

Chủ đề 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

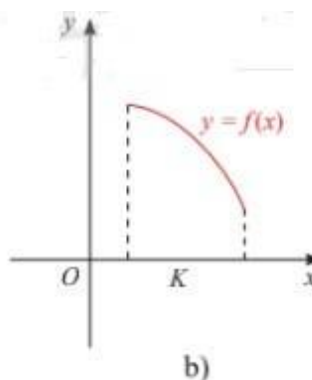
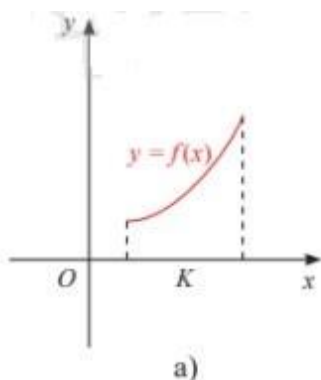
a) Khái niệm tính đơn điệu của hàm số

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K .

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến** trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến** trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

*Chú ý:

- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (Hình a).
- Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (Hình b).



- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên K thì gọi chung là đơn điệu trên K .
- Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

• Định lý:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K .

*Chú ý:

- Định lý trên vẫn đúng trong trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm trên K .
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ không đổi trên K .

Nhận xét:

Để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- *Bước 1:* Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ tại đó hàm số có đạo hàm.

- *Bước 2:* Tính đạo hàm

bằng 0 hoặc không tồn tại.

- *Bước 3:* Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y' = f'(x)$.

- *Bước 4:* Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

a) Khái niệm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

+ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$

thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .

+ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$

thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .

*Chú ý:

+ Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại (điểm**

cực tiểu) của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại (giá trị cực tiểu)** của hàm số, kí

hiệu là $f_{CD} (f_{CT})$, còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của

đồ thị hàm số.

+ Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu còn được gọi chung là **giá trị cực trị** (hay **cực trị**) của hàm số.

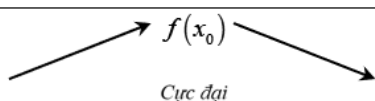
b) Cách tìm cực trị của hàm số

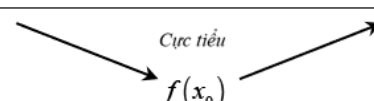
• **Định lý:**

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- + Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- + Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

***Chú ý:** Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

- + **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số.
- + **Bước 2:** Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
- + **Bước 3:** Lập bảng biến thiên.
- + **Bước 4:** Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t (giây) là khoảng thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động và $s(t)$ (m) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời

gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vật chuyển động nhanh dần hay chậm dần.

Bài 2. Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm được tính theo

$$\text{công thức } V(t) = \frac{1}{100} \left(30t - \frac{t^4}{4} \right) \text{ với } 0 \leq t \leq 90. \text{ Tốc độ bơm}$$

nước ở thời điểm t được tính theo công thức $v(t) = V'(t)$. Tìm thời điểm tốc độ bơm nước là lớn nhất và tính tốc độ bơm nước lớn nhất đó.



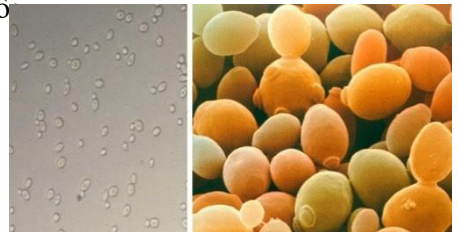
Bài 3. Một cửa hàng trung bình bán được 100 cái tivi mỗi tháng với giá 14 triệu đồng một cái. Chủ cửa hàng nhận thấy rằng, nếu giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng. Hỏi cửa hàng nên bán với giá bao nhiêu để doanh thu cửa hàng là lớn nhất?

Bài 4. Giả sử số lượng quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa

$$\text{bằng hàm số } P(t) = \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}}, \text{ trong đó thời gian } t$$

được tính bằng giờ. Tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men ở thời điểm t được tính theo công thức $P'(t)$

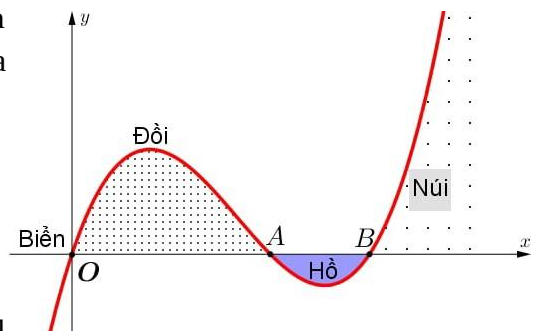
. Nêu nhận xét về sự tăng giảm của số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy. Số lượng quần thể nấm men có thể tăng lên vô cùng được không?



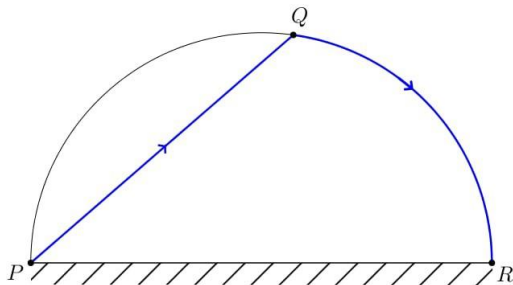
Bài 5. Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hoá thành một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài

trên các trục là km).

Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OA = 2$ km, độ rộng của hồ $AB = 1$ km và ngọn đồi cao 528 m. Tìm độ sâu của hồ (tính bằng mét) tại điểm sâu nhất? (làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài 6. Cho một bờ hồ hình bán nguyệt có bán kính bằng 2 km, đường kính PR như hình vẽ sau:

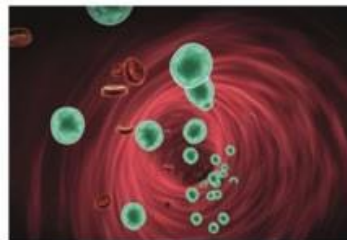


Từ điểm P anh Tài chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm Q trên bờ hồ, rồi chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí R với vận tốc 6 km/h. Thời gian chậm nhất mà anh Tài di chuyển từ P đến R là bao nhiêu? (thời gian tính bằng phút).

Bài 7. Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $TC = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$ và hàm doanh thu là $TR = -2x^2 + 1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số $f(x) = TR - TC$, cực đại lợi nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

Bài 8. Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ mg/L của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được

xác định bởi công thức:
$$C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}.$$

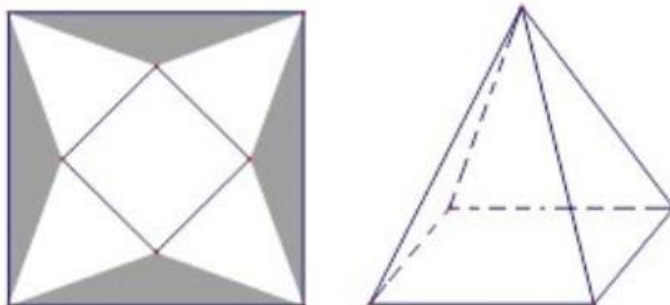


(Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning)

Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Em hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết

quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Bài 9. Một tấm bạt hình vuông cạnh 20 m như hình vẽ dưới đây. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gấp và may lại (các đường may không đáng kể), nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí (tháp dạng hình chóp tứ giác đều) để tránh hư hại tháp khi trời mưa.



Biết khối chóp hình thành sau khi gấp và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu để đảm bảo yêu cầu trên.

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

+ Số M được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với

mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max_D f(x)$.

+ Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi

$x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min_D f(x)$.

*Chú ý:

- + Khi nói giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ (mà không nói “trên tập D ”) thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên tập xác định của hàm số.
- + Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập D , ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.
- + Trong thực hành, ta dùng các ký hiệu $\min_D, \max_D y$ để chỉ giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có) của hàm số $f(x)$ trên tập D .

2. QUY TẮC TÌM GTLN, GTNN TRÊN ĐOẠN

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$, có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Giả sử chỉ có hữu hạn điểm trong đoạn $[a; b]$ mà đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.

Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$

- *Bước 1:* Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.

- *Bước 2:* Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$.

- *Bước 3:* Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có:

$$M = \max_{[a,b]} f(x); m = \min_{[a,b]} f(x).$$

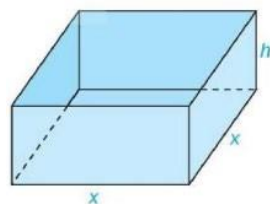
PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao giây thì số vi khuẩn lớn nhất?



Bài 2. Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

Bài 3. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108cm^2 như hình bên dưới. Tìm chiều cao của chiếc hộp sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



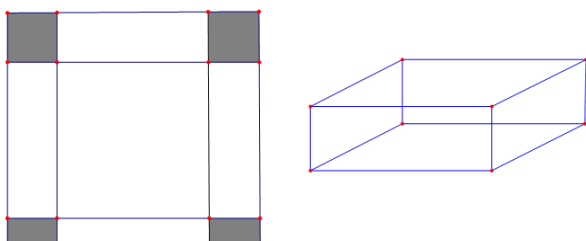
Bài 4. Nhà sản xuất dự định sử dụng hết 6 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, có đáy là hình vuông (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Tìm các kích thước của bể cá để bể cá có dung tích là lớn nhất?

Bài 5. Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng 10 m^3 , thùng tôn hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp. Trên thị trường, giá tôn làm đáy thùng là $90\,000$ đồng/ m^2 và giá tôn làm thành xung quanh thùng là $40\,000$ đồng/ m^2 . Hỏi người bán gạo đó cần đóng thùng đựng gạo với cạnh đáy bằng bao nhiêu để chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất?

Bài 6. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể sau t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì

nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Bài 7. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 40 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó



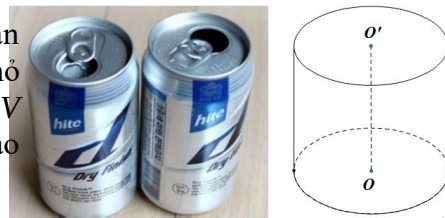
bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(\text{cm})$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

Bài 8. Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho đo được bởi công thức: $V = k(R - r)r^2$ với $0 \leq r < R$, trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

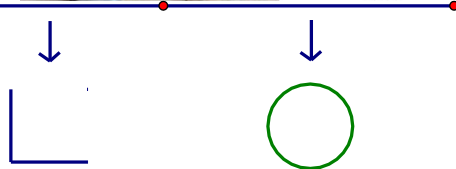
Bài 9. Một vật chuyển động theo quy luật $S = -t^3 + 18t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính

từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Bài 10. Khi sản xuất vỏ lon sữa, lon bia hình trụ, các nhà sản xuất luôn đặt tiêu chí sao cho chi phí sản xuất vỏ lon là nhỏ nhất. Hỏi khi nhà sản xuất muốn thể tích của hộp sữa là $V \text{ cm}^3$, thì diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



Bài 11. Một sợi dây kim loại dài 60 dm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng bao nhiêu?



Bài 12. Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa và các suối nước đổ về hồ. Tính từ thời điểm 8 giờ sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức:

$$h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 24t \quad (t > 0). \text{ Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước}$$

khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

Bài 13. Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật không nắp có chiều cao là 60 cm, thể tích 96 000 cm^3 . Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70 000 VNĐ/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100 000 VNĐ/ m^2 . Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

Bài 14. Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu (biết số lít xăng tiêu thụ trong các ngày là như nhau).

Bài 15. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi

tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg/L). Hỏi sau khi tiêm

thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Bài 16. Ông A dự định sử dụng hết 5 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Bài 17. Ông Khoa muốn xây một bể cá chứa nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích 288 m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê công nhân xây bể là $500\,000 \text{ đồng/m}^2$. Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước một cách hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể cá đó là bao nhiêu?

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

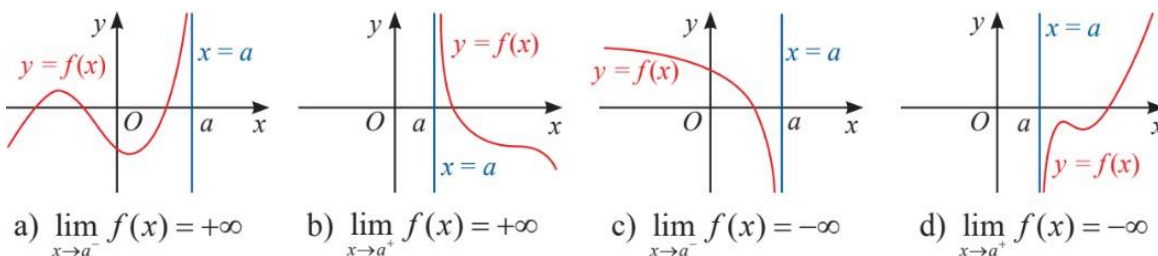
1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

Đường thẳng $x = a$ được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị

hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

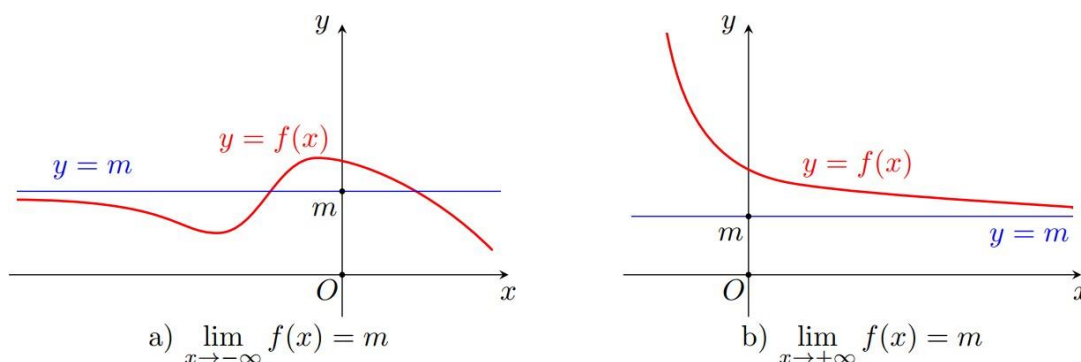
Từng trường hợp được minh họa trong hình dưới đây:



2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Đường thẳng $y = m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$.

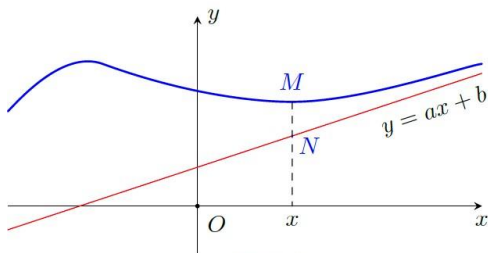
Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như Hình 5.



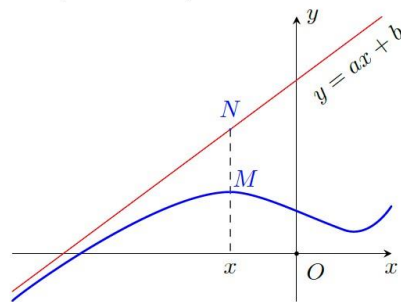
3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

Định nghĩa: Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Nhận xét: Giả sử đường thẳng $y = ax + b$, ($a \neq 0$) là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ và điểm N thuộc đường thẳng $y = ax + b$ có cùng hoành độ x . Khi đó, độ dài MN tiến tới 0 khi $x \rightarrow +\infty$ (Hình 16a) hay khi $x \rightarrow -\infty$ (Hình 16b).



Hình 16a



Hình 16b

***Chú ý:** Để xác định hệ số a, b của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có thể áp dụng công thức sau:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \text{ hoặc } a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax].$$

$x \rightarrow +\infty$

x

$x \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow -\infty$

x

$x \rightarrow -\infty$

(Khi $a = 0$ thì ta có tiệm cận ngang $y = b$).

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có

thể lắp ráp được $N(x) = \frac{50x}{x+4}$ ($x \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y = N(x)$

là một hàm số xác định trên $[0; +\infty)$, khi số ngày đào tạo tăng lên, hãy tính số bộ phận một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá bao nhiêu?

Bài 2. Một bể chứa 1 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 20 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 30 lít/phút.

a) Sau 20 phút, nồng độ muối trong bể bằng bao nhiêu (gam/lít)? Làm tròn đến hàng phần trăm.

b) Sau t phút, nồng độ muối trong bể bằng bao nhiêu (gam/lít)? Tính theo t .

c) Nếu cứ bơm liên tục thì nồng độ muối trong bể như thế nào?



