)$, bán kính $R = \sqrt{10}$ (Robot vẫn đi được trên biên của đường tròn, tham khảo hình vẽ). Tính độ dài quãng đường tối ưu nhất mà Robot có thể đi từ điểm O đến K . (kết quả làm tròn hàng phần mười).



Câu 19.18. Trong không gian $Oxyz$, một khinh khí cầu ở tọa độ $A(-16;-10;10)$ bắt đầu bay với véc tơ vận tốc không đổi $\vec{v}(4;3;-1)$ (đơn vị vận tốc là km/h) và dự kiến bay trong thời gian 10 giờ. Biết trạm kiểm soát không lưu đặt ở vị trí gốc tọa độ O kiểm soát được các vật thể cách trạm một khoảng tối đa bằng 12 km. Thời gian kể từ khi trạm kiểm soát không lưu phát hiện ra khinh khí cầu đến khi khinh khí cầu ra khỏi vùng kiểm soát là bao nhiêu phút?

Câu 19.19. Một kỹ sư thiết kế mô hình trang trí cho một sân khấu nổi có dạng hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với độ dài các cạnh bằng 5 m. Để tạo ra nét độc đáo cho sân khấu, người kỹ sư muốn thiết kế một dàn đèn ánh sáng nổi từ một điểm M trên đoạn thẳng AD_1 xuống điểm N trên đoạn thẳng BD thỏa mãn $AM = ND$. Dàn đèn ánh sáng có chiều dài ngắn nhất là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



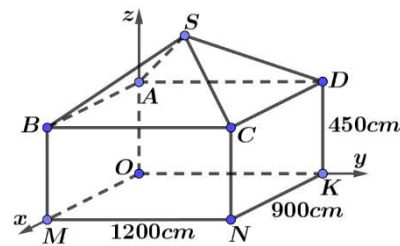
Câu 19.20. Một chiếc máy đo đạc trắc địa được đặt trên một giá đỡ ba chân. Trọng lực tác dụng lên chiếc máy có độ lớn là $30N$ và được phân bố thành ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lên ba chân của giá đỡ. Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có độ lớn bằng nhau và góc tạo bởi mỗi chân của giá đỡ và mặt đất là 60° . Hỏi độ lớn của lực $\vec{F}_1$ là bao nhiêu N (làm tròn đến hàng phần chục)?



Câu 19.21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;2;3), B(7;10;6)$. Hai điểm M, N thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 4$. Khi $AM + BN$ nhỏ nhất, tính tổng hoành độ của M và tung độ của N .

Câu 19.22. Chào đón năm mới 2025, Thành phố trang trí đèn led cho biểu tượng hình chữ V được ghép từ các thanh $AB = 4\text{m}, AC = 5\text{m}$ sao cho tam giác ABC vuông tại B . Để tăng hiệu ứng, các kỹ sư đã thiết kế một chuỗi led chạy từ B xuống A với vận tốc 4 m/phút và một chuỗi led chạy từ A lên C với vận tốc 10 m/phút. Sau khi đóng nguồn điện thì cả hai chuỗi led đồng thời xuất phát. Hỏi sau bao nhiêu giây từ thời điểm đóng nguồn điện thì khoảng cách giữa hai điểm sáng đầu tiên của hai chuỗi led là nhỏ nhất?

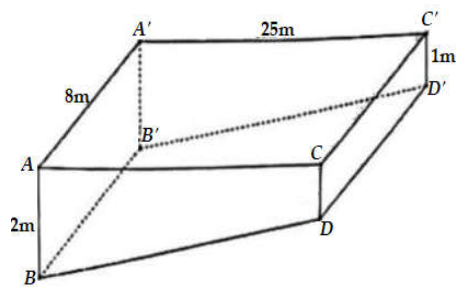
Câu 19.23. Một ngôi nhà gồm hai phần. Phần thân nhà dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.OMNK$ có chiều dài 1200 cm, chiều rộng 900 cm, chiều cao 450 cm. Phần mái nhà dạng hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt đáy một góc α có $\tan \alpha = \frac{1}{5}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho M thuộc tia Ox , K thuộc tia Oy , A thuộc tia Oz (như hình vẽ).



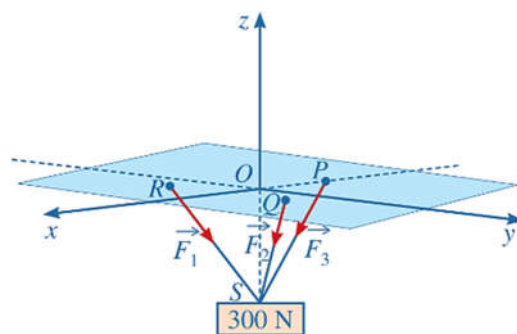
Biết $S(a;b;c)$ (đơn vị của a, b, c là centimet). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$

