

LÝ THUYẾT : CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ

DẠNG 1 : SỰ ĐỒNG BIẾN VÀ NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

Bài toán 1: Tìm khoảng đồng biến – nghịch biến của hàm số:

Cho hàm số $y = f(x)$

+) $f'(x) > 0$ ở đâu thì hàm số đồng biến ở đấy.

+) $f'(x) < 0$ ở đâu thì hàm số nghịch biến ở đấy.

Quy tắc:

+) Tính $f'(x)$, giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm.

+) Lập bảng xét dấu $f'(x)$.

+) Dựa vào bảng xét dấu và kết luận.

Bài toán 2: Tìm m để hàm số $y = f(x, m)$ đơn điệu trên khoảng (a, b)

+) Để hàm số đồng biến trên khoảng (a, b) thì $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$.

+) Để hàm số nghịch biến trên khoảng (a, b) thì $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$

***) Riêng hàm số:** $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Có TXĐ là tập D. Điều kiện như sau:

+) Để hàm số đồng biến trên TXĐ thì $y' > 0 \forall x \in D$

+) Để hàm số nghịch biến trên TXĐ thì $y' < 0 \forall x \in D$

+) Để hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì $\begin{cases} y' > 0 \forall x \in (a, b) \\ x \neq -\frac{d}{c} \end{cases}$

+) Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ thì $\begin{cases} y' < 0 \forall x \in (a, b) \\ x \neq -\frac{d}{c} \end{cases}$

***) Tìm m để hàm số bậc 3** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$

+) Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ là tam thức bậc 2 có biệt thức Δ .

+) Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

+) Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Chú ý: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

+) Khi $a > 0$ để hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng k $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = k$.

+) Khi $a < 0$ để hàm số đồng biến trên một đoạn có độ dài bằng $k \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = k$.

DẠNG 2

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

Bài toán 1: tìm điểm cực đại – cực tiểu của hàm số

Dấu hiệu 1:

+) nếu $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định tại x_0 và nó đổi dấu từ dương sang âm khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.

+) nếu $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định tại x_0 và nó đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

*) Quy tắc 1:

+) tính y'

+) tìm các điểm tới hạn của hàm số. (tại đó $y' = 0$ hoặc y' không xác định)

+) lập bảng xét dấu y' . dựa vào bảng xét dấu và kết luận.

Dấu hiệu 2:

cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 tại x_0 .

+) x_0 là điểm cđ $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$

+) x_0 là điểm cđ $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

*) Quy tắc 2:

+) tính $f'(x), f''(x)$.

+) giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm.

+) thay nghiệm vừa tìm vào $f''(x)$ và kiểm tra. từ đó suy kết luận.

Bài toán 2: Cực trị của hàm bậc 3

Cho hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

1. Để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

2. Để hàm số có không cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta \leq 0$

3. Đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu.

+) Cách 1: Tìm tọa độ các điểm cực đại và cực tiểu A, B. Viết phương trình đường thẳng qua A, B.

+) Cách 2: Lấy y chia y' ta được: $y = (mx + n)y' + (Ax + B)$. Phần dư trong phép chia này là $y = Ax + B$ chính là phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu.

Bài toán 3: Cực trị của hàm số bậc 4 trùng phương

Cho hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$

1. Hàm số có đúng 1 cực trị khi $ab \geq 0$.

+) Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực tiểu và không có cực đại.

+) nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và không có cực tiểu.

2. hàm số có 3 cực trị khi $ab < 0$ (a và b trái dấu).

+) nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu.

+) Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu.

3. Gọi A, B, C là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số và $A \in Oy$,

$A(0; c), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), H(0; y_B)$.

+) Tam giác ABC luôn cân tại A

+) B, C đối xứng nhau qua Oy và $x_B = -x_C, y_B = y_C = y_H$

+) Để tam giác ABC vuông tại A: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

+) Tam giác ABC đều: $AB = BC$

+) Tam giác ABC có diện tích S: $S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} |x_B - x_C| \cdot |y_A - y_B|$

4. Trường hợp thường gặp: Cho hàm số $y = x^4 - 2bx^2 + c$

+) Hàm số có 3 cực trị khi $b > 0$

+) A, B, C là các điểm cực trị

$A(0; c), B(\sqrt{b}, c - b^2), C(-\sqrt{b}, c - b^2)$

+) Tam giác ABC vuông tại A khi $b = 1$

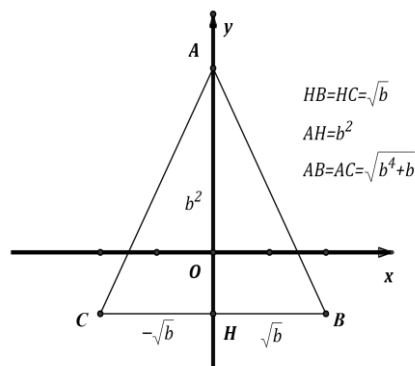
+) Tam giác ABC đều khi $b = \sqrt[3]{3}$