Hình ảnh mang tính chất minh họa
(Nguồn: Internet)

Bài 3. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $F(x) = 60\,000 + 250x$. Gọi $\bar{F}(x)$ là hàm số biểu thị chi phí trung bình (đơn vị:

nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm ($x \geq 0$), khi đó, hãy tính chi phí trung bình tối đa để sản xuất một sản phẩm.

Bài 4. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t+10}{t+5}, \quad f(t) \text{ được tính bằng nghìn người (Nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD)}$$

Việt Nam, 2020). Khi đó, số dân tối đa của thị trấn không vượt quá bao nhiêu?

Bài 5. Một công ty chuyên sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là:

$C(x) = 2x + 50$ (triệu đồng), khi đó $G(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất cho mỗi sản phẩm.

Khi đó, chi phí sản xuất tối đa cho mỗi sản phẩm không vượt quá bao nhiêu?

Bài 6. Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử thông kê được rằng trung bình một tổ sản xuất với x người thì số sản phẩm sản xuất được trong một thời gian cố định được tính bằng công

thức $P(x) = \frac{5\,000x}{4x + 25}$. Hãy tìm số sản phẩm sản xuất được tối

đa khi số người tham gia là rất lớn?



Bài 7. Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong x (tháng) được tính bởi công thức

$$S(x) = 300 \left(2 + \frac{4}{x+2} \right) \text{ với } x \geq 1. \text{ Xem } y = S(x) \text{ là một hàm số xác định trên } [1; +\infty). \text{ Khi đó,}$$

hãy tính xem số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn bao nhiêu sản phẩm?

Bài 8. Định luật vạn vật hấp dẫn của Newton được cho bởi công thức $F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$. Trong đó

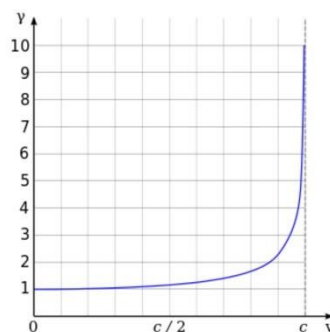
F là lực hấp dẫn giữa 2 vật thể bất kì, G là hằng số hấp dẫn, m_1, m_2 là khối lượng các vật, r là khoảng cách giữa chúng. Đồ thị của công thức này có tiệm cận đứng là $r = 0$, điều này có nghĩa là khi r dần về 0 thì lực hấp dẫn tiến đến bao nhiêu?

Bài 9. Một ứng dụng của hàm số trong vật lý là hệ số tương đối

tính Lorentz được cho bởi công thức $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, với v là

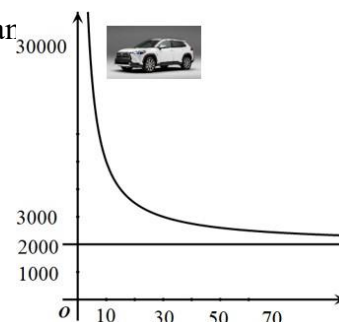
vận tốc tương đối giữa các hệ quy chiếu quán tính, c là tốc độ ánh sáng trong chân không. Hàm này được sử dụng trong thuyết tương đối đặc biệt của Einstein để mô tả các hiệu ứng tương đối tính có đồ thị trông như hình bên.

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho, hãy cho biết khi hệ số tương đối dần về $+\infty$ thì vận tốc gần bằng bao nhiêu?



Bài 10. Một chiếc xe ô tô mới mua có giá 30 000 USD. Sau thời gian t (năm), người ta xác định giá trị của xe ô tô đó là

$$f(t) = \frac{30000 + 2000t}{t} \text{ (USD).}$$



- a) Sau 15 năm, giá trị của xe ô tô đó bằng bao nhiêu (USD)?
b) Khi thời gian tăng lên, hỏi giá trị của xe ô tô đó ngày càng bằng bao nhiêu?

Bài 11. Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15%, giả sử thêm vào dung dịch x (gam) muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ $f(x)\%$.

- b) Khi thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng và không vượt quá bao nhiêu %.

Bài 12. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t+10}{t+5} \text{ (} f(t) \text{ được tính bằng nghìn người) (Nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD)}$$

Việt Nam, 2020). Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

- a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2025 là bao nhiêu?
b) Dân số của thị trấn đó không thể vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Bài 13. Số lượng xe máy điện bán được của một cửa hàng bán xe máy điện trong địa bàn thành phố Vinh trong tháng thứ x được tính theo công thức $f(x) = 50 - \frac{30}{2+x}$, trong đó $x \geq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là bao nhiêu?
- Muốn số lượng xe bán ra trong tháng đạt mức từ 45 xe trở lên trong một tháng thì cần sau bao nhiêu tháng?
- Khi x càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức bao nhiêu xe một tháng?

Bài 14. Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách Toán học. Biết phí xuất bản là 7 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 50 000 đồng. Gọi t (≥ 1) là số cuốn sách sẽ in và $f(t)$ (Đơn vị nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách. Khi đó, chi phí trung bình của mỗi cuốn sách thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu ?



Bài 15. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 40 000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả 6 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi x ($x \geq 1$) là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $P(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu

mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $F(x) = \frac{P(x)}{x}$. Xem $F(x)$ là hàm số theo x xác định trên nửa

khoảng $[1; +\infty)$. Khi đó, chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu ?

Bài 16. Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $f(t) = \frac{20t+5}{t+2}$, $t \geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá

bao nhiêu nghìn người?

Bài 17. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước lượng chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{400x+10}{100-x}$ (triệu đồng), $0 < x < 100$. Để đạt được gần như loại bỏ

100% chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy thì cần chi phí là bao nhiêu ?

Bài 18. Một công ty sản xuất đồ chơi ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x^2 + x + 25$ (nghìn đồng). Gọi $f(x)$ là chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm.

Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$, coi $x \in [0; +\infty)$.

Bài 19. Một bể chứa 6 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đồ nước muối có nồng độ 25 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử sau t phút, tỉ số giữa khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể (đơn vị gam/lít) là một hàm $f(t)$. Hãy xác định

hàm số $f(t)$, coi $t \in [0; +\infty)$ và xác định nồng độ muối tối đa có trong bể.

BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Sơ đồ khảo sát hàm số

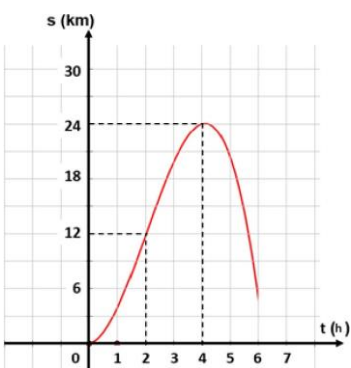
- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.
- **Bước 2.** Xét sự biến thiên của hàm số.
 - + Tìm các giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).
 - + Tính đạo hàm y' và tìm các điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0.
 - + Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên, cực trị của hàm số (nếu có).
- **Bước 3.** Vẽ đồ thị hàm số
 - + Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).
 - + Xác định các điểm đặc biệt của đồ thị: cực trị, giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (trong trường hợp đơn giản), ...
 - + Nhận xét về đặc điểm của đồ thị: chỉ ra trục đối xứng, tâm đối xứng (nếu có).

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

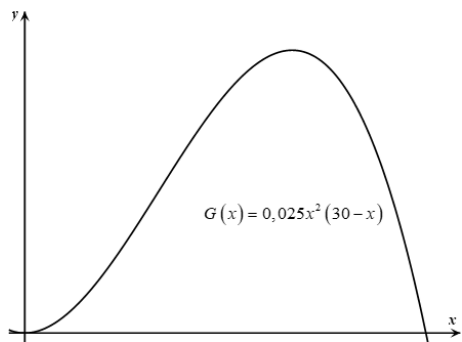
Bài 1. Thầy An tham dự giải “Đi bộ trực tuyến Ngành Giáo dục và Đào tạo Edu Run-HCMC” năm 2024. Quãng đường thầy An đi được biểu diễn bằng hàm số $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ (với $a \neq 0$) có đồ thị như hình bên.

(trong đó t là thời gian tính bằng giờ, s là quãng đường tính bằng km).

Khi đó, vận tốc tối đa của thầy An đạt được là bao nhiêu?

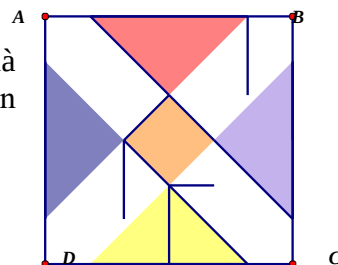


Bài 2. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là số



miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($0 < x < 30$). Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là bao nhiêu?

Bài 3. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với ABCD. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



Bài 4. Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1 000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

Bài 5. Bạn A có một đoạn dây mềm và dẻo không đàn hồi 20 m, bạn chia đoạn dây thành hai phần, phần đầu gấp thành một tam giác đều. Phần còn lại gấp thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu (m) để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

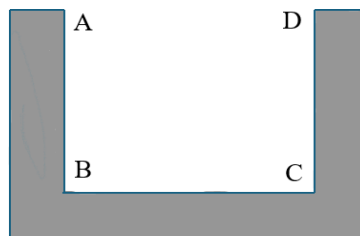
Bài 6. Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Đặt $f(t)$ gam/lít là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p (kết quả thể hiện dưới dạng số thập phân).



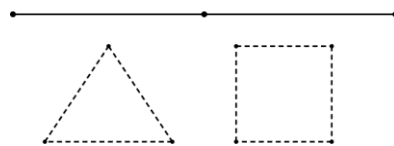
Bài 7. Ông A dự định sử dụng hết $6,7 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 8. Hình dưới đây là mương dẫn nước thủy lợi tại một địa phương phục vụ tưới tiêu cho ruộng đồng. Phần không gian trong mương để nước chảy có mặt cắt ngang là hình chữ nhật ABCD. Với điều kiện lưu lượng nước qua mương cho phép thì diện tích mặt cắt ABCD là $0,48 \text{ m}^2$. Để đảm bảo yêu cầu kỹ thuật tốt nhất cho mương, người ta cần thiết kế sao cho tổng độ dài $T = AB + BC + CD$ là

ngắn nhất. Khi đó chiều rộng đáy mương bằng bao nhiêu (biết chiều rộng phải dưới 1m, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

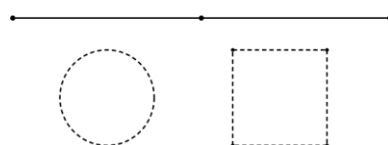


Bài 9. Cắt một đoạn dây dài 60m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một tam giác đều có diện tích S_1 , đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ bên).



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Bài 10. Cắt một đoạn dây dài 30m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một đường tròn có diện tích S_1 , đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ bên).



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Bài 11. Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với

m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m + n$ bằng bao nhiêu?

Bài 12. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (hình vẽ dưới). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Bài 13. Nhà máy A chuyên sản

xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$

(triệu đồng). Cho phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Tính chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng.

b) Tính số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B.

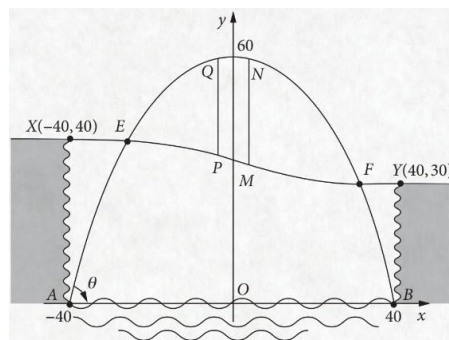
c) Xác định hàm số biểu thị lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B.

d) A bán cho B khoảng bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất?

Bài 14. Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.

Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình

hóa bằng phương trình: $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$.

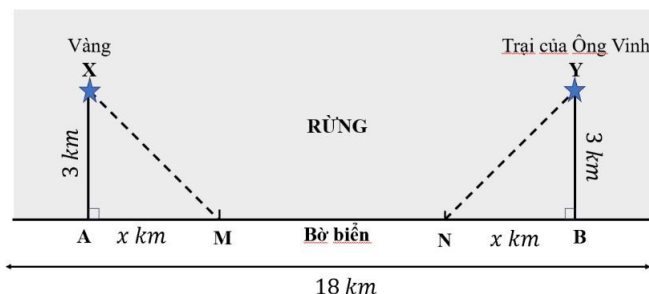


Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của parabol và đường XY . Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy ; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Bài 15. Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng. Anh ta tìm thấy vàng ở X , cách điểm A : 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của ông Vinh nằm ở Y , cách điểm B :

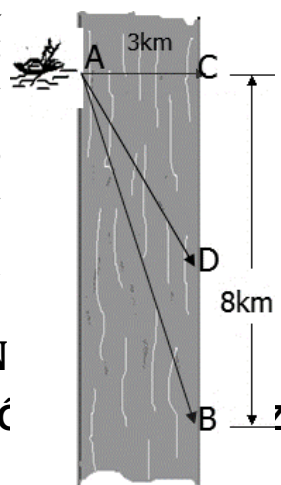
3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 3$ km,

$AM = NB = x$ km và $AX = BY = 3$ km. (Như hình vẽ)



Khi đang đào vàng, ông Vinh bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50\log(t + 2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h. Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua điểm M, N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

Bài 16. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: phút) để người đàn ông đến B .



Chủ đề 2. TỌA ĐỘ VECTO TRONG KHÔNG

Bài 1. BÀI TOÁN VỀ VECTO VÀ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG

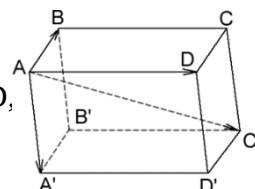
PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. VECTO TRONG KHÔNG GIAN

1) Quy tắc hình hộp:

Nếu hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có ba cạnh xuất phát từ A là AB , AD , AA' và có đường chéo là AC' thì khi đó ta có quy tắc hình hộp

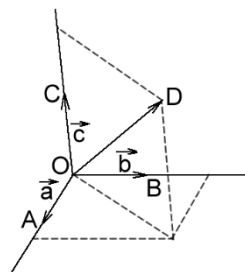
là: $AB + AD + AA' = AC'$.



2) Phân tích một vectơ theo 3 vectơ không đồng phẳng:

Trong không gian cho ba vectơ không đồng phẳng a, b, c . Khi đó

với mọi vectơ x ta đều tìm được một bộ ba số m, n, p sao cho $x = ma + nb + pc$. Ngoài ra bộ ba số m, n, p là duy nhất.

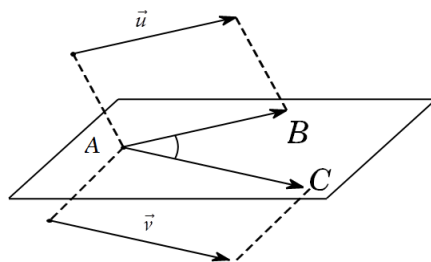


3) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:

a) Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho u và v là hai vectơ khác 0 . Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $AB = u, AC = v$. Khi đó ta gọi góc BAC

$(0^\circ \leq \angle BAC \leq 180^\circ)$ là góc giữa hai vectơ u và v



trong không gian, kí hiệu là (u, v) .

b) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Tích vô hướng của hai vectơ u và v là một số, được ký hiệu $u \cdot v$ và được xác định bởi

$$u \cdot v = |u| |v| \cos(u, v)$$

$$u \cdot v = |u| |v| \cos(u, v) \text{ từ đó suy ra cosin góc giữa hai vectơ } u \text{ và } v \text{ là } \cos(u, v) = \frac{u \cdot v}{|u| |v|}$$

Đặc biệt khi $u \perp v \Leftrightarrow \cos(u, v) = 0 \Leftrightarrow u \cdot v = 0$.

II. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1) Hệ trục tọa độ:

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ a . Khi đó luôn tồn tại duy nhất bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ sao

cho: $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$.