Câu 19.24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -2; -1), B(1; 4; 6), C(3; 38; -16), D(2; 5; 1)$. Điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn biểu thức $P = MD^4 - \frac{16}{3} \cdot MD^3 - 4MA^2 - 5MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = a + b + c$? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Câu 19.25. Mặt bể bơi của một dự án chung cư cao cấp có dạng một hình chữ nhật với chiều dài 25m và chiều rộng 8m. Bể bơi sâu 1m ở bên đầu nông và sâu 2m bên đầu sâu. Biết hai đầu nông, sâu thuộc hai bên theo chiều dài của bể bơi (tham khảo hình vẽ minh họa). Ban đầu bể không có nước, nước bắt đầu được bơm vào bể lúc 7 giờ sáng với tốc độ 1m^3 mỗi phút. Vào lúc 8 giờ 4 phút sáng thì mực nước dâng lên với tốc độ $\frac{1}{a}$ m/phút. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

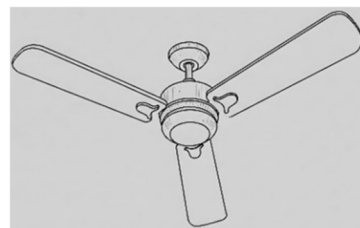


Câu 19.26. Một vật có trọng lượng 300N được treo bằng ba sợi dây cáp không dẫn có chiều dài bằng nhau, mỗi dây cáp có một đầu được gắn tại một trong các điểm $P(-2; 0; 0), Q(1; \sqrt{3}; 0), R(1; -\sqrt{3}; 0)$ còn đầu kia gắn với vật tại điểm $S(0; 0; -2\sqrt{3})$ như hình vẽ (mỗi đơn vị trên trục tương ứng với 1N). Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ tương ứng là lực căng trên các



sợi dây cáp RS, QS và PS . Giá trị $|\vec{F}_1| + 2|\vec{F}_2| + |\vec{F}_3|$ bằng bao nhiêu Niu – ton? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

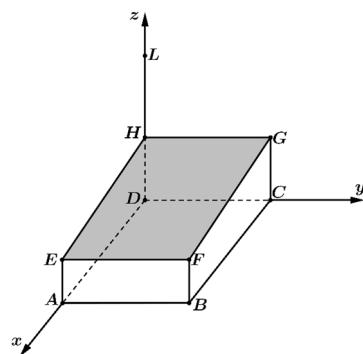
Câu 19.27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (mỗi đơn vị trên trục tọa độ dài 1cm) được đặt một góc trong một căn phòng. Có một cây quạt trần có ba cánh quạt và mỗi cánh cách đều nhau (minh họa như hình vẽ bên). Gọi $A(-10; -15; 300)$ và $B(12; 20; 300)$ là hai trong ba đỉnh của cánh quạt trần. Chiều cao của ống treo với hộp điện cánh quạt gắn vào trần nhà là 50cm và đỉnh $S(a; b; c)$ với $a > 0$ là giao điểm giữa trần nhà và ống treo cánh quạt. Tính $T = a - b + c$. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



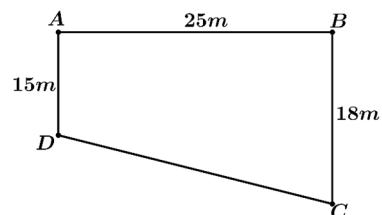
Câu 19.28. Hệ thống định vị toàn cầu GPS (Global Positioning System) là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tỉ lệ độ dài trên các trục là 10km tính cho một đơn vị tỉ lệ trên mỗi trục có 4 vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm $A(-1; 2; -1), B(1; 4; 0), C(3; 0; 9)$ và $D(7; 10; -1)$. Ở một thời điểm cả bốn vệ tinh bắn tín hiệu về điểm M và đo được độ dài $MA = 6, MB = 3, MC = 10, MD = 6$. Ngay sau đó 10 giây, cả bốn vệ tinh lại bắn tín hiệu về vật M và đo được $MA = 3, MB = 4, MC = \sqrt{85}, MD = \sqrt{137}$. Nếu coi như vật M chuyển động thẳng đều thì tốc độ của vật bằng bao nhiêu (đơn vị: m/s và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)? (Bỏ qua khoảng thời gian phát và thu tín hiệu)

Câu 19.29. Sân hiên hình chữ nhật của một ngôi nhà là khoảng đất $ABCD$ được lợp mái bằng kính màu để hạn chế ánh sáng đi qua với mái dốc. Các bề mặt bên $ADHE$ và $CGHD$ nằm ở bức tường bên ngoài ngôi nhà. Đặt vào mô hình hệ trục tọa độ như hình vẽ thì ta có $B\left(5; \frac{7}{2}; 0\right)$; $E(5; 0; 2)$ và $H(0; 0; 3)$.