+) Tam giác ABC có $A = 120^\circ$ khi $b = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

+) Tam giác ABC có diện tích S_0 khi $S_0 = b^2 \sqrt{b}$

+) Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp R_0 khi $2R_0 = \frac{b^3 + 1}{b}$

+) Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp r_0 khi $r_0 = \frac{b^2}{\sqrt{b^3 + 1} + 1}$



DẠNG 3

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

+) M là GTLN của hàm số trên D nếu: $\begin{cases} M \geq f(x) \quad \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$. Kí hiệu: $M = \max_D f(x)$

+) m là GTNN của hàm số trên D nếu: $\begin{cases} m \leq f(x) \quad \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$. Kí hiệu: $m = \min_D f(x)$

+) **Nhận xét:** Nếu M, N là GTLN và GTNN của hàm số trên D thì phương trình $f(x) - m = 0$ & $f(x) - M = 0$ có nghiệm trên D .

2. Quy tắc tìm GTLN – GTNN của hàm số:

***) Quy tắc chung:** (Thường dùng cho D là một khoảng)

- Tính $f'(x)$, giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm trên D .
- Lập BBT cho hàm số trên D .
- Dựa vào BBT và định nghĩa từ đó suy ra GTLN, GTNN.

***) Quy tắc riêng:** (Dùng cho $[a; b]$). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[a; b]$.

- Tính $f'(x)$, giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm trên $[a, b]$.
- Giả sử phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \in [a, b]$.
- Tính 4 giá trị $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2)$. So sánh chúng và kết luận.

3. Chú ý:

1. GTLN, GTNN của hàm số là một số hữu hạn.
2. Hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì luôn đạt GTLN, NN trên đoạn này.
3. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[a, b]$ thì $\max f(x) = f(b), \min f(x) = f(a)$
4. Nếu hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[a, b]$ thì $\max f(x) = f(a), \min f(x) = f(b)$
5. Cho phương trình $f(x) = m$ với $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên D thì phương trình có nghiệm khi $\min_D f(x) \leq m \leq \max_D f(x)$

DẠNG 4

TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Định nghĩa:

+) Đường thẳng $x = a$ là TCD của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu có một trong các điều kiện sau:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} y = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow a^+} y = -\infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow a^-} y = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow a^-} y = -\infty$$

+) Đường thẳng $y = b$ là TCN của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu có một trong các điều kiện sau:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = b \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = b$$

2. Dấu hiệu:

+) Hàm phân thức mà nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử có tiệm cận đứng.

+) Hàm phân thức mà bậc của tử $\leq$ bậc của mẫu có TCN.

+) Hàm căn thức dạng: $y = \sqrt{x} - \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} - bt$, $y = bt - \sqrt{x}$ có TCN. (Dùng liên hợp)

+) Hàm $y = a^x$, ($0 < a \neq 1$) có TCN $y = 0$

+) Hàm số $y = \log_a x$, ($0 < a \neq 1$) có TCĐ $x = 0$

3. Cách tìm:

+) TCĐ: Tìm nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử.

+) TCN: Tính 2 giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

4. Chú ý:

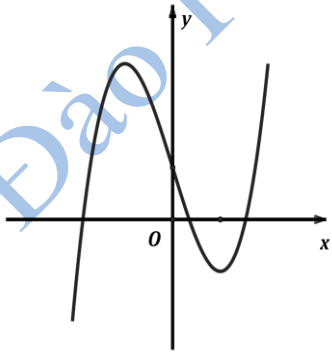
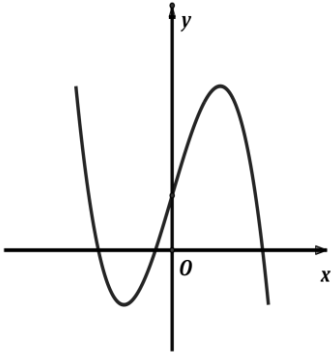
+) Nếu $x \rightarrow +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$

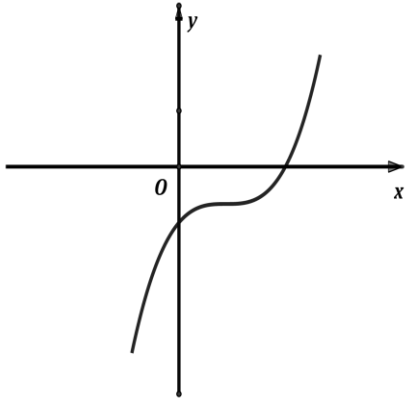
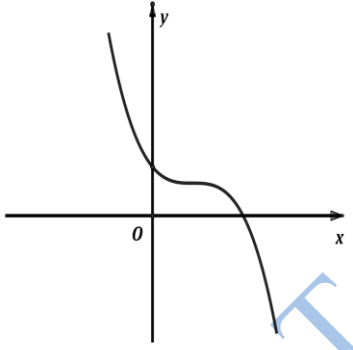
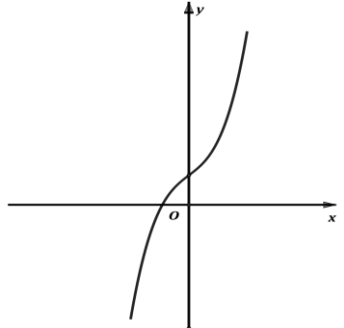
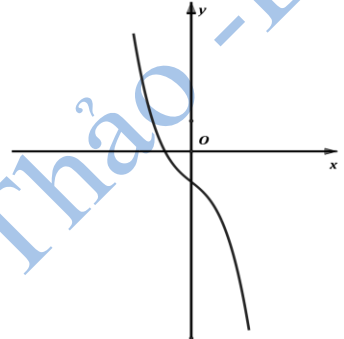
+) Nếu $x \rightarrow -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = -x$