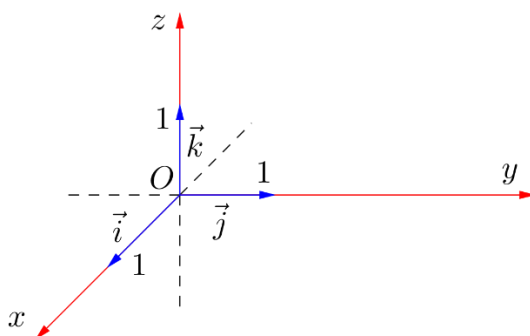
$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

Ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ đó là tọa độ của

vectơ a đối với hệ tọa độ $Oxyz$ cho trước và

viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$$



2) Tọa độ vector:

$$\text{Cho } \vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = b_1 \end{array} \right.$$

$\vec{a} \rightarrow \vec{b}$

$$+ \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{array} \right.$$

$$+ \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

$$+ k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3) \text{ với } k \in \mathbb{R}$$

$$+ \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \text{ và } \vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \text{ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực } k \text{ sao cho}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = kb_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{array} \right.$$

$$\text{Hoặc } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \text{ với } b_1, b_2, b_3 \neq 0.$$

$$+ \text{Tích vô hướng của 2 vector: } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$$

$$+ \text{Độ dài vector: } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$+ \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$$

$$+ \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

3) Tọa độ của điểm

$$\text{Cho ba điểm } A(x_A; y_A; z_A); B(x_B; y_B; z_B); C(x_C; y_C; z_C).$$

$$\text{Nếu } M(x_M; y_M; z_M) \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } AB \text{ thì } M \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

$M \quad M \quad M$

$$\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right)$$

Nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$$

Nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \right)$$

4) Tích có hướng của 2 vector và ứng dụng:

Trong không gian Oxyz cho hai vector: $a = (a_1; a_2; a_3)$; $b = (b_1; b_2; b_3)$.

Vector tích có hướng của a và b là: $\left[\vec{a}, \vec{b} \right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$

***Chú ý:** $\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} = ad - bc$

a) Tính chất:

a cùng phương $b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} = \vec{0}$

$\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} \perp \vec{c}$

$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot a, b$

a, b, c đồng phẳng $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} \cdot \vec{c} = 0$

b) Ứng dụng:

Diện tích tam giác: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{bmatrix} \vec{AB} & \vec{AC} \end{bmatrix} \right|$

Thể tích tứ diện: $V_{A.BCD} = \frac{1}{6} \left| \begin{bmatrix} \vec{AB} & \vec{AC} \end{bmatrix} \cdot \vec{AD} \right|$

Thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left| \begin{bmatrix} \vec{AB} & \vec{AD} \end{bmatrix} \cdot \vec{AA'} \right|$

5) Phương trình mặt cầu:

a) Định nghĩa 1: Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính R có dạng:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

***Chú ý:** Phương trình mặt cầu tâm $O(0; 0; 0)$ bán kính R có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

b) Định nghĩa 2: Mọi phương trình có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ bán kính

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

6) Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

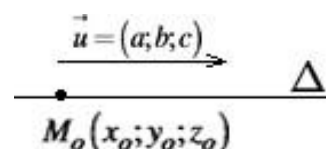
+ Cho mặt phẳng (α) đi qua $M_o(x_o; y_o; z_o)$ và có vec tơ pháp tuyến $n = (A; B; C)$.

+ Phương trình tổng quát của (α) là: $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$

hay: $Ax + By + Cz + D = 0$

7) Phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng:

qua $M_o(x_o; y_o; z_o)$



Cho đường thẳng Δ VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$

• Phương trình tham số: $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

• Phương trình chính tắc: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ với $a; b; c \neq 0$.

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Theo định luật II Newton: gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối

lượng của vật: $F = ma$, trong đó

a (m/s²) là vectơ gia tốc, F (N) là

vectơ lực tác dụng lên vật, m (kg) là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng khối lượng 0,5 kg một gia tốc 100 m/s² thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?



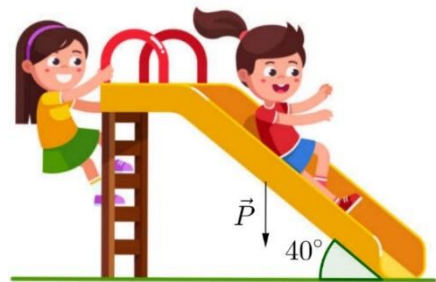
Bài 2. Một em bé cân nặng $m = 20$ kg trượt trên cầu thang trượt dài 2 m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 40° .

a) Tính độ lớn của trọng lực $P = mg$ tác dụng lên em bé, biết $g \approx 10$ m/s².

b) Cho biết công A (J) sinh bởi một lực F có độ

dịch chuyển d được tính theo công thức

$A = F \cdot d$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực P khi em bé trượt hết chiều dài cầu trượt (làm tròn đến hàng đơn vị).

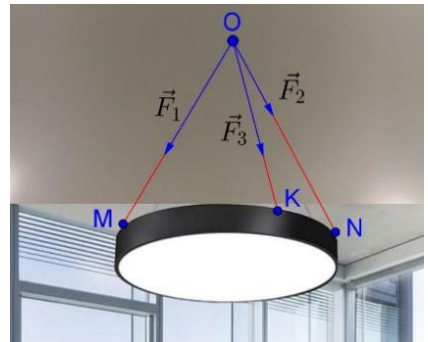


Bài 3. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi giây không dẫn phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm M ,

N , K trên đường tròn sao cho lực căng F_1, F_2, F_3 lần

lượt trên mỗi dây OM, ON, OK đôi một vuông góc với

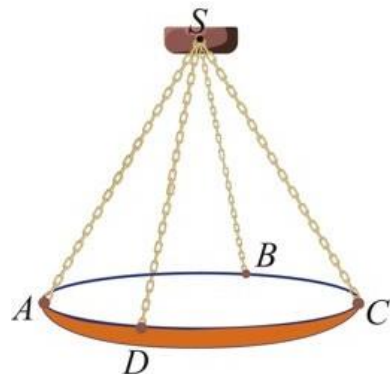
nhau và $F_1 = F_2 = F_3 = 20\sqrt{3}$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn đó.



Bài 4. Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 8$ kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $SABCD$ là hình chóp tứ giác

đều có $\angle ASC = 60^\circ$ (Hình).

Biết $P = mg$ trong đó g là vectơ gia tốc rơi tự do có



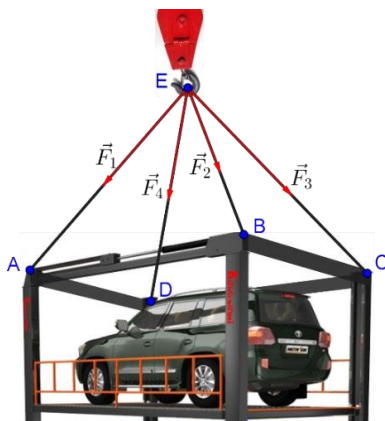
độ lớn $9,8 \text{ m/s}^2$, P là trọng lực tác động vật có đơn vị là N, m là khối lượng của vật có đơn vị kg. Tính độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích (tính chính xác đến hàng phần mười).

Bài 5. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° (Hình 4). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng.

Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực

căng F_1, F_2, F_3, F_4 đều có cường độ là $5000\sqrt{3}$ (N) và

trọng lượng của khung sắt là 3 000 (N).



Bài 6. Một kiện hàng có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$. Kiện hàng đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° (Hình 5). Chiếc cần cẩu kéo kiện hàng lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của kiện hàng (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực

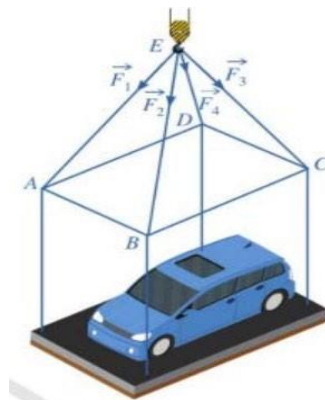
căng F_1, F_2, F_3, F_4 đều có cường độ là $1000\sqrt{2}$ (N).



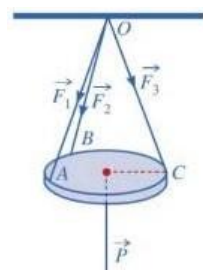
Bài 7. Một chiếc ô tô Hyundai Grand i10 được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 45° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết khối lượng chiếc xe ô tô Hyundai grand i10 là 1 051 kg và trọng lượng khung sắt là 2 490N; cường độ các

lực căng F_1, F_2, F_3, F_4 là bằng nhau. Tính cường độ lực căng

F_1 (tính chính xác đến hàng phần mười).

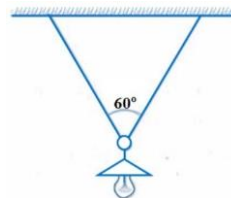


Bài 8. Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng F_1, F_2, F_3 lần



lượt trên mỗi dây OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 20 \text{ (N)}$ (xem hình vẽ). Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó (tính chính xác đến hàng phần mười).

Bài 9. Người ta treo một bóng đèn có khối lượng $m = 1 \text{ kg}$ bằng cách luồn sợi dây qua một cái móc của đèn và hai đầu dây được gắn chặt trên trần nhà. Hai nửa sợi dây có chiều dài bằng nhau và hợp với nhau một góc bằng 60° . Tính lực căng của mỗi nửa sợi dây là bao nhiêu? Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Bài 10. Người ta vận chuyển một thùng hàng có dạng hình hộp chữ nhật bằng cách móc 4 dây cáp vào 4 góc trên của thùng hàng và đầu còn lại móc vào cần cẩu như hình vẽ. Biết rằng các đoạn dây cáp có độ dài bằng nhau và góc tạo bởi hai đoạn dây cáp đối diện nhau là 60° . Chiếc cần cẩu kéo thùng hàng lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng F_1, F_2, F_3, F_4



chịu được tối đa lực căng là $5\,000 \text{ N}$. Hỏi cần cẩu nâng được thùng hàng có khối lượng (đơn vị kg) tối đa là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)? Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Bài 11. Một sân Tennis với hệ trục tọa độ $Oxyz$ được chọn như hình bên dưới (Hình 1).

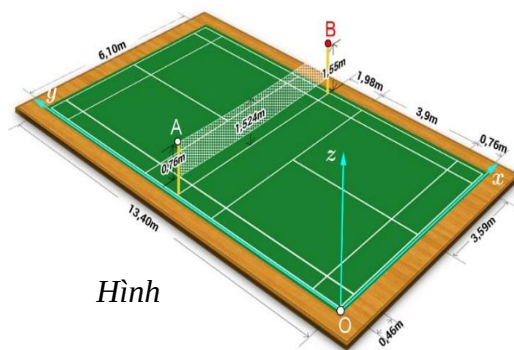
- Mặt sân nằm trong mặt phẳng tọa độ nào?
- Trục Oz có vuông góc với mặt sân không?



Hình 1

Bài 12. Một sân cầu lông có kích thước cho trong hình bên dưới (Hình 3), với hệ trục tọa độ $Oxyz$ được đã chọn.

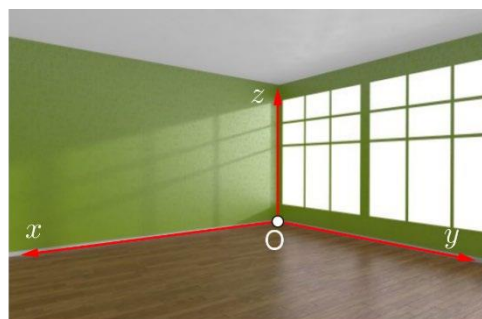
Em hãy xác định tọa độ của vector $\vec{AB}$.



Hình

Bài 13. Một căn phòng với hệ trục tọa độ $Oxyz$ được chọn như hình bên dưới (Hình 2).

Em hãy cho biết mặt bên phải (nơi ánh sáng chiếu vào) của căn phòng nằm trong mặt phẳng tọa độ nào?



Hình 2

Bài 14. Cho biết máy bay Airbus chở hành khách đang bay với vector vận tốc $\vec{a} = (300; -200; 400)$



(đơn vị: km/h). Một máy bay quân sự B bay ngược hướng và có tốc độ gấp 3 lần tốc độ của máy bay A .

- Tìm tọa độ vector vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B .
- Tính tốc độ của máy bay B .

Bài 15. Trong không gian hệ trục tọa độ Oxyz (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí $I(1; -2; -3)$ và được thiết kế bán kính



phủ sóng là 5 000 m.

- Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian.
- Nhà bạn Minh Hiền và bạn Trúc Linh có vị trí tọa độ lần lượt là $M(1; 2; 0)$ và $N(-3; 1; 0)$. Hỏi Minh

Hiền và Trúc Linh dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không?

Bài 16. Ở một số vùng quê ở Việt Nam, trước mỗi nhà thường có một khoảng sân rộng để phơi lúa vào mùa gặt và cũng là nơi để tổ chức một số sự kiện: đám cưới, đám hỏi, thôi nôi,...

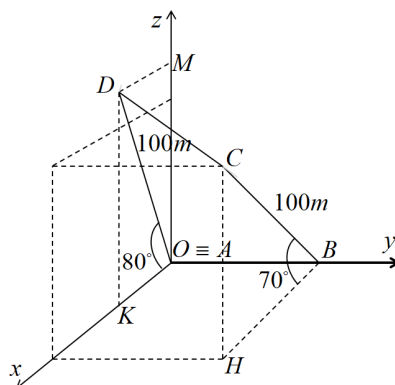
Bác An tính xây một sân trước cửa nhà hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh lần lượt là

$AB = 5$ m và $AD = 12$ m. Để tiện cho việc thoát nước khi trời mưa và khi rửa sân nên bác An xây vị trí B thấp hơn vị trí A là 5 cm, vị trí D thấp hơn vị trí A là 8 cm. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ để xác định xem vị trí C thấp hơn vị trí A bao nhiêu cm? (làm tròn đến cm).



Bài 17. Vào dịp tết Nguyên Đán, mĩ pháo hoa A và B được đặt trong 2 mặt phẳng song song với nhau và cách nhau 2 m, ống dẫn A đặt nghiêng so với mặt đất một góc 80° và ống dẫn B nghiêng so với mặt đất một góc 70° . Hai pháo A và B được bắn đồng thời và cùng đi được quãng đường 100 m thì nổ. Người ta tính toán rằng để tạo ra hiệu ứng đẹp nhất thì vị trí nổ của 2 quả pháo A và B không cách

nhau quá 50 m. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Hỏi với cách đặt vị trí như trên thì khi nổ, hai quả pháo A và B cùng nổ có tạo ra hiệu ứng đẹp nhất chưa? (ta xem như 2 quả pháo hoa bắn theo đường thẳng và tốc độ bay như nhau).



Bài 18. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng radar của nước X được đặt trên bán đảo Y ở vị trí $I(-2;1;-1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa 500 km.

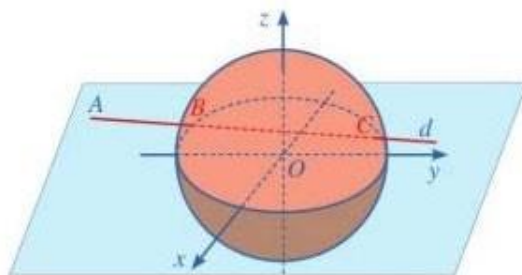
- Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của radar trong không gian.
- Hai chiếc máy bay do thám của hai nước A và B đang bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $M(-200;100;-250)$ và $N(350;-100;300)$. Hỏi radar của nước X có thể phát hiện ra hai chiếc máy bay do thám của nước A và B không?

Bài 19. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh – Khánh Hòa ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang

chuyển động theo đường thẳng d có phương trình
$$\begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -200 + 80t \\ z = 10 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ và hướng về đài}$$

kiểm soát không lưu (như hình vẽ).

- Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian.
- Xác định quãng đường mà máy bay nhận được tín hiệu của đài kiểm soát không lưu.
- Tính khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu.



Chủ đề 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Bài 6. MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. KHOẢNG BIẾN THIÊN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

a) Định nghĩa

Với mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi Bảng 1.

Gọi u_1 và u_{k+1} lần lượt là đầu mút trái của nhóm đầu tiên và đầu mút phải của nhóm cuối cùng.

Hiệu $R = u_{k+1} - u_1$ được gọi là *khoảng biến thiên* của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Bảng 1

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	$[u_3; u_4)$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	n_3	...	n_k

b) Ý nghĩa của khoảng biến thiên

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đo mức độ phân tán của mẫu số liệu đó.
- Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- Khoảng biến thiên chỉ sử dụng hai giá trị a_1 và a_{m+1} của mẫu số liệu nên đại lượng đó dễ bị ảnh hưởng bởi các *giá trị bất thường*.

