

CHỦ ĐỀ III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG HỆ THỨC VI-ÉT**A. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN ỨNG DỤNG HỆ THỨC VI-ÉT****Dạng 1. Tìm tham số m để phương trình bậc hai có nghiệm $x = x_0$. Tìm nghiệm còn lại.**

Bài toán. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*) ($a \neq 0$) có một nghiệm $x = x_0$. Tìm nghiệm còn lại.

Giải. - Bước 1: Vì $x = x_0$ là nghiệm của (*) nên $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$. Từ đó tìm m .

- Bước 2: Thay m tìm được và $x = x_0$ vào hệ thức Vi-et: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ hoặc $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Bài 1. Cho phương trình : $x^2 - 3(m-1)x + 2m - 4 = 0$. Tìm m để phương trình có một nghiệm $x = 2$ và tìm nghiệm còn lại.

Bài 2. Cho $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 2 = 0$ (1). Tìm m để phương trình có một nghiệm $x = 3$ và tìm nghiệm còn lại.

Dạng 2. Lập phương trình bậc hai khi biết hai nghiệm của nó

Phương pháp giải:

- Bước 1. Tính $S = x_1 + x_2$ và $P = x_1 \cdot x_2$.

- Bước 2. Ta có x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình: $X^2 - SX + P = 0$.

Bài 3. Giả sử phương trình : $x^2 + 5x - 3m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2

a) Hãy lập phương trình bậc hai có hai nghiệm $2x_1, 2x_2$.

b) Hãy lập phương trình có hai nghiệm $\frac{2}{x_1^2}; \frac{2}{x_2^2}$.

Bài 4. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm $3 - \sqrt{5}$ và $3 + \sqrt{5}$

Dạng 3. Dấu nghiệm số của phương trình bậc hai

Cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Bài toán 1. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$.

Bài toán 2. Phương trình có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm dương có giá trị tuyệt đối bé hơn (hoặc nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn) $\Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

Bài toán 3. Phương trình có hai nghiệm trái dấu trong đó có nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn (hoặc nghiệm âm có giá trị tuyệt đối bé hơn) $\Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ S > 0 \end{cases}$.

Bài toán 4. Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

Bài toán 5. Phương trình có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.

Bài toán 6. Phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

Bài toán 7. Phương trình có một nghiệm bằng 0 và 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases}$.

Bài toán 8. Phương trình có một nghiệm bằng 0 và 1 nghiệm âm ($x_1 < x_2 = 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

Bài toán 9. Phương trình có đúng một nghiệm dương:

Trường hợp 1. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Trường hợp 2. Phương trình có nghiệm kép dương $\Leftrightarrow \Delta = 0, -\frac{b}{2a} > 0$.

Trường hợp 3. Phương trình có một nghiệm bằng 0 và nghiệm còn lại dương.

Bài toán 10. Phương trình có đúng một nghiệm âm $\Rightarrow$ Giải tương tự như bài toán 9.

Chú ý: Nếu chỉ là hai nghiệm mà không nói phân biệt thì thay $\Delta > 0$ bằng $\Delta \geq 0$.

Bài 5. Cho phương trình: $x^2 - 8x + 2m + 6 = 0$.

- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- Tìm m để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu.
- Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương.
- Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm dương.

Bài 6. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-3)x + 8 - 4m = 0$.

- Chứng minh phương trình luôn có nghiệm.
- Tìm m để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.
- Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm.
- Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm âm.

Dạng 4. Xác định tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải

Loại 1. Điều kiện nghiệm là biểu thức không đối xứng

Bước 1. Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $\Delta \geq 0$.

Bước 2. Từ hệ thức đã cho và hệ thức Viet giải hệ đối với nghiệm x_1, x_2 rồi thay vào phương trình thứ ba của hệ để tìm m .

Bước 3. Kiểm tra m có thỏa mãn điều kiện có nghiệm không và kết luận.

Loại 2. Điều kiện nghiệm là biểu thức đối xứng

Bước 1. Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $\Delta \geq 0$.

Bước 2. Biểu diễn biểu thức theo tổng và tích hai nghiệm (S và P). Rồi thay S và P vào biểu thức để tìm m .

Bước 3. Kiểm tra m có thỏa mãn điều kiện không và kết luận.

Bài 7. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m = 0$. Tìm giá trị của m để:

- Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 12$.
- Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $3x_1 - 4x_2 = 2$.
- Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $(3x_1 - 2)(3x_2 - 2) > 5$.

- d) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 7$.
- e) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_1 - x_2| = 16$.
- f) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_1| - |x_2| = 5$.
- g) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $3x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_1^2x_2 - 5x_1x_2^2 = -4$.

Bài 8. Cho phương trình : $x^2 - 2mx - 16 + 5m^2 = 0$.