Trên tường nhà có một ngọn đèn đặt tại điểm L cách điểm D một khoảng 6m theo phương thẳng đứng. Phần có mái của sân hiên in bóng lên khu vườn bằng phẳng phía trước ngôi nhà dưới ánh đèn tạo thành khoảng đất hạn chế ánh sáng. Tính diện tích khoảng đất đó (Kết quả làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

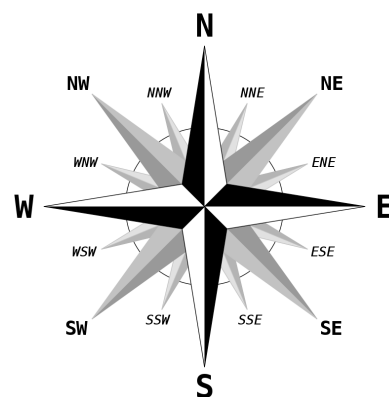


Câu 19.30. Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D minh họa như hình vẽ bên. Bước đầu chúng được lấy “thăng bằng” để có cùng độ cao và tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25\text{ m}$, $AD = 15\text{ m}$, $BC = 18\text{ m}$. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân



trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10cm, $a\text{ cm}$, 6cm tương ứng sao cho bốn điểm A, B', C', D' đồng phẳng. Giá trị của a bằng bao nhiêu? (Đơn vị: cm)

Câu 19.31. Một Hai quả bóng bay được thả lên cùng một địa điểm. Sau một khoảng thời gian, quả bóng thứ nhất nằm cách địa điểm xuất phát 200m về hướng Đông và 200m về hướng Nam, đồng thời cách mặt đất 50m; quả bóng thứ hai nằm cách địa điểm xuất phát 100m về hướng Tây và 100m về hướng Bắc, đồng thời cách mặt đất 40m. Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất quan sát thấy hai quả bóng này. Biết rằng so với các vị trí quan sát trên mặt đất, vị trí người đứng có tổng khoảng cách đến hai quả bóng bay là nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ vị trí người quan sát đến địa điểm thả hai quả bóng bay này (Đơn vị: mét) (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 19.32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai viên bi xanh và đỏ ban đầu dạng

hai mặt cầu lần lượt là $(S_{do}): (x - 10)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$ và

$(S_{xanh}): (x + 12)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 16$. Biết mặt đất

trùng với mặt phẳng Oxy và hai mặt cầu này tiếp xúc với

mặt phẳng Oxy với điểm tiếp xúc nằm trên trục Ox .

Truyền cho hai viên bi đỏ và xanh lần lượt các tốc độ

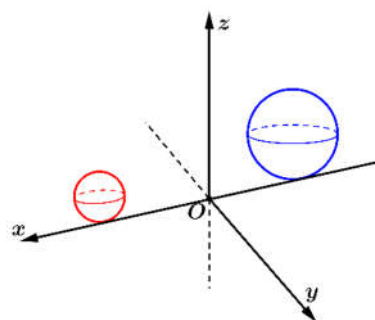
không đổi $v_d = 5\text{ (m/s)}$ và $v_x = 3\text{ (m/s)}$ thì hai viên bi lăn

thẳng về phía nhau dọc theo trục Ox (Điểm tiếp xúc luôn

nằm trên Ox). Sau khoảng thời gian bằng bao nhiêu giây

thì hai viên bi va chạm lần đầu tiên (Đơn vị trên hệ trục

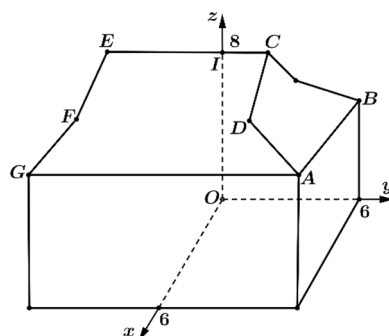
tọa độ là mét và kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



Câu 19.33. Hệ thống định vị toàn cầu GPS (Global Positioning System) hiện tại có 24 vệ tinh, mỗi vệ tinh cách Trái Đất 20000 km, ta coi Trái Đất là khối cầu có bán kính $R = 6$ (nghìn km). Với một hệ tọa độ $Oxyz$ đã chọn, O là tâm Trái Đất và đơn vị trên mỗi trục là nghìn km, hai vệ tinh có tọa độ $A(26; 0; 0)$, $B(0; 26; 0)$. Xét điểm $M(x; y; z)$ thuộc bề mặt Trái

Đất. Tính giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ theo đơn vị nghìn km (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 19.34. Trên khu vực miền núi thì người dân thường xây dựng nhà ở dạng nhà sàn và được minh họa như hình vẽ dưới đây:

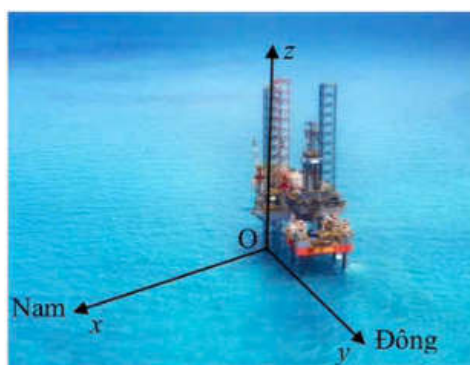


Giả sử áp dụng hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên các trục là mét). Xét một bên của mái nhà gồm có một hình chữ nhật $CDFE$ và một hình thang $ADFG$ với các điểm có tọa độ lần lượt là $G(6; -6; 6)$; $C(3; 4; 8)$; $F(4; -4; 7)$ và điểm I là trung điểm CE . Biết góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng a° . Giá trị của a bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 19.35. Một công ty xây dựng đang lên kế hoạch thiết kế một tòa nhà chọc trời trong khu đô thị mới. Để đảm bảo an toàn và sẵn sàng cho các tình huống khẩn cấp, công ty muốn thiết kế đường bay tối ưu cho trực thăng cứu hộ tiếp cận đỉnh tòa nhà. Giả sử tòa nhà được xây dựng với đỉnh tòa nhà $T(40; 60; 150)$ trong hệ tọa độ không gian $Oxyz$, với O là gốc tọa độ nằm ở mặt đất. Trực thăng cứu hộ khởi hành từ sân bay tại điểm $X(100; -40; 0)$. Một người A đứng trong tầng nào đó của tòa nhà có tọa độ là $A(40; 30; -20)$. Gọi phương trình đường thẳng d mô tả đường bay tối ưu của trực thăng cứu hộ từ điểm X đến đỉnh tòa nhà T và $M(a; b; c)$ là điểm thuộc đường bay của trực thăng cứu hộ để khoảng cách từ M đến A ngắn nhất. Tính $a + b + c$.



Câu 19.36. Trong không gian, xét hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là mặt phẳng) với tia Ox hướng về phía nam, tia Oy hướng về phía đông và tia Oz hướng thẳng đứng lên trời (tham khảo hình vẽ). Đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ lấy theo kilômét. Một chiếc radar đặt tại O có phạm vi theo dõi là 30 km. Một chiếc tàu thám hiểm tại vị trí A ở độ sâu 10 km so với mặt nước biển, cách O 25 km về



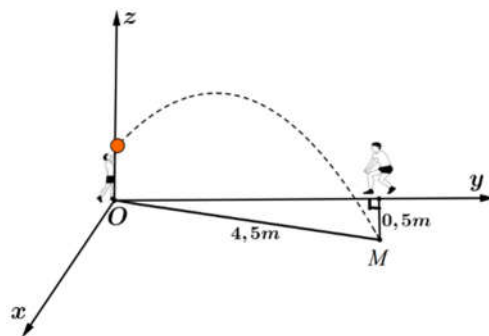
phía nam và 15 km về phía tây. Một tàu đánh cá tại vị trí $B(-20; 15; 0)$.

- Khoảng cách từ chiếc tàu thám hiểm đến radar bằng 25 km.
- Radar không phát hiện được tàu thám hiểm đặt tại vị trí A .
- Radar phát hiện ra tàu đánh cá tại vị trí B .
- Một chiếc tàu của cảnh sát biển đang tuần tra di chuyển đến vị trí C cách O 15 km về phía nam.

Để radar phát hiện ra thì tàu cảnh sát biển cần di chuyển về phía đông cách O tối đa $15\sqrt{3}$ km.

Câu 19.37. Trong tiết thể dục học về kĩ thuật chuyền bóng hơi, Hoàng và An đang tập chuyền bóng cho nhau, Hoàng ném bóng cho An đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Hoàng và rơi xuống vị trí M cách An $0,5$ m và cách Hoàng $4,5$ m được mô tả bằng hình vẽ bên dưới.

Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): ax + \frac{1}{2}y + cz + d = 0$ và vuông góc với



mặt đất. Khi đó giá trị của $a + c + d$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 19.38. Cầu Cổng Vàng (The Golden Gate Bridge) ở Mỹ. Xét hệ trục tọa độ Oxyz với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ. Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz , trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227 m, điểm A cách mặt nước 75 m và cách trục Oz 343 m.



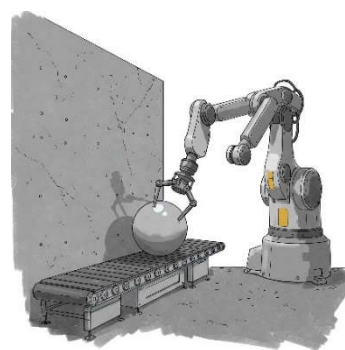
Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp

AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước 75 m và MN song song với cột trụ. Khi điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 230 m, tính độ dài đoạn dây nối MN . (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

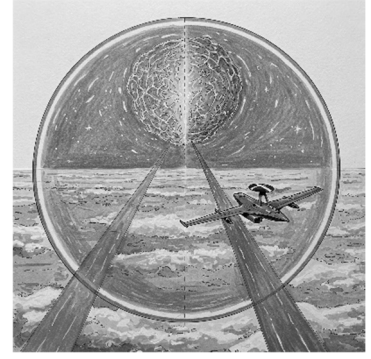
Câu 19.39. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;2;0), B(2;0;-2)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 1 = 0$. Xét điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA = MB$ và số đo góc $\widehat{AMB}$ lớn nhất. Khi đó giá trị $a + b + c$ bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Câu 19.40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A\left(4; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B\left(3; \frac{5}{2}; 0\right)$ ở trên đường băng. Có một lớp mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(8;0;0)$, $N(0;-8;0)$ và $P(0;0;8)$. Tính độ cao của máy bay khi xuyên qua đám mây để hạ cánh (làm tròn kết quả tới hàng phần trăm).