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

Lưu ý: Đối với mẫu số liệu ghép nhóm mà ta biết mẫu số liệu không ghép nhóm sinh ra nó thì ta cũng có thể chọn khoảng biến thiên của mẫu số liệu không ghép nhóm chính là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm.

2. KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

a) Định nghĩa

Với mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi Bảng 1.

Gọi Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Ta gọi hiệu $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ là khoảng tứ

phân vị của mẫu số liệu đó.

Lưu ý: Tứ phân vị thứ i , kí hiệu là Q_i , với $i = 1, 2, 3$ của mẫu số liệu ghép nhóm (Bảng 1) được xác định như sau:

$$Q_i = u_m + \frac{\frac{i.n}{4} - C}{n_m} (u_{m+1} - u_m),$$

Trong đó:

- $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ là cỡ mẫu;
- $[u_m; u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ i ;
- n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ i ;

$$C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}.$$

b) Ý nghĩa khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và là một đại lượng cho biết mức độ phân tán của nửa giữa mẫu số liệu.
- Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm giúp xác định các giá trị bất thường của mẫu đó. Khoảng tứ phân vị thường được sử dụng thay cho khoảng biến thiên vì nó loại trừ hầu hết giá trị bất thường của mẫu số liệu và nó không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường đó.

3. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM

a) Định nghĩa

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở Bảng 2.

Bảng 2

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1; a_2)$	c_1	n_1
$[a_2; a_3)$	c_2	n_2
...	...	...
$[a_k; a_{k+1})$	c_m	n_m
		$n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$

- Gọi $\bar{x}$ là số trung bình cộng của mẫu số liệu đó. Ta có: $\bar{x} = \frac{1}{n} (n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k).$

- Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S^2 , được tính bởi công thức:

$$S^2 = \frac{1}{n} [n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (c_k - \bar{x})^2]$$

trong đó: $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ là cỡ mẫu.

- Căn bậc hai số học của phương sai, kí hiệu là s , được gọi là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó, nghĩa là $s = \sqrt{S^2}$.

Lời bình: Chúng ta có thể tính phương sai thông qua số trung bình bình phương.

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} (n_1 c_1^2 + n_2 c_2^2 + \dots + n_k c_k^2)$$

$$S^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$

b) Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn

- Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.
- Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn.

4. MỐT CỦA SỐ LIỆU GHEP NHÓM

Nhóm chứa một của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Giả sử nhóm chứa một là $[u_m; u_{m+1})$, khi đó một của **mẫu số liệu ghép nhóm**, kí hiệu là

$$M_o, \text{ được xác định bởi công thức } M_o = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

***Chú ý:** Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa một thì $n_{m-1} = 0$. Nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa một thì $n_{m+1} = 0$.

❖ Ý nghĩa của một của mẫu số liệu ghép nhóm

- Một của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu. Một của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm M_o xấp xỉ với một của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh M_o thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.

- Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa một và nhiều một.

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Kết quả thăm dò ngẫu nhiên thời gian chờ xe buýt mỗi ngày của một số sinh viên được biểu thị ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Số người	4	5	6	3	2

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu đã cho. Kết quả cho biết điều gì?

Bài 2. Trong một phòng thí nghiệm, nghiên cứu thời gian sạc pin của hai loại điện thoại X và Y. Bảng dưới đây biểu thị thời gian sạc pin (phút) của hai loại điện thoại:

Thời gian sạc (phút)	[30;60)	[60;90)	[90;120)	[120;150)	[150;180)
Số điện thoại loại X	0	8	25	32	35
Số điện thoại loại Y	20	12	15	23	30

Tính khoảng biến thiên và sánh thời gian sạc pin của hai loại điện thoại trên?

Bài 3. Mẫu số liệu sau cho biết số lượng sách bán được tại một hiệu sách trong 10 ngày:

15	22	20	30	28	25	40	37	35	32
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Tìm khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu trên.

Bài 4. Một nghiên cứu theo dõi thời gian làm bài tập về nhà của học sinh lớp 12C4 tại trường Trung học Phổ thông X. Kết quả được mô tả ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)
Số học sinh	5	10	8	3

- Tính khoảng biến thiên R cho mẫu số liệu ghép nhóm.
- Nếu biết học sinh làm bài tập ít nhất là 32 phút và nhiều nhất là 68 phút, thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc là bao nhiêu?

Bài 5. Cân nặng của học sinh lớp 10A và 10B ở một trường trung học phổ thông được thống kê ở bảng sau:

Cân nặng (kg)	[40;45)	[45;50)	[50;55)	[55;60)	[60;65)	[65;70)
Số học sinh lớp 10A	3	5	10	7	4	1
Số học sinh lớp 10B	2	8	7	6	3	2

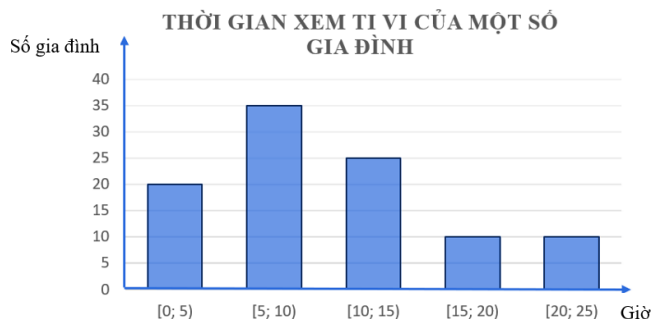
So sánh theo khoảng biến thiên, cân nặng của học sinh lớp nào có độ phân tán lớn hơn?

Bài 6. Nhà đầu tư theo dõi doanh thu bán một loại sản phẩm của hai cửa hàng bán lẻ trong 5 năm. Số liệu được thống kê ở bảng sau:

Số tiền doanh thu (triệu đồng)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)
Số tháng của cửa hàng A	5	15	25	10	5
Số tháng của cửa hàng B	10	10	20	10	10

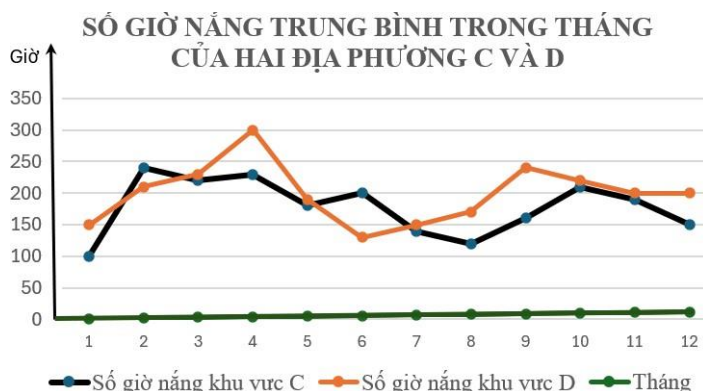
So sánh giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của doanh thu hàng tháng của hai cửa hàng A và B. Cửa hàng nào có doanh thu biến động lớn hơn? Đầu tư vào cửa hàng nào “rủi ro” hơn?

Bài 7. Kết quả điều tra về số giờ xem ti vi của một số hộ gia đình được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây:



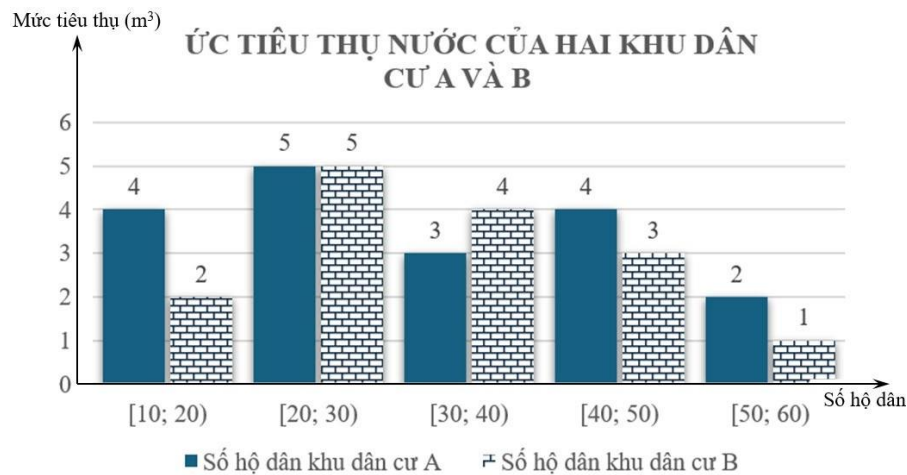
Hãy lập bảng tần số ghép nhóm, tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và giá trị trung bình của mẫu số liệu.

Bài 8. Hình sau là biểu đồ biểu diễn giờ nắng trung bình hàng tháng của hai địa phương C và D.



- Lập bảng số liệu ghép nhóm với độ dài các nhóm là 40 và đầu mút phải của nhóm cuối cùng là 300.
- Tìm khoảng tứ phân vị của số giờ nắng mỗi khu vực và cho biết số giờ nắng của khu vực nào ít biến động hơn.

Bài 9. Biểu đồ sau mô tả kết quả điều tra về mức tiêu thụ nước hàng tháng của hai khu dân cư A và B.



- a) Hãy xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm và lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên.
- b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm thì khu dân cư nào có mức tiêu thụ nước đồng đều hơn?
- c) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thì khu dân cư nào có mức tiêu thụ nước đồng đều hơn?
- Bài 10.** Điểm thi môn Toán của 25 học sinh được chọn ngẫu nhiên trong kỳ thi Tốt nghiệp Trung học Phổ thông năm học 2024 – 2025 được thống kê lại như sau:

4,4	8,6	4,8	5,0	5,4	5,4	5,6
5,2	6,0	6,2	6,2	8,0	7,8	7,6
7,2	7,4	7,2	6,0	5,8	5,8	8,2
7,0	6,8	6,4	6,6			

- a) Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.
- b) Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là [4; 5) và độ dài mỗi nhóm bằng 1.
- c) Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Bài 11.** Người ta thống kê chiều cao của 40 học sinh lớp 12A ta được bảng sau:

Chiều cao (cm)	[150;154]	[155;159]	[160;164]	[165;169]	[170;174]	[175;179]
Số học sinh	5	7	8	9	6	5

- Tìm tứ phân vị thứ 2.
- Bài 12.** Người ta thống kê tuổi của 20 cá thể hổ tại 1 vườn bách thú ta được bảng sau:

Chiều cao (cm)	[10;11)	[11;12)	[12;13)	[13;14)	[14;15)	[15;16)
Số học sinh	2	3	6	4	4	1

- Tìm tứ phân vị thứ 1 và 3.

Bài 13. Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở bảng đây (đơn vị: kg)

Cân nặng (kg)	[1,0;1,1)	[1,1;1,2)	[1,2;1,3)	[1,3;1,4)
Số con giống A	8	28	32	17
Số con giống B	13	14	24	14

- Hãy so sánh cân nặng của lợn con mới sinh giống A và giống B theo số trung bình và trung vị.
- Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của cân nặng lợn con mới sinh giống A và của cân nặng lợn con mới sinh giống B?
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

Bài 14. Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik 3×3 , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Số lần	4	6	8	4	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là bao nhiêu?

Bài 15. Mẫu số liệu dưới đây ghi số lượt xe ô tô khi đi qua trạm thu phí A trong 30 ngày (đơn vị: lượt).

100	134	124	150	138	140	155	176	180	198
156	173	185	163	165	185	190	143	179	123
176	150	167	168	198	178	182	164	175	153

- Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có năm nhóm ứng với năm nửa khoảng: $[100,120), [120,140), [140,160), [160,180), [180, 200)$.
- Xác định số trung bình cộng, trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu

Bài 16. Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá (triệu đồng/m ²)	[10;14)	[14;18)	[18;22)	[22;26)	[26;30)
Số khách hàng	54	78	120	45	12

- Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhất?

Bài 17. Số cuộc gọi điện thoại anh An thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

Số cuộc gọi	[3;5]	[6;8]	[9;11]	[12;14]	[15;17]
Số ngày	5	10	3	10	2

Hỏi anh An gọi một ngày bao nhiêu cuộc gọi là nhiều nhất?

Bài 18. Anh Võ ghi lại cự li 40 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

Cự li (m)	[69,2;70)	[70;70,8)	[70,8;71,6)	[71,6;72,4)	[72,4;73,2)
Số lần	5	6	10	10	9

Hỏi Anh Võ ném khoảng bao nhiêu mét là nhiều nhất?

Bài 19. Cô Thúy Kiều rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của Cô Thúy Kiều được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số ngày	6	5	4	2	1

Hỏi Cô Thúy Kiều nhảy thời gian bao nhiêu phút là nhiều nhất?

Bài 20. Khi thống kê chiều cao của học sinh khối lớp 12 trong một trường trung học, ta thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Chiều cao (cm)	[150;156)	[156;162)	[162;168)	[168;174)	[174;180)	[180;186)
Số học sinh	5	18	40	26	8	3

Hãy tính giá trị trung bình, mốt, trung vị; tứ phân vị, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

Chủ đề 4. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN – ỨNG DỤNG

BÀI 7. DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. NGUYÊN HÀM

1) Định nghĩa

• **Định nghĩa:** Cho hàm số f xác định trên K . Hàm số F được gọi là **nguyên hàm** của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

• **Định lý:** Giả sử hàm số F là một nguyên hàm của hàm số f trên K .

Khi đó

a) Với mỗi hằng số C , hàm số $y = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của f trên K .

b) Ngược lại với mỗi nguyên hàm G của f trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K .

Kí hiệu: $\int f(x) dx = F(x) + C$

2) Tính chất của nguyên hàm

Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì:

$$\bullet \left(\int f(x) dx \right)' = f(x) \text{ và } \int f'(x) dx = f(x) + C;$$

$$\bullet \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx;$$

$$\bullet \text{ Với mọi số thực } k \neq 0 \text{ ta có } \int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

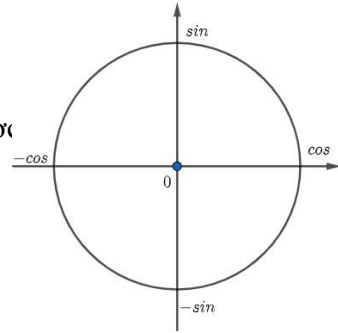
3) Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

1. $\int 0 dx = C$	6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
2. $\int dx = x + C$	7. $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	8. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + c, a \neq 0$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	9. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C, a \neq 0$
5. $\int e^x dx = e^x + C$	10. $\int a^{kx+b} dx = \frac{1}{k} \frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1, k \neq 0$

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Lấy đạo hàm sin và cos ta thực hiện theo chiều quay cùng kim đồng hồ.

Lấy nguyên hàm sin và cos ta thực hiện theo chiều quay ngược kim đồng hồ.



1. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$	9. $\int \cos(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
2. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	10. $\int \sin(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
3. $\int \tan x \, dx = -\ln \cos x + C$	11. $\int \tan(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax + b) + C$
4. $\int \cot x \, dx = \ln \sin x + C$	12. $\int \cot(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax + b) + C$
5. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$	13. $\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} \, dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$
6. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$	14. $\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} \, dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$
7. $\int (1 + \tan^2 x) \, dx = \tan x + C$	15. $\int (1 + \tan^2(ax + b)) \, dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$
8. $\int (1 + \cot^2 x) \, dx = -\cot x + C$	16. $\int (1 + \cot^2(ax + b)) \, dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$

4) Phương pháp tính nguyên hàm

• Phương pháp đổi biến số

Định lý 1: Nếu $\int f(u) \, du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f[u(x)] u'(x) \, dx = F[u(x)] + C.$$

***Chú ý:**

Trong thực hành, ta thường viết tắt $F[u(x)]$ là $F(u)$; $f[u(x)]$ là $f(u)$ (coi du là vi

phân của hàm số $u = u(x)$), nghĩa là $du = d(u(x)) = u'(x) \, dx$.