DẠNG 5 : BẢNG BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Định hình hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay $\Delta_{y'} > 0$		

$y' = 0$ có hai nghiệm kép hay $\Delta_{y'} = 0$		
$y' = 0$ vô nghiệm hay $\Delta_{y'} > 0$		

1. Định hình hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + c$

+) Đạo hàm: $y' = 4ax^2 + 2bx = 2x(2ax + b)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax + b = 0 \end{cases}$

+) Để hàm số có 3 cực trị: $ab < 0$

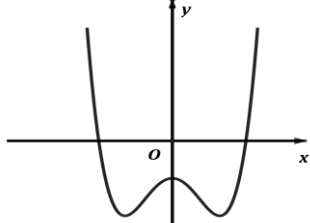
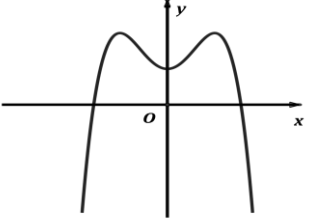
- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu

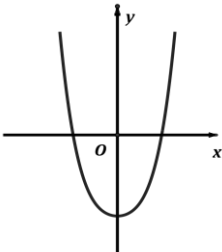
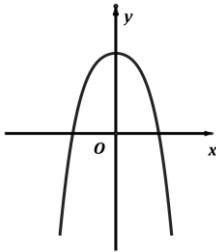
- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu

+) Để hàm số có 1 cực trị $ab \geq 0$

- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực tiểu và không có cực đại

- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và không có cực tiểu

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt hay $ab < 0$		

$y' = 0$ có đúng 1 nghiệm hay $\Delta \geq 0$		
---	---	---

3. Định hình hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

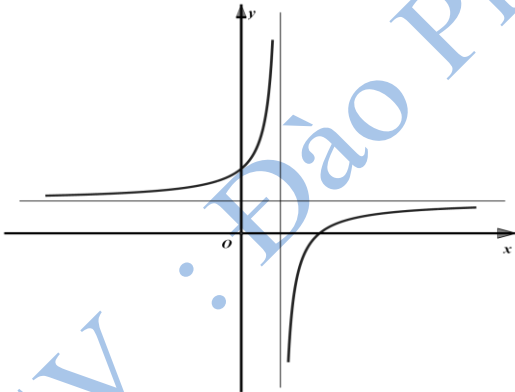
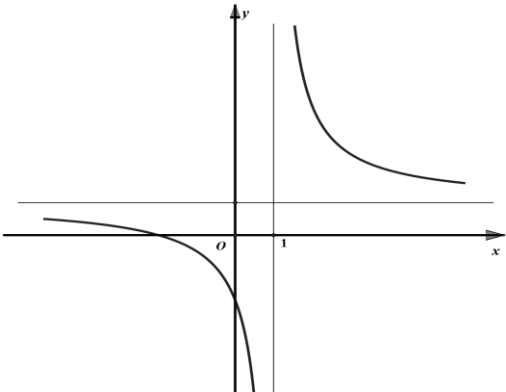
+) Đạo hàm: $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

- Nếu $ad - bc > 0$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 2 và 4.

- Nếu $ad - bc < 0$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 1 và 3.

+) Đồ thị hàm số có: TCD: $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$

+) Đồ thị có tâm đối xứng: $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$

$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$
	

DẠNG 6 : SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI TOÁN 1: TỌA ĐỘ GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ:

Phương pháp:

Cho 2 hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C') .

- +) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'): $f(x) = g(x)$
- +) Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.
- +) Số nghiệm của (*) là số giao điểm của (C) và (C').

BÀI TOÁN 2: TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM BẬC 3

Phương pháp 1: Bảng biến thiên (PP đồ thị)

- +) Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x, m) = 0$ (phương trình ẩn x tham số m)
- +) Cô lập m đưa phương trình về dạng $m = f(x)$
- +) Lập BBT cho hàm số $y = f(x)$.
- +) Dựa vào giả thiết và BBT từ đó suy ra m.

*) **Dấu hiệu:** Sử dụng PP bảng biến thiên khi m độc lập với x

GV : Đào Phương Thảo -LT