- a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm đối nhau.
- b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{1}{x_1 - 3} + \frac{1}{x_2 - 3} = 1$
- c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1(5x_1 + 3x_2 - 17) + x_2(5x_2 + 3x_1 - 17) = 30.$$

- d) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình . Tìm GTNN và GTLN của biểu thức

$$A = x_1(5x_1 + 3x_2 - 17) + x_2(5x_2 + 3x_1 - 17).$$

Dạng 5. Tìm hệ thức giữa các nghiệm của phương trình bậc hai không phụ thuộc vào tham số

Phương pháp giải:

Bước 1. Điều kiện để phương trình có nghiệm: $\Delta \geq 0$

Bước 2. Từ hệ thức viết tìm S, P theo tham số m .

Bước 3. Khử tham số m từ S, P để hệ thức S, P không phụ thuộc tham số m

Bài 9. Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình : $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2 = 0$. Tìm hệ thức giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m .

Bài 10. Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $2x^2 + (2m-1)x + m-1 = 0$. Tìm hệ thức giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m .

Bài 11. Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $(m-1)x^2 - (2m-5)x + m+3 = 0, m \neq 1$. Tìm hệ thức giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m .

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 12. Cho phương trình: $2x^2 - (m+2)x + m = 0$.

- a) Giải phương trình với $m=1$.
- b) Tìm m để phương trình có nghiệm bằng $x_1 = -3$. Tìm nghiệm x_2 còn lại.
- c) Với m tìm được ở câu b), hãy lập phương trình bậc hai nhận $u = \frac{1}{x_1}; v = \frac{1}{x_2}$ làm nghiệm.
- d) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm dương có giá trị tuyệt đối bé hơn.
- e) Tìm m để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.
- f) Gọi x_1, x_2 là nghiệm phương trình. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 độc lập với m .
- g) Tìm các giá trị m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}x_1x_2$.
- h) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 > 0$ và $x_1 = 2x_2$.
- i) Gọi x_1, x_2 là nghiệm phương trình. Tìm GTNN của $P = 2x_1x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2$

Bài 13. Cho phương trình : $x^2 - mx - m - 1 = 0$ (m là tham số)

- a) Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng 5 và tìm nghiệm còn lại?
- b) Với m tìm được ở câu a), hãy lập phương trình bậc hai có u và v là nghiệm biết

$$u = x_1 + \frac{2}{x_2}; v = x_2 + \frac{1}{x_1}.$$

- c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.
- d) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm dương có giá trị tuyệt đối bé hơn.
- e) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $2x_1 - 5x_2 = -2$.
- f) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^3 + x_2^3 = -1$.
- g) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu.
- h) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số.
- i) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_1 - x_2| \geq 3$.
- j) Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{m^2 + 2m}{x_1^2 + x_2^2 + 2}$.

Bài 14. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x - 3 - m = 0$ (ẩn số x)

- a) Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm x_1, x_2 với mọi m .
- b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu
- c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.
- d) Tìm m để phương trình có một nghiệm âm và một nghiệm bằng 0.
- e) Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm dương.
- f) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{4}{x_1} + \frac{4}{x_2} = -\frac{2}{3}$.
- g) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^3 - x_1 - x_2$.
- h) Tìm m sao cho nghiệm số x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 \geq 10$.
- i) Tìm hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc tham số m .

Bài 15. Cho phương trình: $x^2 - 6x + 2m + 1 = 0$

- a) Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng -3.
- b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.
- c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu.
- d) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có giá trị tuyệt đối bé hơn.
- e) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $2x_1 - x_2 = 15$
- f) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2(x_2 + 1) + x_2^2(x_1 + 1) = 68$
- g) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 = x_2 - 4$
- h) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn: $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \frac{4}{5}$.
- i) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 8$
- j) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^3 + x_2^3 < 72$
- k) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Tìm GTNN của biểu thức:

$$A = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$$

Bài 16. Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 5x + m + 4 = 0$

- a) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 23$
- b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^3 + x_2^3 = 35$
- c) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_2 - x_1| = 3$
- d) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_1| + |x_2| = 4$
- e) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $3x_1 + 4x_2 = 6$

f) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -3$

g) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1(1-3x_2) + x_2(1-3x_1) = m^2 - 23$

Bài 17. Cho phương trình bậc hai: $(m+2)x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$ với $m \neq -2$.

- Tìm m để phương trình có 2 nghiệm trái dấu.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn.
- Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $3(x_1 + x_2) = 5x_1 \cdot x_2$

Bài 18. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + 2m + 6 = 0$

- Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.
- Tìm m để phương trình có nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia.
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm GTNN của $y = x_1^2 + x_2^2$.

Bài 19. Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$

- Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt?
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt?
- Tìm GTNN của biểu thức: $x_1^2 + x_2^2$
- Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_1^3 - x_2^3| = 50$

ĐÁP ÁN – HƯỚNG DẪN

Bài 1. $m = 1, 5$ và $x_2 = -0, 5$.

Bài 2. Thay $x = 3$ vào pt: $m^2 - 6m - 7 = 0$. Nhẩm nghiệm $m = -1$ và $m = 7$.

Thay $m = -1$; $x = 3$ vào $x_1 + x_2 = 2(m+3)$ ta được $x_2 = 1$.