Khi đó công thức (1) được viết như sau:

$$\begin{aligned}\int f[\lfloor u(x) \rfloor] u'(x) dx &= \int f[\lfloor u(x) \rfloor] du(x) = \int f(u) du \\ &= F(u) + C = F[\lfloor u(x) \rfloor] + C.\end{aligned}$$

Ta nói đã thực hiện được phép đổi biến $u = u(x)$. (2)

• Các dấu hiệu đổi biến thường gặp

Dạng	Đặt t	Dạng	Đặt t
$\int f(ax+b)dx$	$t = ax + b$	$\int f(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$
$\int f(x^{n+1}) \cdot x^n dx$	$t = x^{n+1}$	$\int f(\cot x) \frac{-dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$
$\int f\left(\sqrt{x}\right) \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}$	$t = \sqrt{x}$	$\int f(e^x) \cdot e^x dx$	$t = e^x$
$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx$	$t = \sin x$	$\int f(\ln x) \frac{dx}{x}$	$t = \ln x$
$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx$	$t = \cos x$		

II. TÍCH PHÂN

1) Định nghĩa tích phân

• **Định nghĩa:** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

• Công thức tính tích phân

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Nhận xét:

+ Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

+ Nếu hàm số $f(x)$ không âm và liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Vậy $S = \int_a^b f(x)dx$.

2) Tính chất của tích phân

• **Định lý:** Giả sử các hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kì thuộc K . Khi đó ta có

$$1) \int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

$$3) \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx;$$

$$4) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

$$5) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \text{ với } k \in \mathbb{R}$$

3) Phương pháp tính tích phân

a) Phương pháp đổi biến

• Định lý:

Cho 1) Hàm $t = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$;

2) Hàm hợp $f(u(x))$ được xác định trên $[a; b]$;

3) $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$

Khi đó: $I = \int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$.

• Phương pháp chung

$$I = \int_a^b f(u(x))u'(x)dx$$

+ Bước 1: Đặt $t = u(x)$

+ Bước 2: Tính vi phân hai vế: $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

Đổi cận:

x	a	b
t	$u(a)$	$u(b)$

+ Bước 3: Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t

$$\text{Vậy: } I = \int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt = F(u(b)) - F(u(a))$$

III. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

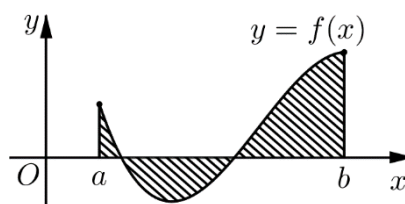
1) Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn

$[a; b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và

hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

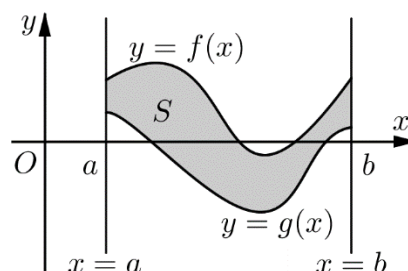


***Chú ý:** Nếu trên đoạn $[a; b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

2) Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Nếu hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục

trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x),$



$y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Một số bài toán ta phải xây dựng các hệ trục để áp dụng công thức ứng dụng.

+ Đường parabol đứng ứng với hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

+ Đường parabol nằm ngang thường gặp có phương trình $x = ay^2$ ($a \neq 0$), phương trình này

biến đổi thành $y = \pm \sqrt{\frac{x}{a}}$ ứng với hai nhánh phía trên và phía dưới trục hoành.

+ Đường tròn tâm $I(a, b)$ và bán kính R có phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

+ Đường tròn tâm $O(0; 0)$ và bán kính R có phương trình $x^2 + y^2 = R^2$, phương trình này

biến đổi thành $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ ứng với hai nhánh phía trên và phía dưới trục hoành.

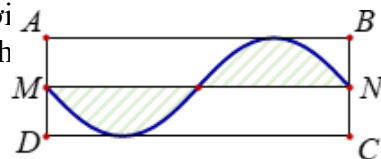
+ Đường elip phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có độ dài hai trục lần lượt bằng $2a$ và $2b$. ($a > b > 0$)

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cổng trường Đại học Bách Khoa Hà Nội có hình dạng parabol, chiều rộng 8 m, chiều cao 12,5 m. Diện tích của cổng bằng bao nhiêu?



Bài 2: Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen được giới hạn bởi cạnh AB, CD đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB = 2\pi$ (m), $AD = 2$ (m). Tính diện tích phần còn lại.

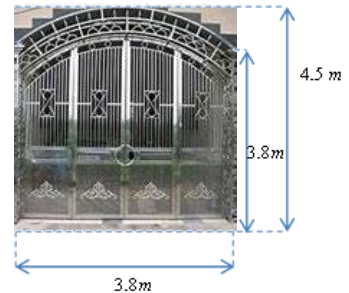


Bài 3: Một chiếc cổng có hình dạng là một parabol có khoảng cách giữa hai chân cổng là 8 m. Người ta treo một tấm phong hình chữ nhật có hai đỉnh M, N nằm trên Parabol và hai đỉnh P, Q nằm trên mặt đất như hình vẽ bên. Ở phần phía ngoài phong người ta mua hoa để trang trí với chi phí 200 000 đồng/m², biết $MN = 4$ m, $MQ = 6$ m. Hỏi số tiền để mua hoa trang trí gần với số tiền nào sau đây?

$$y = \frac{1}{20}x^2$$

$$y = \sqrt{20x}$$

Bài 4: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1 500 000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là bao nhiêu?

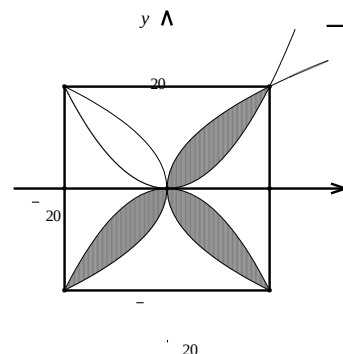


Bài 5: Ông X muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một parabol, chất liệu làm là inox. Giá 1 m² vật tư và công làm là 1 300 000 đồng. Hỏi ông X phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy.

Bài 6: Cho một mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng là 2 m, chiều dài gấp ba chiều rộng. Người ta chia mảnh vườn bằng cách dùng hai đường parabol, mỗi đường parabol có đỉnh là trung điểm mỗi cạnh dài và đi qua hai mút của cạnh dài đối diện. Tính tỉ số diện tích phần mảnh vườn nằm ở miền trong hai parabol với diện tích phần còn lại.

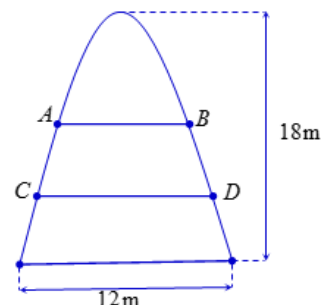
Bài 7: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên dưới.

- Diện tích một cánh hoa bằng bao nhiêu?
- Diện tích hoa văn trang trí bằng bao nhiêu?



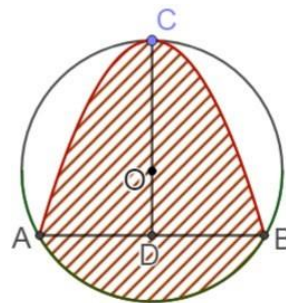
Bài 8: Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau.

Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng bao nhiêu?

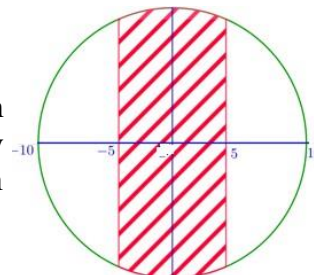


Bài 9: Một hoa văn hình tròn tâm O , ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh $AB = 4\sqrt{3}$ cm. Đường cong qua ba điểm: A ,

B, C là một phần của parabol. Diện tích phần gạch chéo bằng bao nhiêu?



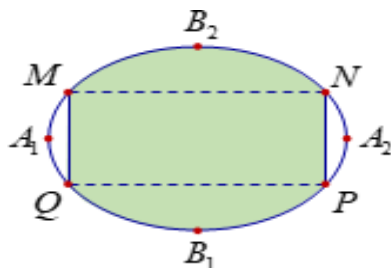
Bài 10: Một khu đất có hình dạng là một hình tròn với đường kính $d = 20$ m. Người ta muốn trồng rau trên dải đất rộng 10 m lấy tâm của đường tròn khu đất làm tâm đối xứng. Diện tích phần đất trống còn lại bao nhiêu m^2 ?



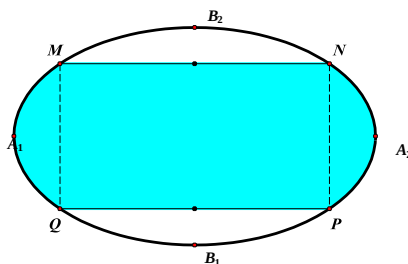
Bài 11: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa hình vuông cạnh 20 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau đều có hình dạng một nửa elip như hình vẽ. Biết một nửa trục lớn là $AB = 6$ cm, trục bé $CD = 8$ cm. Diện tích bề mặt của hoa văn đó bằng bao nhiêu?



Bài 12: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí sơn phần tô đậm là 200 000 đồng/m² và phần còn lại là 100 000 đồng/m². Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1 A_2 = 8$ m, $B_1 B_2 = 6$ m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3$ m?

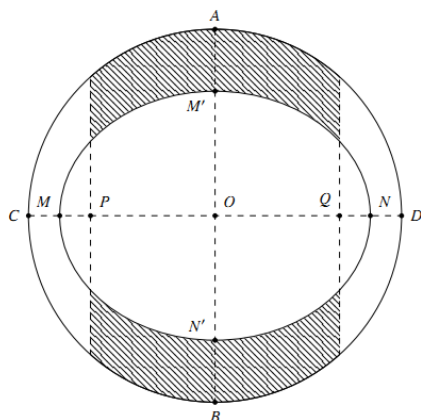


Bài 13: Đáy của một bể bơi có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí phần lát gạch xanh tô đậm là 300 000 đồng/m² và phần lát gạch trắng còn lại là 100 000 đồng/m². Hỏi số tiền để làm đáy bể bơi theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1 A_2 = 10$ m, $B_1 B_2 = 6$ m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 4$ m?



Bài 14: Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng 100 m, trục nhỏ bằng 80 m được chia thành 2 phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2 000 mỗi m² trồng cây con và 4 000 mỗi m² trồng rau. Hỏi thu nhập từ cả mảnh vườn là bao nhiêu?

Bài 15: Một khu vườn dạng hình tròn có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau, $AB = 12$ m. Người ta làm một hồ cá có dạng elip với bốn đỉnh M, N, M', N' như hình vẽ. Biết $MN = 10$ m, $M'N' = 8$ m, $PQ = 8$ m. Diện tích phần trồng cỏ (phần gạch sọc) bằng bao nhiêu?

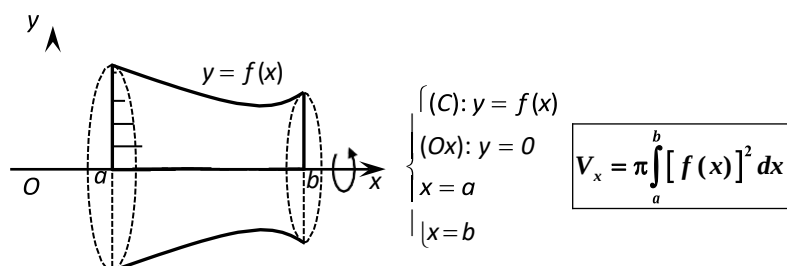


BÀI 8. THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ HÀM XÁC ĐỊNH

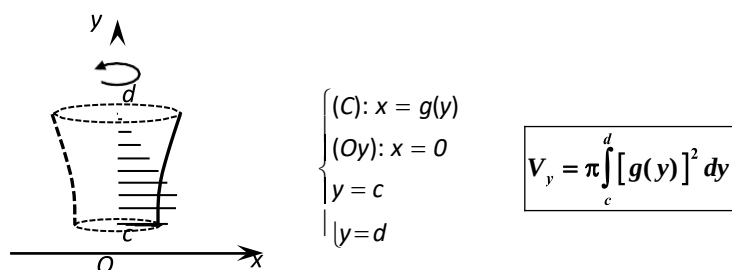
PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Thể tích khối tròn xoay

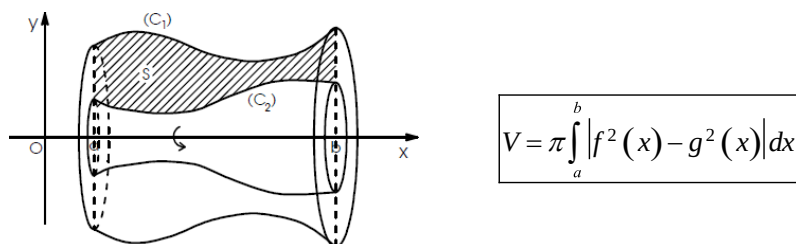
- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :



- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy :



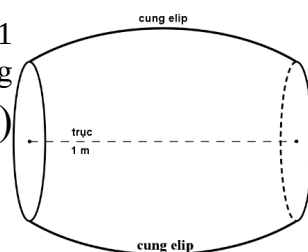
- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :



Một số bài toán ta phải xây dựng các hệ trục để áp dụng công thức ứng dụng.

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Một cái trống trường có khoảng cách giữa hai mặt trống là 1 m. Một mặt phẳng qua trục của trống cắt phần xung quanh của trống theo hai cung của elip (E) (tham khảo hình vẽ). Biết rằng elip (E) có trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 2 m và 1 m. Hãy tính thể tích của phần không gian mà cái trống đã nêu chiếm chỗ.



Bài 2: Một cái trống (hình vẽ) có đường kính 1 m, hai mặt trống có đường kính 0,7 m và chiều cao của trống là 1 m. Thể tích khối giới hạn bởi bề mặt của trống gần với số nào?



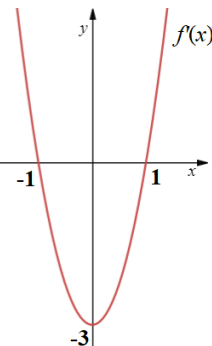
Bài 3: Một thùng chứa rượu bằng gỗ là một hình tròn xoay như hình bên có hai mặt đáy là hai hình tròn bằng nhau, khoảng cách giữa hai đáy là 8 dm. Đường cong mặt bên của thùng là một phần của đường elip có độ dài trục lớn bằng 10 dm, trục bé bằng 6 dm. Hỏi thùng gỗ này đựng được bao nhiêu lít rượu?



Bài 4: Một bình cắm hoa dạng khối tròn xoay với đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 và 4. Mặt xung quanh của bình là một phần của mặt tròn xoay khi quay đường cong $y = \sqrt{x-1}$ quay quanh trục Ox . Thể tích của bình cắm hoa đó bằng bao nhiêu?

Bài 5: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị

(C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox .

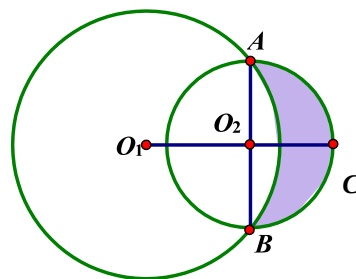


Bài 6: Cho hai đường tròn $(O_1; 10)$ và $(O_2; 8)$ cắt nhau tại hai

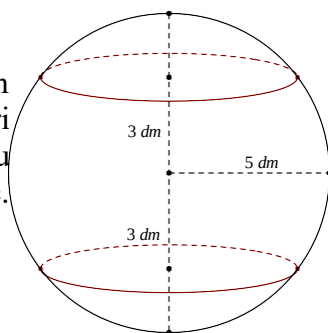
điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2) . Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn.

Quay (H) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay.

Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.



Bài 7: Một khối cầu có bán kính là 5 (dm), người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc với đường kính và cách tâm một khoảng 3 (dm) để làm một chiếc lu đựng nước. Tính thể tích nước tối đa mà chiếc lu có thể chứa được.

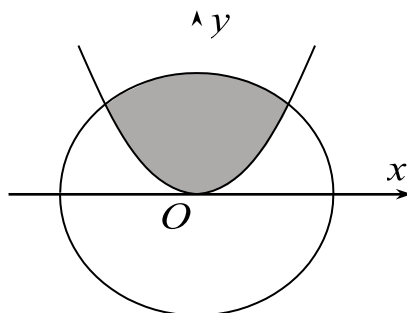


Bài 8: Một thùng rượu vang có dạng hình tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn bằng nhau, khoảng cách giữa hai đáy bằng 80 cm. Đường sinh của mặt xung quanh thùng là một phần đường tròn có bán kính bằng 60 cm. Hỏi thùng đó có thể đựng được bao nhiêu lít rượu?