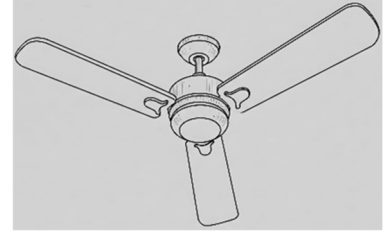
Câu 19.41. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một cánh tay robot được lập trình để gấp một chi tiết hình cầu có bán kính $R = 1$ đặt trên băng chuyền tại vị trí $A(5;0;0)$. Trong không gian làm việc của robot có một chướng ngại vật là một mặt phẳng $(P): x + y + z = 10$. Để tối ưu hóa năng lượng và thời gian, robot cần di chuyển đầu gấp từ vị trí xuất phát $O(0;0;0)$ đến điểm B trên mặt cầu chi tiết sao cho đường đi là ngắn nhất và không va chạm với chướng ngại vật (P) . Tính độ dài đường đi ngắn nhất mà robot cần thực hiện.



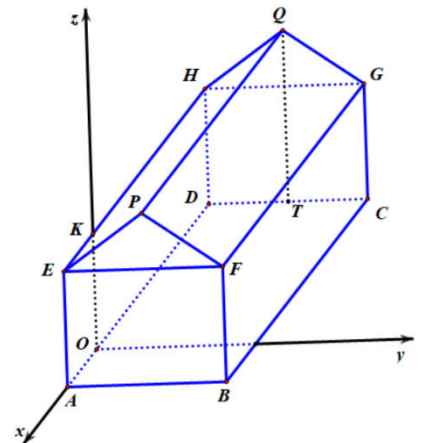
Câu 19.42. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét một vùng phòng thủ hình cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 49$ và một hành lang bay an toàn được giới hạn bởi hai mặt phẳng song song $(P_1): x + y + z = 5$ và mặt phẳng $(P_2): x + y + z = -5$. Một máy bay trinh sát bắt đầu xâm nhập khu vực từ điểm $M_0(6;0;0)$ và bay theo đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1;1;1)$. Tính chiều dài đoạn đường bay của máy bay nằm hoàn toàn trong phần giao của hành lang bay an toàn và vùng phòng thủ hình cầu (đơn vị: km).



Câu 19.43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (mỗi đơn vị trên trục tọa độ dài 1cm) được đặt một góc trong một căn phòng. Có một cây quạt trần có ba cánh quạt và mỗi cánh cách đều nhau (minh họa như hình vẽ bên). Gọi $A(-10;-15;300)$ và $B(12;20;300)$ là hai trong ba đỉnh của cánh quạt trần. Chiều cao của ống treo với hộp điện cánh quạt gắn vào trần nhà là 50cm và đỉnh $S(a;b;c)$ với $a > 0$ là giao điểm giữa trần nhà và ống treo cánh quạt. Tính $T = a - b + c$. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



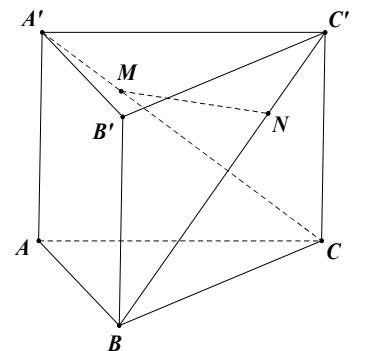
Câu 19.44. Một kho chứa hàng có dạng hình lăng trụ đứng $ABFPE.DCGQH$ với $ABFE$ là hình chữ nhật và EFP là tam giác cân tại P . Gọi T là trung điểm của DC . Các kích thước của kho chứa lần lượt là $AB = 6\text{ m}$; $AE = 5\text{ m}$; $AD = 8\text{ m}$; $QT = 7\text{ m}$. Người ta mô hình hoá nhà kho bằng cách chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ là điểm O thuộc đoạn AD sao cho $OA = 2\text{ m}$ và các trục tọa độ tương ứng như hình vẽ dưới đây.



Để lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí trung điểm của FG và đầu thu dữ liệu đặt tại vị trí O , người ta thiết kế đường dây cáp nối từ O đến K sau đó nối thẳng đến camera, rồi nối lại từ camera đến thẳng điểm Q . Độ dài đoạn cáp nối tối thiểu bằng bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục và đầu dây nối không đáng kể).

Câu 19.45. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(3; -1; 2)$ và M là điểm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 7 = 0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P = \left| 3\vec{MA} + 5\vec{MB} - 7\vec{MC} \right|$.