Thay $m = 7$; $x = 3$ vào $x_1 + x_2 = 2(m+3)$ ta được $x_2 = 17$.

Bài 5. a) $m < 5$. b) $m = 5$. c) $m < -3$. d) $-3 < m < 5$.
e) $-3 < m < 5$. f) $m = -3$. g) $m \leq -3$ hoặc $m = -5$.

Bài 6) $\Delta' = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0, \forall m$. b) $m = 1$; $x = -2$

c) $\begin{cases} m \neq 1 \\ 2 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 3$ d) $2 < m < 3$

e) $m > 2$ f) $m = 2$ g) $m = 1$ hoặc $m \geq 2$

Bài 7. a) $S^2 - 2P = 12 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -2$. b) $x_1 = \frac{8m+10}{7}; x_2 = \frac{6m+4}{7} \Rightarrow m \in \emptyset$.

c) Biến đổi $-6S + 9P - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{13}{6}$ d) $\frac{S^2 - 2P}{P} = 7 \Leftrightarrow m = 2; m = \frac{1}{2}$

e) $S^2 - 4P = 16 \Leftrightarrow m = 3\sqrt{3}$

f) $S^2 - 2P - 2|P| = 5 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}; m = \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{4}$

g) $3(S^2 - 2P) - 5SP = 4 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Bài 8. $\Delta = 16m^2 - 4m^2; P = 5m^2 - 16; S = 2m$. $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$

a) $S = 0 \Leftrightarrow m = 0$

b) $S - 6 = P - 3S + 9 \Leftrightarrow m = \frac{2 - 2\sqrt{21}}{10}; m = \frac{2 + 2\sqrt{21}}{10}$

c) $5S^2 - 4P - 17S = -34m + 64 = 30$. Vậy $m = 1$.

d) Vì: $5S^2 - 4P - 17S = -34m + 64$. Vì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$ nên $-4 \leq A \leq 132$. Khi $m = 2$ thì $A = -4$ và khi $m = -2$ thì $A = 132$.

Bài 9. $S^2 + 4S - 4P - 4 = 0$

Bài 10. $S + 2P = -\frac{1}{2}$

Bài 11. $4S + 3P = 11$

Bài 12. a) $x = 1; x = \frac{1}{2}$

b) $m = -6; x_2 = 1$

c) $X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow m < -2$

d) $m \in \emptyset$.

e) $S + P = 1$

f) $m = \frac{4}{3}$

g) $m > 0$

h) GTNN = $\frac{15}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

Bài 13. a) $m = 4; x_2 = -1$. $X^2 - \frac{11}{5}X - \frac{12}{5}$

b) $m < -1$

c) $-1 < m < 0$

d) $m = -1; m = \frac{-9}{2}$

e) $m = -1$

f) $m < -1$

g) $S + P = -1$

h) $S^2 - 4P \geq 9 \Leftrightarrow m \geq 1; m \leq -5$

Bài 14. a) $\Delta' = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$

b) $m > -3$

c) $-3 < m < 1$

d) $m = -3$ hoặc $m = -8$

e) $m \geq -3$

f) $m = \frac{15}{11}$

g) GTNN = 8 $\Leftrightarrow m = 1$

h) $m \geq 1,5; m \leq -1,5$

i) $S + 2P = -8$

Bài 15. a) $m = -14$

b) $\frac{-1}{2} < m < 4$

c) $\frac{-1}{2} < m \leq 4$

d) $m < -\frac{1}{2}$

e) $m = -4$

f) $m = \frac{7}{2}$

g) $x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow x_2 - 4 = x_1 + 2$. Vậy $x_1^2 - x_1 - 2 = 0; x_1 = -1; x_2 = 2$

h) $m = 2; m = \frac{-25}{8}$

i) $m = \frac{1}{2}; m = \frac{-13}{8}$

j) $m \geq 3,5$

k) GTNN = 80 $\Leftrightarrow m = 4$

Bài 16. a) $S^2 - 2P = 13; m = -3$

b) $S^3 - 3SP = 35; m = 2$

c) $S^2 - 4P = 9; m = 0$

d) Không có giá trị m

e) $m = -130$

f) $m = 29$

g) $m = 3 - \sqrt{5}; m = -3 + \sqrt{5}$

Bài 17. a) $-2 < m < 4$

c) $-1 < m < 4$

Bài 18. a) $m > 5$ hoặc $m < -1$

c) $m > 5$

e) GTLN $= -17 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

b) $m < -3$

d) Giải phương trình : $\left| (m-2)^3 - (m+3)^3 \right| = 50$

$\Leftrightarrow \left| 5(3m^2 + 3m + 7) \right| = 50 \Leftrightarrow m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$

b) $m > 4$

d) $m = -20$

b) $m < -3$

d) $m = \frac{7 \pm 4\sqrt{7}}{3}$

a) $\Delta = 25$

c) $\min A = \frac{25}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $x = -\frac{1}{2}$.