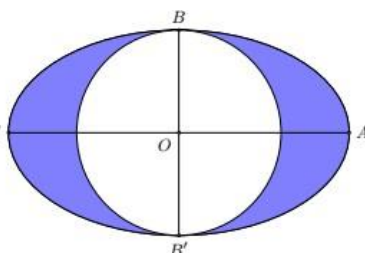
Bài 9: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol

$$y = x^2 \text{ và đường tròn } x^2 + y^2 = 2 \text{ (phần tô đậm)}$$

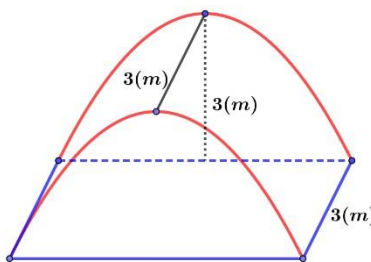
trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.



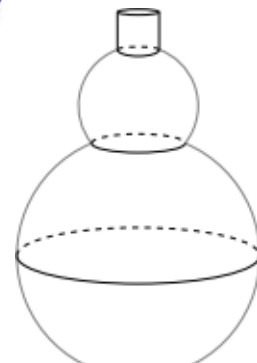
Bài 10: Trong mặt phẳng, cho đường elip (E) có độ dài trục lớn là $AA' = 10$, độ dài trục nhỏ là $BB' = 6$, đường tròn tâm O có đường kính là BB' (như hình vẽ bên dưới). Tính thể tích V của khối tròn xoay có được bằng cách cho miền hình phẳng giới hạn bởi đường elip và đường tròn (được tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục AA' .



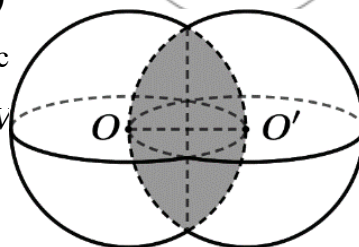
Bài 11: Để chuẩn bị cho hội trại do Đoàn trường tổ chức, lớp 12B dự định dựng một cái lều trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 6 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.



Bài 12: Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R = 61.2$ cm và $r = 41.4$ cm và một phần của mặt trụ để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ dưới đây. Biết giao của hai hình cầu là đường tròn có bán kính $r_1 = 5$ cm và cổ của hồ lô là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5}$ cm, chiều cao bằng 4 cm. Giả sử độ dày của hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được tối đa bao nhiêu lít rượu?

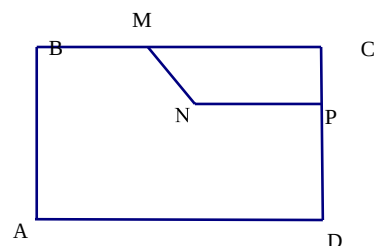


Bài 13: Một đồ chơi được thiết kế gồm hai mặt cầu (S_1) , (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại (xem hình vẽ). Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2) .

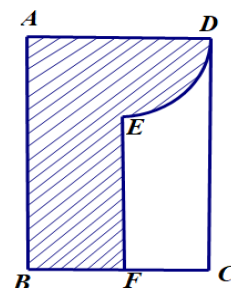


Bài 14: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$, $AD = 5$. Cắt hình chữ

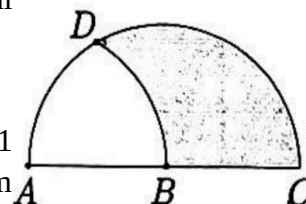
nhật theo đường gấp khúc MNP với $BM = 2$, $DP = 3$, $PN = 2$ và bỏ đi phần hình thang vuông $MNPC$ (tham khảo hình vẽ). Gọi (H) là phần hình phẳng còn lại của hình chữ nhật đã cho sau khi cắt bỏ. Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục AB .



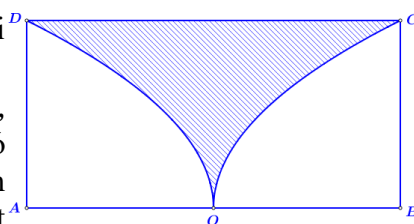
Bài 15: Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quay xung quanh trục AB . Biết $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 3$ cm, $AD = 2$ cm; F là trung điểm của BC ; điểm E cách AD một đoạn bằng 1 cm. Thể tích của vật thể trang trí trên là (quy tròn đến hàng phần mười)



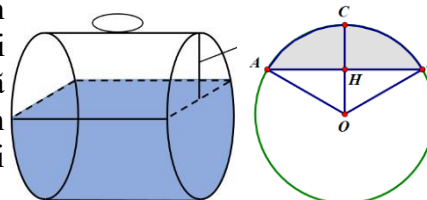
Bài 16: Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (H) (phần màu xám trong hình vẽ bên) quanh trục AC . Biết rằng $AC = 2$ cm, B là trung điểm của AC . Miền (H) được giới hạn bởi đoạn thẳng BC và các cung tròn bán kính 1 cm có tâm A và B . Thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



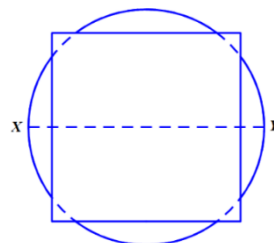
Bài 17: Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 10$ cm và chiều rộng $BC = 5$ cm; Người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường parabol có chung đỉnh là trung điểm của cạnh AB , chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C, D của hình chữ nhật đó (phần tô đậm như hình vẽ). Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu?



Bài 18: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5 m, có bán kính đáy 1 m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5 m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3).



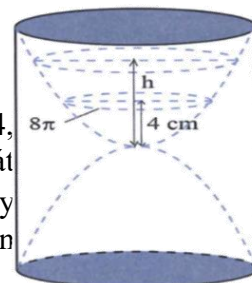
Bài 19: Cho hình vuông có độ dài 8 cm và một hình tròn có bán kính 5 cm được xếp chồng lên nhau sau cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ bên. Biết thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY



bằng $\frac{a}{b}\pi$; $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $\frac{a}{b} + 2b$ bằng bao nhiêu?

Bài 20: Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ, gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai Parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên

của đồng hồ thì chiều cao của mực cát bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bên đó



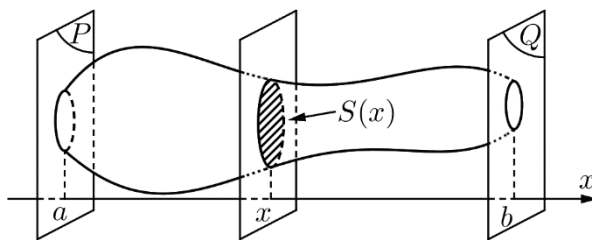
(xem hình vẽ). Cát chảy từ trên xuống dưới với lưu lượng không đổi 14, 75 cm³/phút. Khi chiều cao của cát còn 4 (cm) thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn có chu vi 8π (cm). Biết sau 20 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

BÀI 9. THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY TÍNH THEO MẶT CẮT

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Thể tích vật thể:

Cắt một vật thể ν bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm x ($a \leq x \leq b$) cắt ν theo thiết diện có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.



Người ta chứng minh được rằng thể tích V của phần vật thể ν giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) được tính bởi công thức $V = \int_a^b S(x)dx$.

Một số bài toán ta phải xây dựng các hệ trục để áp dụng công thức ứng dụng.

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) là một tam giác

$$\begin{pmatrix} | & 2 & | \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

Bài 2: Cho vật thể (T) được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = -2$ và $x = 2$. Biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($x \in [-2; 2]$) là một hình vuông có cạnh $\sqrt{4-x^2}$. Thể tích vật (T) bằng bao nhiêu?

Bài 3: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq \pi)$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

$x = -1$ và $x = 1$. Biết rằng thiết diện của vật

Bài 4: Xét vật thể (T) nằm giữa hai mặt phẳng

thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (-1 \leq x \leq 1)$ là một hình vuông có cạnh bằng $2\sqrt{1-x^2}$. Thể tích vật thể (T) bằng bao nhiêu?

Bài 5: Thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq 3)$ là một hình chữ

nhật có hai kích thước bằng x và $2\sqrt{9-x^2}$ bằng bao nhiêu?

Bài 6: Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai đường thẳng $x = 1$ và $x = 3$ biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (1 \leq x \leq 3)$

là hình vuông có cạnh $\sqrt{4-x}$.

Bài 7: Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (1 \leq x \leq 3)$ là hình vuông có cạnh $\sqrt{3-x}$.

Bài 8: Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{3}$. Cắt phần

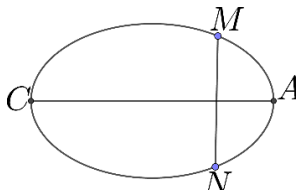
vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{3})$ ta được

$$\begin{pmatrix} & & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

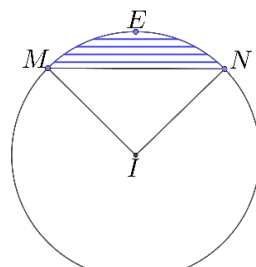
thiết diện là một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là $2x$ và $\cos x$. Thể tích vật thể B bằng bao nhiêu?

Bài 9: Sân vận động Sports Hub (Singapore) là nơi diễn ra lễ khai mạc đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức ở Singapore năm 2015.

Nền sân là một Elip (E) có trục lớn dài 150 m, trục bé dài 90 m. Nếu cắt sân vận động theo mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt (E) tại M và N (hình a) thì ta được thiết diện luôn



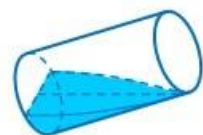
Hình a



Hình b

là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình b) với MN là dây cung và $\angle MIN = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí cho sân vận động thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và vật liệu làm mái che không đáng kể. Hỏi thể tích đó xấp xỉ bao nhiêu?

Bài 10: Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao trong lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



BÀI 10. BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s = s(t)$

Vận tốc tức thời tại thời điểm t của chất điểm được tính theo công thức: $v(t) = s'(t)$

Gia tốc tức thời tại thời điểm t của chất điểm được tính theo công thức: $a(t) = v'(t) = s''(t)$

$$s(t) = \int v(t) dt$$

$$v(t) = \int a(t) dt$$

Một chất điểm chuyển động trên trục Ox với vận tốc thay đổi theo thời gian $v = f(t)$ (m/s). Quãng đường chất điểm chuyển động trên trục Ox từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2 là

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

***Chú ý:**

- + Xác định thời điểm ban đầu $t = 0$: Mỗi chuyển động ta nên chọn một thời điểm ban đầu phù hợp cho mục đích tính toán. Thời điểm ban đầu thường chọn khi chuyển động bắt đầu một hành trình mới.
- + Xác định C trong $v(t)$: Thường dựa vào vận tốc tại thời điểm $t = 0$ (khởi hành), ta có

$$C = v(0) - f(0)$$

- + Các thời điểm đặc biệt: Dừng hẳn $\Leftrightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dots$; $v(t) = \max v(t) \Leftrightarrow t = \dots$

Phương pháp: Ứng dụng tích phân cơ bản để giải quyết yêu cầu bài toán.

Ví dụ 1: Một vật đang chuyển động đều với vận tốc 30 m/s thì chuyển động chậm dần đều với gia tốc -70 m/s^2 .

Thì ta chọn thời điểm ban đầu là lúc bắt đầu chuyển động chậm dần.

Ví dụ 2: Một ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 180 - 20t$. Tính quãng đường mà ô tô di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

Lời giải

Thời điểm vật dừng lại là $v = 0 \Leftrightarrow 180 - 20t = 0 \Leftrightarrow t = 9 \text{ (s)}$

Quãng đường mà ô tô di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại là:

$$s(t) = \int_0^9 (180 - 20t) dt = 810 \text{ (m)}$$

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

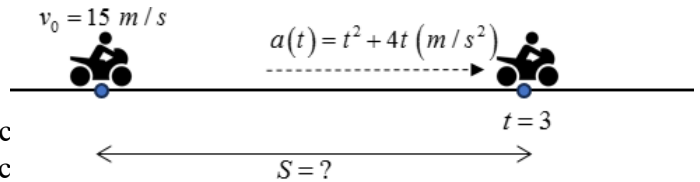
Bài 1: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 210 - 30t$ (m/s). Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

Bài 2: Một xe ô tô đang đi với vận tốc 10 m/s thì người lái xe bắt đầu đạp phanh, từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 10 - 5t$ (m/s), ở đó t tính bằng giây.

Quãng đường ô tô dịch chuyển từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn bằng bao nhiêu?

Bài 3: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15$ m/s thì tăng

tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t$ (m/s²).



Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

Bài 4: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s) có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t+1}$ (m/s²). Vận tốc ban đầu của vật là 6 m/s. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn đến kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất) có giá trị bằng bao nhiêu?

Bài 5: Một vật chuyển động với vận tốc là $v(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi}$ (m/s). Gọi S_1 là quãng đường vật đó đi trong 2 giây đầu và S_2 là quãng đường đi từ giây thứ 3 đến giây thứ 5. Chứng minh $S_2 > S_1$?

Bài 6: Giả sử một vật đi từ trạng thái nghỉ $t = 0$ (s) chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = t(5-t)$ (m/s). Tìm quãng đường vật đi được cho đến khi nó dừng lại.

Bài 7: Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s). Tìm quãng đường S mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm vật dừng lại.

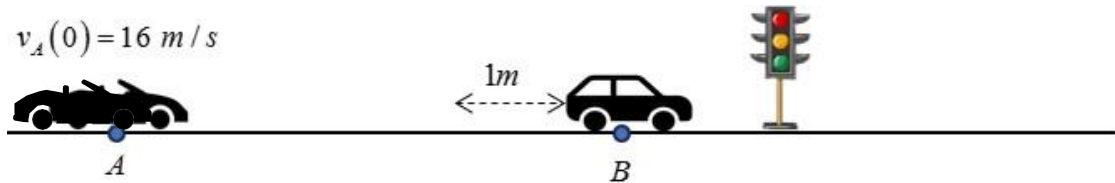
Bài 8: Một ô tô đang chạy với tốc độ 20 (m/s) thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 5t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

Bài 9: Một tàu lửa đang chạy với vận tốc 200 (m/s) thì người lái tàu đạp phanh để dừng ở trạm ga; từ thời điểm đó, tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 240 - 20t$ (m/s). Trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, tàu di chuyển được quãng đường là bao nhiêu mét?



Bài 10: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô

A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?



BÀI 11. BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG HAI PHƯƠNG TIỆN

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Lý thuyết: Sử dụng lý thuyết chung của dạng toán chuyển động cơ bản.

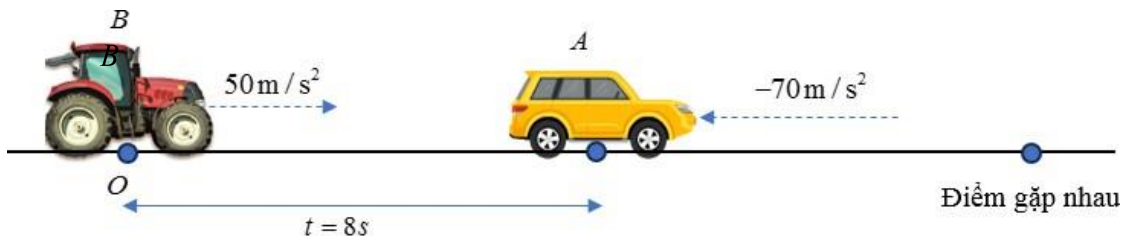
Phương pháp: Xác định quãng đường đi được của hai phương tiện tại điểm gặp nhau, sau đó tìm yêu cầu của bài toán.

Ví dụ: Vật A chuyển động đều từ O với vận tốc 30 m/s được 10s thì chuyển động chậm dần với gia tốc -70 m/s^2 . Sau khi vật A khởi hành được 8s thì vật B bắt đầu xuất phát cùng chiều từ nhanh dần đều với gia tốc 50 m/s^2 . Hỏi sau bao lâu hai vật gặp nhau? Khi gặp nhau thì vật A đã dừng lại chưa?

Thì ta chọn thời điểm ban đầu cho A là lúc bắt đầu chuyển động chậm dần.

Thời điểm ban đầu cho B là lúc B khởi hành.

Hai thời điểm khởi đầu này chênh nhau 2s.



PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian

bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt

đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu?

Bài 2: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian

bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu

chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu?

Bài 3: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian

bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu

chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu?