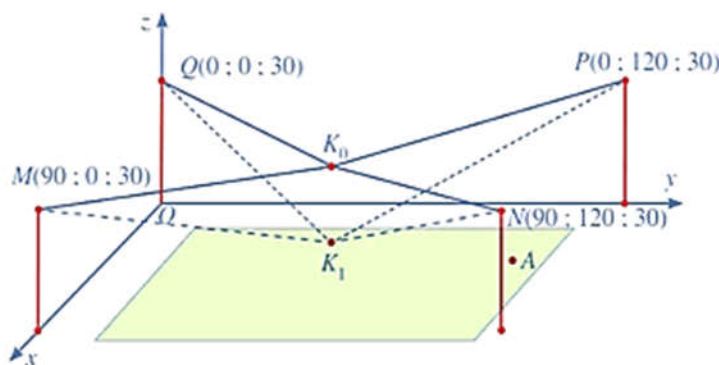
Câu 19.46. Một kiến trúc sư muốn xây dựng 1 tòa nhà biểu tượng độc lạ cho thành phố. Trên bản thiết kế tòa nhà có hình dạng là một khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh bên bằng cạnh đáy và dài 30 mét. Kiến trúc sư muốn xây dựng một cây cầu MN bắc xuyên tòa nhà (điểm đầu thuộc cạnh $A'C'$, điểm cuối thuộc cạnh BC') và cây cầu này sẽ được dát vàng với đơn giá 5 tỷ đồng trên 1 mét dài. Vì vậy để đáp ứng bài toán kinh tế, kiến trúc sư phải chọn vị trí cây cầu sao cho MN ngắn nhất (như hình vẽ).



Khi đó giá xây cây cầu này hết bao nhiêu tỷ đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

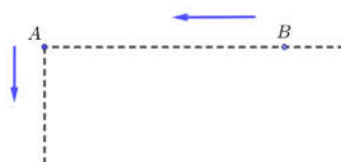
Câu 19.47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;5)$, $B(3;0;1)$, $C(-1;2;0)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P = a - 2b + 4c$.

Câu 19.48. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (Hình vẽ). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19. (Nguồn: <https://mww.abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie V).

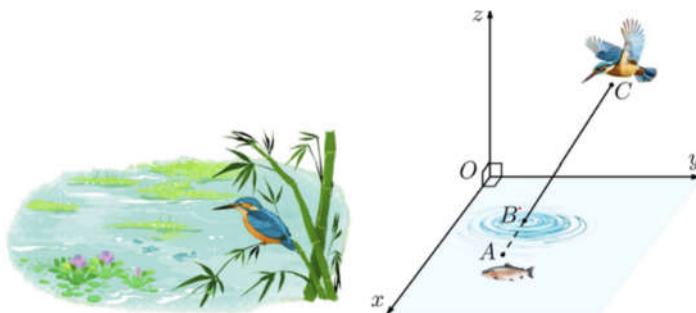


Tọa độ vectơ $\overrightarrow{K_0K_1} = (a;b;c)$ với a, b, c là các số thực. Tính $P = a + b + 3c$?

Câu 19.49. Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lí. Tàu thứ nhất từ vị trí ban đầu A chạy theo hướng Nam với vận tốc 6 hải lí/giờ, còn tàu thứ hai từ vị trí ban đầu B chạy theo hướng về vị trí ban đầu của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lí/giờ (được mô tả như hình vẽ bên dưới). Khoảng cách ngắn nhất giữa hai con tàu là bao nhiêu hải lí? (Kết quả làm tròn đến hàng phân chục).



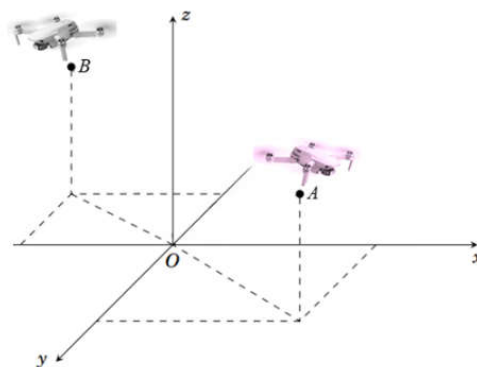
Câu 19.50. Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O nằm trên mặt nước, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước, trục Oz hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí (có hoành độ, tung độ và cao độ là các số thực dương) cách mặt nước $2m$, cách mặt phẳng (Oxz) , (Oyz) lần lượt là $3m$ và $1m$ phóng thẳng xuống vị trí con cá, biết con cá (có hoành độ và tung độ là các số thực dương) cách mặt nước $50cm$, cách mặt phẳng (Oxz) , (Oyz) lần lượt là $1m$ và $1,5m$. Tọa độ điểm B lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước là $(a;b;c)$. Tính $T = 4a + 3b - 25c$.



Câu 19.51. Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A cách mặt đất $5m$, cách điểm xuất phát $3m$ về phía nam và $2m$ về phía đông.