Bài 4: Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm trên cùng đoạn đường thẳng AB , ô tô thứ nhất bắt đầu xuất phát từ A và đi theo hướng từ A đến B với vận tốc $v_a(t) = 2t + 1$ (km/h); ô tô thứ

hai xuất phát từ O cách A một khoảng 22 km và đi theo hướng từ A đến B với vận tốc 10 km/h, sau một khoảng thời gian người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô thứ hai chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_o(t) = -5t + 20$ (km/h). Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu

kể từ khi xuất phát hai ô tô đó gặp nhau.

BÀI 12. BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG THEO QUẢNG ĐƯỜNG LÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Lý thuyết : Xác định hàm số bậc hai ta làm như sau :

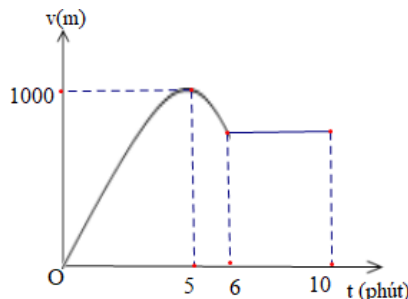
Gọi hàm số cần tìm là $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Căn cứ theo giả thiết bài toán để thiết lập và giải hệ phương trình với ẩn a , b , c từ đó suy ra hàm số cần tìm.

Phương pháp: Xác định hàm số của các dạng đồ thị quen thuộc dựa vào các yếu tố đã cho sau đó tính tích phân.

Ví dụ: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1 000 m/ phút và bắt đầu giảm tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều (hình vẽ).

Hỏi quãng đường xe đã đi được trong 10 phút đầu tiên kể từ lúc bắt đầu là bao nhiêu mét?

Lời giải



Giả sử trong 5 phút đầu vận tốc của ô tô được biểu diễn bởi phương trình $v(t) = at^2 + bt + c$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} c = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 5 \\ 25a + 5b + c = 1\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + b = 0 \\ 25a + 5b = 1\,000 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -40 \\ b = 400 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -40t^2 + 400t.$$

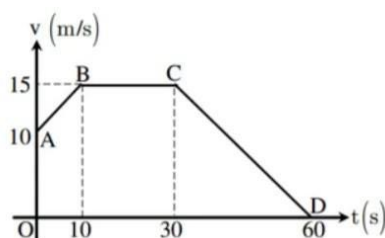
Khi $t = 6$ ta có $v(6) = 960$ m/phút. Suy ra trong 10 phút đầu xe ô tô chuyển động được

quãng đường là $S = \int_0^6 (-40t^2 + 400t) dt + 960 \cdot 4 = 4\,320 + 3\,840 = 8\,160$ (m).

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

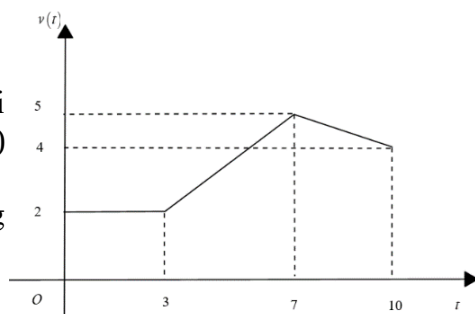
Bài 1: Một vật chuyển động thẳng có đồ thị vận tốc – thời gian như hình vẽ sau:

Tính quãng đường vật chuyển động trong 60s.

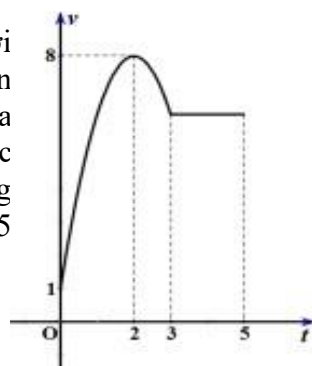


Bài 2: Một vật chuyển động trong 10 giây với vận tốc v (m/s) phụ thuộc vào thời gian t (s) có đồ thị như hình vẽ.

Quãng đường vật chuyển động được trong 10 giây bằng bao nhiêu?

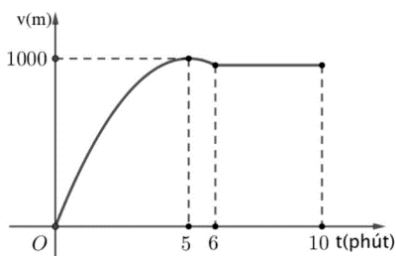


Bài 3: Một vật chuyển động trong 5 giờ với vận tốc v phụ thuộc thời gian t có đồ thị của vận tốc như hình dưới. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 8)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 5 giờ đó.



Bài 4: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1 000 m/phút và bắt đầu giảm tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều (tham khảo hình vẽ).

Quãng đường xe đi được sau 10 phút đầu tiên kể từ khi hết đèn đỏ là bao nhiêu mét?



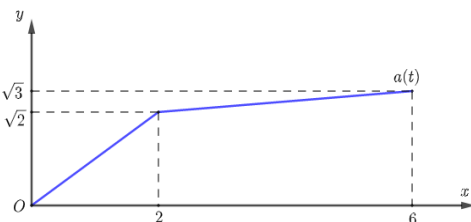
Bài 5: Tại một nơi không có gió, một chiếc khinh khí cầu đang đứng yên ở độ cao 243 mét so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khinh khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 12t - t^2$ trong đó t tính bằng phút là thời gian tính từ lúc khinh khí cầu bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút. Nếu vận tốc v của khinh khí cầu khi tiếp đất là $v = x$ mét/phút thì giá trị của x bằng bao nhiêu?

Bài 6: Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$.

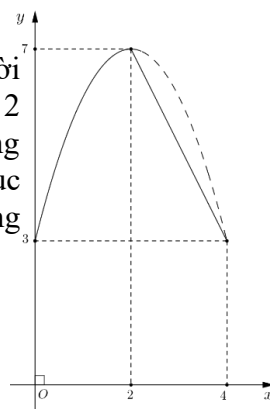
Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t = 0$

là $v(0) = 1$ (m/s).

Tại thời điểm $t = 6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu?



Bài 7: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 2 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là mô phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 7)$ và trục đối xứng của parabol song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là đoạn thẳng IA . Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



BÀI 13. BÀI TOÁN BƠM NƯỚC

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Lý thuyết: Các kiến thức cơ bản về nguyên hàm của hàm số.

Phương pháp: Sử dụng phương pháp nguyên hàm, tích phân cơ bản để tìm yếu tố chưa biết.

Ví dụ: Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm, t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{2t+1}$. Mức nước ở bồn sau khi bơm được 13 giây là bao nhiêu?



Lời giải

$$\text{Ta có: } h(t) = \int h'(t) dt = \int \sqrt[3]{2t+1} dt = \frac{3}{8}(2t+1)^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{2t+1} + C.$$

$$\text{Lúc đầu } t = 0, \text{ bể không có nước } \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C + \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow C = -\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{3}{8}(2t+1)^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{2t+1} - \frac{3}{8} \Rightarrow h(13) = 30.$$

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280 cm.

Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết

rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ

bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi (làm

tròn đến giây)?

Bài 2: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau

t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước

trong bể là 90 m^3 , sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là 504 m^3 . Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

Bài 3: Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h

tính bằng cm, t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{\sqrt[3]{3t+8}}{t}$. Mức nước ở bồn sau khi bơm được

10 giây là bao nhiêu? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Bài 4: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau

t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước

trong bể là 150 m^3 , sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là 1100 m^3 . Tính thể tích của nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

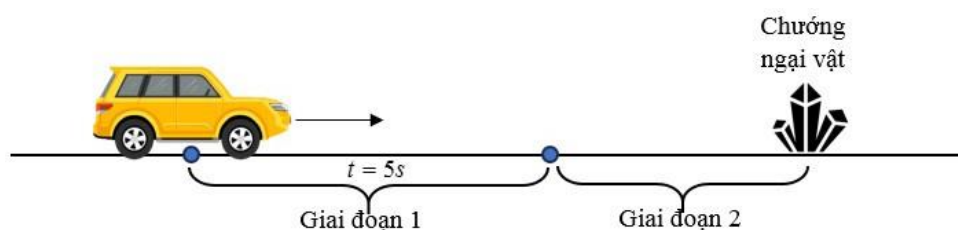
BÀI 14. BÀI TOÁN GẶP CHƯỚNG NGẠI VẬT

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Lý thuyết: Sử dụng lý thuyết chung của dạng toán chuyển động cơ bản.

Phương pháp: Tìm quãng đường của giai đoạn 1 là lúc vật bắt đầu chuyển động, giai đoạn 2 là lúc vật bắt đầu gặp chướng ngại vật và thay đổi chuyển động. Sau đó ta thực hiện yêu cầu bài toán.

Ví dụ: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s) người lái xe gặp chướng ngại vật nên phải phanh gấp cho xe chạy chậm dần đều với gia tốc -55 (m/s²). Tính quãng đường đi được của ô tô từ lúc chuyển bánh đến khi dừng hẳn.



Lời giải

Chiếc ô tô thực hiện hai giai đoạn:

Giai đoạn 1: Chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s) trong 5 (s), do đó quãng đường chặng 1 của ô tô là $S_1 = \int_0^5 7t dt = 87,5$ (m).

Lúc này, ô tô đang đạt vận tốc $v_1(5) = 7 \times 5 = 35$ (m/s).

Giai đoạn 2: Ô tô chuyển động với gia tốc -55 (m/s²) nên phương trình vận tốc của xe là

$$v_2(t) = \int -55 dt = -55t + C.$$

Khi $t = 0$ của chặng 2 thì xe có vận tốc $v_1(5) = 35$ nên $v_2(0) = 35 \Leftrightarrow C = 35$.

Vậy $v_2(t) = -55t + 35$. Ô tô dừng hẳn khi $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.5$.

Vậy quãng đường ô tô di chuyển trong chặng 2 là $S_2 = \int_0^{0.5} (-55t + 35) dt = \frac{85}{8} = 10,625$ (m).

Vậy tổng quãng đường ô tô đi được từ khi khởi hành đến khi dừng hẳn là

$$S = S_1 + S_2 = 87,5 + 10,625 = 98,125 \text{ (m)}.$$

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Một chiếc xe bán tải bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 3t$ (m/s). Đi

được 8 (s) người lái xe gặp chướng ngại vật nên phải phanh gấp cho xe chạy chậm dần đều với gia tốc -36 (m/s²). Tính quãng đường đi được của chiếc xe từ lúc chuyển bánh đến khi dừng hẳn.

Bài 2: Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35$ (m/s²). Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

Bài 3: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12$ (m/s²). Tính quãng đường s (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

Bài 4: Một chất điểm bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 , sau 6 giây chuyển động thì

gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a$ (m/s),

($t \geq 6$) cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì chất điểm đi được quãng đường là 80 m. Tìm v_0 .

Bài 5: Một ô tô đang chạy với vận tốc v_0 (m/s) thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đã đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -6t$ (m/s²) trong đó t là thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 16 m. Tính v_0 ?

Chủ đề 5. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

BÀI 15. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hai biến cố A và B . Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B , kí hiệu là $P(A | B)$.

$$\text{Nếu } P(B) > 0 \text{ thì } P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

2. NHẬN XÉT

- Từ định nghĩa của xác suất có điều kiện, ta suy ra:

$$\text{Nếu } P(B) > 0 \text{ thì } P(A \cap B) = P(B).P(A | B).$$

- Người ta chứng minh được rằng:

$$\text{Nếu } A, B \text{ là hai biến cố bất kì thì } P(A \cap B) = P(A).P(B | A) = P(B).P(A | B).$$

Công thức trên được gọi là công thức nhân xác suất.

- Cho hai biến cố A và B với $P(B) > 0$. Khi đó, ta có: $P(A | B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$.

- Cho A và B là hai biến cố với $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$.

Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(A) = P(A | B) = P(A | \bar{B})$ và

$$P(B) = P(B | A) = P(B | \bar{A}).$$

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Trong một công viên cây xanh có 70% cây có hoa, số cây phượng vĩ chiếm 6,3% trong tổng số cây của công viên. Trong giờ thực hành ngoài trời, nhóm học sinh của lớp 10A1 chọn một cây trong công viên để đo chiều cao. Tính xác suất để cây được chọn là cây phượng vĩ, biết rằng cây được chọn là loài cây có hoa.

Bài 2. Tại một sở thú, các em bé được đặt câu hỏi: Sắp tới vườn thú của chúng ta sẽ nhận nuôi thêm một con vật nữa, con thích sư tử hay voi hơn? Kết quả khảo sát của các bé như sau:

	Sư tử	Voi	Tổng cộng
Bé trai	90	110	200
Bé gái	75	85	160
Tổng cộng	165	195	360

Chọn ngẫu nhiên một bé tham gia khảo sát, tính xác suất để

a) Bé thích sư tử, biết bé được chọn là bé trai.

b) Bé thích voi, biết bé được chọn là bé gái.

Bài 3. Lớp 12B1 có 25 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Trong số đó có 16 bạn nam và 6 bạn nữ thích chơi thể thao. Chọn một bạn bất kì của lớp 12B1. Tính xác suất

a) Học sinh được chọn thích chơi thể thao, biết rằng học sinh đó là nữ.

b) Học sinh được chọn là nữ, biết rằng học sinh đó thích chơi thể thao.

Bài 4. Một hộp có 6 viên bi đen và 8 viên bi trắng cùng kích thước và khối lượng. An lấy một viên và không hoàn lại. Sau đó Bình lấy một viên. Gọi A là biến cố “An lấy được viên bi trắng”, B là biến cố “Bình lấy được viên bi trắng”. Tính $P(B | A)$ và $P(AB)$.

Bài 5. Có hai hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 bi đỏ và 5 bi vàng. Hộp thứ hai chứa 6 bi đỏ và 4 bi vàng. Chọn ngẫu nhiên một hộp và sau đó lấy ngẫu nhiên 1 bi từ hộp đó. Tính xác suất để lấy được viên bi đỏ.

Bài 6. Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II. Xác suất bắn trúng đích của xạ thủ loại I là 0,9; của xạ thủ loại II là 0,8. Chọn ngẫu nhiên ra 1 xạ thủ và xạ thủ đó bắn một viên đạn. tìm xác suất để viên đạn đó trúng đích.

Bài 7. Trong một đội tuyển có hai vận động viên A và B thi đấu. A thi đấu trước và có hy vọng 80% thắng trận. Do ảnh hưởng tinh thần, nếu A thắng trận thì có 60% khả năng B thắng trận, còn nếu A thua thì khả năng này của B chỉ còn 30%.

Tính xác suất của các biến cố sau:

a) Đội tuyển thắng hai trận.

b) Đội tuyển thắng ít nhất một trận.

Bài 8. Ban giám đốc một công ty liên doanh với nước ngoài đang xem xét khả năng đình công của công nhân để đòi tăng lương ở hai nhà máy A và B . Kinh nghiệm cho họ biết cuộc đình công ở nhà máy A và B xảy ra lần lượt với xác suất 0,75 và 0,65. Ngoài ra, họ cũng biết rằng nếu công nhân ở nhà máy B đình công thì có 90% khả năng để công nhân ở nhà máy A đình công ủng hộ.

a) Tính xác suất để công nhân ở cả hai nhà máy đình công.

b) Nếu công nhân ở nhà máy A đình công thì xác suất để công nhân ở nhà máy B đình công để ủng hộ bằng bao nhiêu?

Bài 9. Một nhân viên kiểm toán nhận thấy 15% các bản cân đối thu chi chứa các sai lầm. Trong các bản chứa sai lầm, 60% được xem là các giá trị bất thường so với các số xuất phát từ gốc. Trong tất cả các bản cân đối thu chi thì 20% là những giá trị bất thường. Nếu một con số ở một bảng

cân đối tỏ ra bất thường thì xác suất để số ấy là một sai lầm là bao nhiêu?

Bài 10. Một nhóm nghiên cứu đang nghiên cứu về nguy cơ một sự cố tại một nhà máy điện nguyên tử sẽ gây ra sự rò rỉ phóng xạ. Nhóm nghiên cứu nhận thấy các loại sự cố chỉ có thể là: hoả hoạn, sự gãy đổ của vật liệu hoặc sai lầm của con người, và 2 hay nhiều hơn 2 sự cố không bao giờ cùng xảy ra.