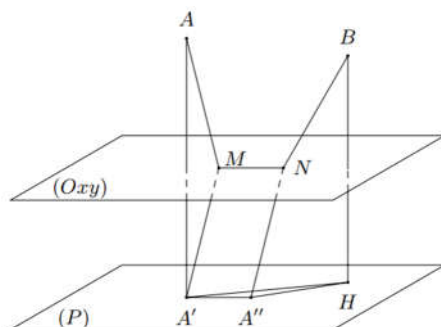
Chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B cách mặt đất $5m$, cách điểm xuất phát $6m$ về phía bắc và $6m$ về phía tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy)

trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét). Trên mặt đất, người ta xác định được một vị trí sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó đến hai chiếc flycam ngắn nhất. Hỏi khoảng cách từ điểm xuất phát đến vị trí đó bằng bao nhiêu mét?



Câu 19.52. Hệ thống định vị Toàn Cầu GPS hiện tại có 24 vệ tinh, mỗi vệ tinh cách Trái Đất 20000 km , ta coi Trái Đất là khối cầu có bán kính $R = 6$ (nghìn km). Với hệ tọa độ $Oxyz$ đã chọn, O là tâm Trái Đất và đơn vị trên mỗi trục là nghìn km, hai vệ tinh có tọa độ $A(26;0;0)$, $B(0;26;0)$. Xét điểm $M(x;y;z)$ thuộc bề mặt Trái Đất. Tính giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ theo đơn vị nghìn km (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 19.53. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;1;2)$ và $B(4;5;1)$. Các điểm M, N di động trên mặt phẳng (Oxy) sao cho độ dài MN bằng 1. Tổng $AM + BN$ có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?



Câu 19.54. Trong một khu du lịch lớn có hai tuyến cáp treo (coi mỗi tuyến cáp treo như một đường thẳng). Sau khi chọn một hệ tọa độ $Oxyz$ thích hợp, người ta thấy rằng: tuyến cáp thứ nhất xuất phát từ điểm $M(2;4;0)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;-2)$ còn tuyến cáp thứ hai xuất phát từ điểm $N(3;-1;-2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{v} = (2;-1;-1)$. Gọi $A(a;b;c)$ và $B(d;e;f)$ là hai điểm lần lượt nằm trên hai tuyến cáp sao cho hai điểm đó gần nhau nhất. Tính $a + d$?

Câu 19.55. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$, $(S_2): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{14}{3}\right)$. Gọi I là tâm của mặt cầu (S_1) và (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2) . Xét các điểm M thay đổi và thuộc mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2) . Khi đoạn thẳng AM ngắn nhất thì $M(a;b;c)$. Tính giá trị của $T = a + b + c$.

Câu 19.56. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(-2;1;0), C(2;-3;1)$. Điểm $M(a;b;c)$ sao cho $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S = 4a^2 + b^2 - 6c$.

Câu 19.57. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;-1;2)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$, $C(0;1;-2)$. Gọi

$M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của $T = 12a + 12b + 2025c$.

Câu 19.58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(4;1;0), B(4;6;6), C(5;6;2), D(7;2;14)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA = 3, MB = 6, MC = 5, MD = 13$. Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Câu 19.59. Trong không gian ba chiều $Oxyz$, tọa độ các khu vực được xác định như sau:

Khu vực $A(30;20;0)$ nằm trên mặt đất, cách trung tâm thành phố 3 km .

Khu vực $B(70;50;40)$ nằm trên tòa nhà cao tầng và ở độ cao 40 m .

Khu vực $C(50;80;70)$ nằm trên một đỉnh đồi ở độ cao 70 m .

Gọi vị trí lắp đặt trạm phát sóng là $D(a;b;c)$ sao cho khoảng cách từ D đến ba khu vực kể trên là bằng nhau và có khoảng cách đến chúng là nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