Nếu có hoả hoạn thì sự rò rỉ phóng xạ xảy ra khoảng 20% số lần. Nếu có sự gãy đổ của vật liệu thì sự rò rỉ phóng xạ xảy ra khoảng 50% số lần, và nếu có sự sai lầm của con người thì sự rò rỉ sẽ xảy ra khoảng 10% số lần. Nhóm nghiên cứu cũng tìm được xác suất để: Hoả hoạn và sự rò rỉ phóng xạ cùng xảy ra là 0,0010, gãy đổ vật liệu và sự rò rỉ phóng xạ cùng xảy ra là 0,0015, sai lầm của con người và sự rò rỉ phóng xạ cùng xảy ra là 0,0012. Tìm xác suất để

- a) có hoả hoạn; có gãy đổ vật liệu và có sai lầm của con người;
- b) có một sự rò rỉ phóng xạ;
- c) một sự rò rỉ phóng xạ được gây ra bởi sự sai lầm của con người.

Bài 11. Một hộp có 5 quả cầu màu xanh và 3 quả cầu màu vàng. Lần lượt lấy ra hai quả cầu theo phương thức không hoàn lại.

- a) Tính xác suất lần thứ hai lấy được quả màu vàng với điều kiện lần thứ nhất lấy được quả cầu xanh.
- b) Tính xác suất để hai quả cầu lấy ra cùng màu.

Bài 12. Một lớp học của Trường Đại học AG có $\frac{2}{3}$ là nam sinh viên và $\frac{1}{3}$ là nữ sinh viên. Số sinh viên quê ở An Giang chiếm tỉ lệ 40% trong nữ sinh viên, và chiếm tỉ lệ 60% trong nam sinh viên.

- a) Chọn ngẫu nhiên một sinh viên của lớp. Tính xác suất để chọn được một sinh viên quê ở An Giang. Nếu biết rằng sinh viên vừa chọn quê ở An Giang thì xác suất để sinh viên đó là nam bằng bao nhiêu?
- b) Chọn ngẫu nhiên không hoàn lại hai sinh viên của lớp. Tính xác suất để có ít nhất một sinh viên quê ở An Giang, biết rằng lớp học có 60 sinh viên.

Bài 13. Nhà trường muốn chọn một số học sinh từ một tổ gồm 7 nam sinh và 6 nữ sinh. Lần đầu chọn ngẫu nhiên 2 học sinh; sau đó, chọn tiếp 1 học sinh nữa.

- a) Tính xác suất để học sinh được chọn lần sau là nam sinh.
- b) Biết rằng học sinh được chọn lần sau là nữ sinh, tính xác suất để cả hai học sinh được chọn lần đầu đều là nam sinh.

Bài 14. Gieo ba con xúc sắc cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để:

- a) Tổng số nốt xuất hiện là 8 nếu biết rằng ít nhất có một con ra nốt 1.
- b) Có ít nhất một con ra lục nếu biết rằng số nốt trên 3 con là khác nhau.

Bài 15. Có ba hộp A, B và C đựng các lọ thuốc. Hộp A có 10 lọ tốt và 5 lọ hỏng, hộp B có 6 lọ tốt và 4 lọ hỏng, hộp C có 5 lọ tốt và 5 lọ hỏng.

- a) Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một lọ thuốc, tính xác suất để được 3 lọ cùng loại.
- b) Lấy ngẫu nhiên một hộp rồi từ hộp đó lấy ra 3 lọ thuốc thì được 1 lọ tốt và 2 lọ hỏng. Tính xác suất để hộp A đã được chọn.

Bài 16. Có 5% dân số mắc bệnh X. Có một xét nghiệm để phát hiện bệnh X. Đối với người mắc bệnh X, xác suất xét nghiệm này không dương tính là 2%. Đối với người không mắc bệnh X, xác suất xét nghiệm này dương tính là 3%. Chọn ngẫu nhiên một người và tiến hành xét nghiệm. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất các biến cố:

W: “người đó không bị bệnh X và kết quả xét nghiệm dương tính”

Y: “người đó bị bệnh X và kết quả xét nghiệm không dương tính”

Bài 17. Cửa hàng nhận trứng của 3 cơ sở nuôi gà R, S, T theo tỉ lệ lần lượt là 25%, 35% và 40%. Biết rằng tỉ lệ trứng hỏng của 3 cơ sở R, S, T lần lượt là 5%, 4% và 2%. Bạn Hân mua một quả trứng từ cửa hàng. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

M: “quả trứng Hân mua thuộc cơ sở T và quả trứng đó không bị hỏng”

N: “quả trứng Hân mua thuộc cơ sở R hoặc S và quả trứng đó bị hỏng”

BÀI 16. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Trong mục này, ta luôn giả thiết phép thử T có không gian mẫu là tập hợp Ω gồm hữu hạn phần tử và các kết quả của phép thử là đồng khả năng, các biến cố đều liên quan đến phép thử đó.

1. Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A, B với $0 < P(B) < 1$, ta có:

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}).$$

2. Công thức Bayes

Với hai biến cố A, B mà $P(A) > 0, P(B) > 0$, ta có: $P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$.

Nhận xét: Cho hai biến cố A, B với $P(A) > 0, 0 < P(B) < 1$.

Do $P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})$ nên công thức Bayes còn có dạng:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})}.$$

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

- Bài 1.** Một cửa hàng sách ước lượng rằng: Trong tổng số các khách hàng đến cửa hàng, có 30% khách cần hỏi nhân viên bán hàng, 20% khách mua sách và 15% khách thực hiện cả hai điều trên. Gặp ngẫu nhiên một khách trong nhà sách. Tính xác suất để người này
- không thực hiện cả hai điều trên;
 - không mua sách, biết rằng người này đã hỏi nhân viên bán hàng.
- Bài 2.** Một cuộc điều tra cho thấy, ở một thành phố, có 20,7% dân số dùng loại sản phẩm X , 50% dùng loại sản phẩm Y và trong số những người dùng Y , có 36,5% dùng X . Phòng vận ngẫu nhiên một người dân trong thành phố đó, tính xác suất để người ấy
- Dùng cả X và Y ;
 - Dùng Y , biết rằng người ấy không dùng X .
- Bài 3.** Theo một cuộc điều tra thì xác suất để một hộ gia đình có máy vi tính nếu thu nhập hàng năm trên 20 triệu (VNĐ) là 0,75. Trong số các hộ được điều tra thì 60% có thu nhập trên 20 triệu và 52% có máy vi tính. Tính xác suất để một hộ gia đình được chọn ngẫu nhiên
- có máy vi tính và có thu nhập hàng năm trên 20 triệu;
 - có máy vi tính, nhưng không có thu nhập trên 20 triệu.
 - có thu nhập hàng năm trên 20 triệu, biết rằng hộ đó không có máy vi tính.
- Bài 4.** Trong một đội tuyển có hai vận động viên A và B thi đấu. Nếu A thi đấu trước và có hy vọng 80% thắng trận. Do ảnh hưởng tinh thần, nếu A thắng trận thì có 60% khả năng B thắng trận, còn nếu A thua thì khả năng này của B chỉ còn 30%. Tính xác suất của các biến cố sau:
- B thắng trận;
 - Đội tuyển chỉ thắng có một trận.
- Bài 5.** Trong năm học vừa qua, ở trường đại học X , tỉ lệ sinh viên thi trượt môn Toán là 34%, thi trượt môn Tâm lý là 20,5%, và trong số các sinh viên trượt môn Toán, có 50% sinh viên trượt môn Tâm lý. Gặp ngẫu nhiên một sinh viên của trường X .
- Tính xác suất để anh ta trượt cả hai môn Toán và Tâm lý;
 - Tính xác suất đậu cả hai môn Toán và Tâm lý.
 - Nếu biết rằng sinh viên này trượt môn Tâm lý thì xác suất để anh ta đậu môn Toán là bao nhiêu?
- Bài 6.** Ba máy 1, 2 và 3 của một xí nghiệp sản xuất, theo thứ tự 60%, 30% và 10% tổng số sản phẩm của một xí nghiệp. Tỉ lệ sản xuất ra phế phẩm của các máy trên, theo thứ tự, là 2%, 3% và 4%. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ lô hàng của xí nghiệp, trong đó để lẫn lộn các sản phẩm do 3 máy sản xuất.
- Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt. Ý nghĩa của xác suất đó đối với lô hàng là gì?
 - Nếu sản phẩm lấy được là phế phẩm, thì nhiều khả năng nhất là do máy nào sản xuất?
- Bài 7.** Một hãng sản xuất một loại tủ lạnh X ước tính rằng khoảng 80% số người dùng tủ lạnh có đọc quảng cáo tủ lạnh do hãng ấy sản xuất. Trong số những người đọc quảng cáo, có 30% mua loại tủ lạnh X ; 10% không đọc quảng cáo cũng mua loại tủ lạnh X . Tính xác suất để một người tiêu dùng đã mua loại tủ lạnh X mà có đọc quảng cáo.
- Bài 8.** Một địa phương có tỉ lệ người dân nghiện thuốc lá là 30%. Biết rằng tỉ lệ người bị viêm họng trong số người nghiện thuốc lá là 60%, còn tỉ lệ đó trong số người không nghiện thuốc lá là 40%. Chọn ngẫu nhiên một người từ địa phương trên.
- Nếu người đó bị viêm họng, tính xác suất để người đó nghiện thuốc lá.
 - Nếu người đó không bị viêm họng, tính xác suất để người đó nghiện

- Bài 9.** Một nhà xuất bản gửi bản giới thiệu sách mới đến 80% giảng viên của một trường đại học. Sau một thời gian, nhà xuất bản nhận thấy: Có 30% giảng viên mua sách trong số những người nhận được bản giới thiệu, và trong số những giảng viên không nhận được bản giới thiệu, có 10% mua sách. Tìm tỉ lệ những giảng viên nhận được bản giới thiệu trong số những người mua sách.
- Bài 10.** Giả sử một xét nghiệm X cho kết quả dương tính (+) đối với những người nhiễm HIV với xác suất 95% và cho kết quả (+) đối với những người không nhiễm HIV với xác suất 1%. Một người đến từ địa phương có tỉ lệ nhiễm HIV là 1% được làm xét nghiệm X và cho kết quả (+). Tính xác suất để người này thực sự nhiễm HIV.
- Bài 11.** Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử với 96% sản phẩm có chất lượng cao. Một qui trình kiểm tra chất lượng sản phẩm có đặc điểm: 2% sản phẩm có chất lượng cao lại không được công nhận và 5% sản phẩm không có chất lượng cao lại được công nhận. Hãy tính xác suất để sau khi kiểm tra, một sản phẩm được công nhận có chất lượng cao đúng là sản phẩm có chất lượng cao.
- Bài 12.** Một cặp trẻ sinh đôi có thể do cùng một trứng (sinh đôi thật), hay do hai trứng khác nhau sinh ra (sinh đôi giả). Các cặp sinh đôi thật luôn có cùng giới tính. Đối với cặp sinh đôi giả thì giới tính của mỗi đứa độc lập với nhau và có xác suất 0,5 là con trai. Thống kê cho thấy 34% cặp sinh đôi đều là trai, 30% cặp sinh đôi đều là gái, và 36% cặp sinh đôi có giới tính khác nhau.

- a) Tìm tỉ lệ cặp sinh đôi thật.
- b) Chọn ngẫu nhiên một cặp sinh đôi thì được một cặp có cùng giới tính. Tính xác suất để đó là cặp sinh đôi thật.
- Bài 13.** Có hai chuồng thỏ. Chuồng thứ nhất có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng thứ hai có 3 con thỏ trắng và 7 thỏ đen. Từ chuồng thứ hai ta bắt ngẫu nhiên một con thỏ cho vào chuồng thứ nhất, rồi sau đó lại bắt ngẫu nhiên một con thỏ ở chuồng thứ nhất ra, thì được một thỏ trắng. Tính xác suất để thỏ trắng này là của chuồng thứ nhất.
- Bài 14.** Hộp thứ nhất có 8 sản phẩm loại A và 2 sản phẩm loại B; hộp thứ hai có 5 sản phẩm loại A và 3 sản phẩm loại B. Lấy ngẫu nhiên một hộp, rồi lấy ngẫu nhiên từ đó ra 4 sản phẩm.
- a) Tính xác suất để được 3 sản phẩm loại A;
- b) Giả sử lấy được một sản phẩm loại B và 3 sản phẩm loại A. Nhiều khả năng là sản phẩm loại B thuộc hộp nào? Tại sao?
- Bài 15.** Một phân xưởng có 2 máy tự động: máy I sản xuất 45%, máy II sản xuất 55% số sản phẩm. Tỷ lệ phế phẩm tương ứng của các nhà máy lần lượt là 0,1% và 0,2%. Chọn ngẫu nhiên ra một sản phẩm của phân xưởng, tính xác suất sản phẩm được chọn là phế phẩm.
- Bài 16.** Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn, có hai gene ứng với hai kiểu hình này là gene trội B và gene lặn b.
- Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cây con lấy ngẫu nhiên một cách độc lập một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ để hình thành một cặp gene. Giả sử cây bố và cây mẹ được chọn ngẫu nhiên từ một quần thể các cây đậu Hà Lan, ở đó tỉ lệ cây mang kiểu gene bb, Bb tương đương là 40% và 60%. Tính xác suất để cây con có kiểu gene bb
- Bài 17.** Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 80% học sinh lựa chọn vào tổ hợp A00 (gồm các môn Toán, Vật Lí, Hóa học). Biết rằng , nếu học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất học sinh đó đỗ đại học là 0,6; còn nếu học sinh đó không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Biết rằng học sinh đã đỗ đại học. Tính xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp A00.
- Bài 18.** Giả sử một loại bệnh mà tỉ lệ người mắc bệnh là 0,1%. Giả sử có một loại xét nghiệm, mà ai mắc bệnh khi xét nghiệm cũng có phản ứng dương tính, nhưng tỉ lệ dương tính giả là 5% (tức là trong số những người không bị bệnh có 5% số người xét nghiệm lại có phản ứng dương tính). Tính xác suất khi một người xét nghiệm phản ứng dương tính thì khả năng mắc bệnh của người đó là bao nhiêu?
- Bài 19.** Có hai hộp đựng các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Hộp thứ nhất có chứa 4 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh, hộp thứ hai có 6 viên đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, sau đó lấy ra ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ hai.
- a) Tính xác suất: để viên bi được lấy ra từ hộp thứ hai là viên bi đỏ.
- b) Giả sử viên bi lấy ra được từ hộp II có màu đỏ. Tính xác suất viên bi màu đỏ thuộc hộp I.
- Bài 20.** Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường mỗi bóng đèn đều được qua kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không thể tuyệt đối hoàn hảo, nên một bóng đèn tốt có xác suất 0,9 được công nhận là tốt, và một

bóng đèn hồng có xác suất 0,95 bị loại bỏ. Hãy tính tỉ lệ bóng đạt tiêu chuẩn sau khi qua khâu kiểm tra chất lượng sản phẩm.

Bài 21. Có bốn nhóm xạ thủ tập bắn. Nhóm thứ nhất có 5 người, nhóm thứ hai có 7 người, nhóm thứ ba có 4 người và nhóm thứ tư có 2 người. Xác suất bắn trúng đích của mỗi người trong nhóm thứ nhất, nhóm thứ hai, nhóm thứ ba và nhóm thứ tư theo thứ tự là 0,8; 0,7; 0,6 và 0,5. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ này bắn trượt. Hãy xác định xem xạ thủ này có khả năng ở trong nhóm nào nhất.

Bài 22. Trong số bệnh nhân ở một bệnh viện có 50% điều trị bệnh A ; 30% điều trị bệnh B và 20% điều trị bệnh C . Xác suất để chữa khỏi các bệnh A , B và C trong bệnh viện này tương ứng là 0,7; 0,8 và 0,9. Hãy tính tỉ lệ bệnh nhân được chữa khỏi bệnh A trong tổng số bệnh nhân đã được chữa khỏi bệnh.

Bài 23. Trong một kho rượu số lượng rượu loại A và rượu loại B bằng nhau. Người ta chọn ngẫu nhiên một chai rượu trong kho và đưa cho 5 người sành rượu nếm thử để xác định xem đây là loại rượu nào. Giả sử mỗi người có xác suất đoán đúng là 75%. Có 4 người kết luận chai rượu loại A và 1 người kết luận chai rượu loại B . Hỏi khi đó xác suất để chai rượu được chọn thuộc loại A là bao nhiêu ?