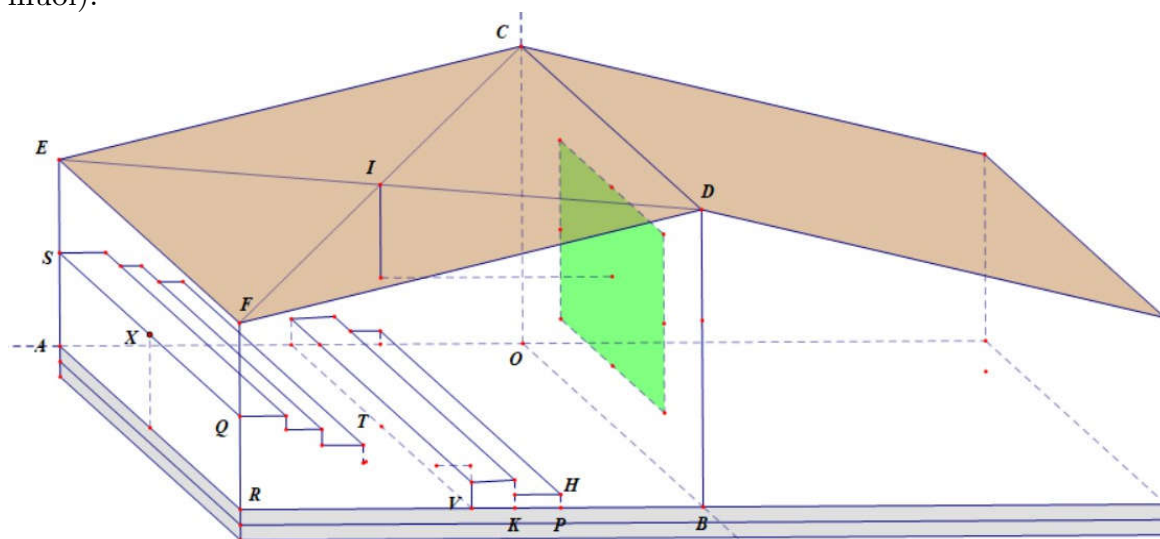
Câu 19.60. Xét trong không gian $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay đặt ở gốc tọa độ $O(0;0;0)$, đơn vị trên mỗi trục là ki-lô-mét. Một máy bay chuyển động theo đường thẳng, bay qua hai vị trí $A(-500;-300;500)$ và $B(-200;-200;450)$. Khi máy bay ở gần đài kiểm soát không lưu nhất, tọa độ của máy bay là $(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.

Câu 19.61. Trong không gian $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét. Một máy bay chuyển động hướng về đài kiểm soát không lưu, bay qua hai vị trí $A(-500;-250;150), B(-200;-200;100)$. Khi máy bay ở gần đài kiểm

soát nhất, tọa độ của vị trí máy bay là $(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $\frac{-3}{10}a - b - c$ là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

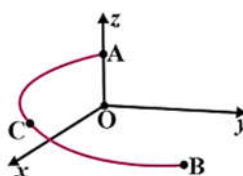
Câu 19.62. Một toà nhà được thiết kế để làm 2 phòng dạy học có trang bị máy chiếu. Mái nhà là dạng mái vát $CDFE$ như hình vẽ. Chiều dài của mỗi phòng học là $OA = 30\text{ m}$ và chiều rộng là $OB = 20\text{ m}$, chiều cao các bức tường $OC = BD = 10\text{ m}$ và $EA = RF = 6\text{ m}$. Từ vị trí P trên BR cách B một khoảng 10 m , người ta xây các bậc thang cao dần về phía cuối của phòng học để đặt các dãy bàn ghế học sinh trên các bậc thang đó. Chiều rộng mỗi bậc thang là 2 m và chiều cao mỗi bậc thang là 20 cm . Chủ toà nhà muốn lắp giá treo máy chiếu tại vị trí I là giao của DE và CF như hình vẽ, vuông góc với mặt sàn sao cho không vướng vào đầu học sinh khi học sinh đó đứng tại bậc thang ngay dưới máy chiếu (chiều cao học sinh đó là $1,8\text{ m}$) và cũng không che khuất tầm nhìn của học sinh ngồi ở hàng ghế sau cùng, tại vị trí X trung điểm SQ , theo phương vuông góc bức tường $OBDC$ (chiều cao mắt học sinh so với bậc thang tại đó là $1,2\text{ m}$). Hỏi tổng độ dài thanh treo máy chiếu và cả thân máy chiếu lớn nhất là bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần

mười).



Câu 19.63. Hệ Thống Định Vị Vệ Tinh Toàn Cầu Beidou (Bắc Đẩu) hiện tại có 35 vệ tinh, mỗi vệ tinh cách Trái Đất khoảng 35000 km, ta coi Trái Đất là khối cầu có bán kính $R = 6,4$ (nghìn km). Với hệ tọa độ $Oxyz$ đã chọn, O là tâm Trái Đất và đơn vị trên mỗi trục là nghìn km, hai vệ tinh có tọa độ $A(30;0;0)$, $B(0;30;0)$. Xét điểm $M(x;y;z)$ thuộc bề mặt Trái Đất. Tính giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ theo đơn vị nghìn km (làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 19.64. Trượt nước là một trong những trò chơi vận động được nhiều người yêu thích trong các công viên nước. Một cái máng trượt nước có thiết kế dạng cung tròn với hai đầu mút là A và B . Chọn một trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại hình chiếu của điểm A trên mặt đất, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất và trục Oz hướng thẳng đứng lên trên trời, đơn vị đo lấy theo mét (tham khảo hình vẽ dưới đây). Biết các điểm A, B và một điểm C nằm trên máng trượt lần lượt có tọa độ là $(0;0;5)$; $(6;7;1)$ và $(5;0;2)$. Độ dài máng trượt nước đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)?



Câu 19.65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(4;1;0)$, $B(4;6;6)$, $C(5;6;2)$, $D(7;2;14)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA = 3$, $MB = 6$, $MC = 5$, $MD = 13$. Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

-----HẾT-----