



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU



LÝ THUYẾT.

I. ĐỊNH NGHĨA MẶT CẦU

Cho trước điểm I và số dương R . Mặt cầu tâm I bán kính R là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm I một khoảng bằng R .



Nhận xét:

- Điểm M thuộc mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM = R$.
- Điểm M nằm trong mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM < R$.
- Điểm M nằm ngoài mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM > R$.

II. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ bán kính R có phương trình là:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Ta có thể viết phương trình đó về dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Vậy mỗi mặt cầu đều có phương trình dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Ngược lại, xét phương trình có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình một mặt cầu khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Ngoài ra, nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ thì phương trình đó xác định mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilomet), một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí $I(1;2;1)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng $5000m$.



- Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian?
- Nhà bạn Diệp Chi, và Tuệ Nhi có vị trí tọa độ lần lượt là $A(3;2;-1)$ và $B(4;-3;5)$. Hỏi Diệp Chi và Tuệ Nhi dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này hay không?

Lời giải

- Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$$

- Do $IA = \sqrt{(3-1)^2 + (2-2)^2 + ((-1)-1)^2} = \sqrt{8} < 5$ nên điểm $A(2;3;-1)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy bạn Diệp Chi có thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

$$IB = \sqrt{(4-1)^2 + ((-3)-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{50} > 5 \text{ nên điểm } B(4;-3;5) \text{ nằm ngoài mặt cầu đó.}$$

Vậy bạn Tuệ Nhi không thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilomet), một trạm phát sóng radar của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2;1;-1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa $500km$.



- a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của radar trong không gian?
- b) Hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh đang bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $M(-200;100;-250)$ và $N(350;-100;300)$. Hỏi hai chiếc máy bay đó có bị radar phát hiện hay không?

Lời giải

- a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của radar trong không gian là:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 250000$$

- b) Có: $IM = \sqrt{(-200+2)^2 + (100-1)^2 + (-250+1)^2} \approx 333,2 < 500$ nên điểm $M(-200;100;-250)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy chiếc máy bay do thám của Mỹ có thể bị phát hiện bởi trạm radar này.

Có: $IN = \sqrt{(350+2)^2 + ((-100)-1)^2 + (300+1)^2} \approx 474 < 500$ nên điểm $N(350;-100;300)$ nằm trong mặt cầu đó.

Vậy chiếc máy bay do thám của Anh có thể bị phát hiện bởi trạm radar này.



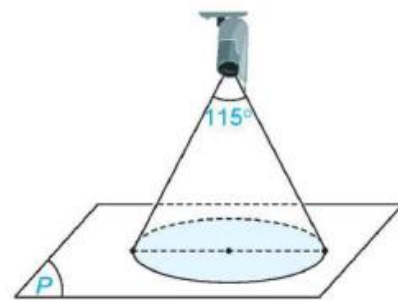
HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

- Câu 1:** Trong không gian Oxyz, một vòm được thiết kế có bề mặt là mặt cầu tâm $I(1;2;20)$, bán kính bằng $50(m)$ và có đáy nằm trên mặt phẳng (Oxy). Chiều cao của vòm là bao nhiêu? (biết đơn vị của hệ trục tọa độ là mét)

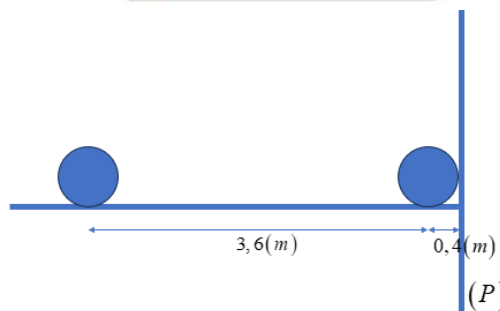


- Câu 2:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), người ta đặt một trạm thu phát sóng điện thoại được đặt ở vị trí $A(-1;2;-3)$. Biết rằng trạm thu phát sóng được thiết kế với bán kính là 4 km, viết phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian?
- Câu 3:** Trong không gian Oxyz (đơn vị của các trục tọa độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-2;1;-4)$. Biết bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Có 5 người sử dụng điện thoại tại các điểm $A(2;-1;3), B(0;1;-4), C(-2;1;-3), D(0;1;-3), E(-4;-2;1)$. Hỏi trong số 5 người đó, có bao nhiêu người có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

Câu 4: Góc quan sát ngang của một camera là 115° . Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $C(4;2;3)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$. Biết vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn. Tính diện tích của vùng quan sát đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, một quả cầu có tâm đặt tại điểm $I(0;3;0)$ đang chuyển động thẳng đều theo phương vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 9 = 0$ với vận tốc $0,002(m/s)$. Sau 30 phút thì quả cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Biết đơn vị của hệ trục tọa độ $Oxyz$ là mét. Bán kính của mặt cầu là



Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là mét, một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí I . Biết ngọn hải đăng đó được thiết kế với đường kính phủ sáng là 6 km. Giả sử người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí I . Hỏi vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng cách I một đoạn bằng bao nhiêu?



Câu 7: Phần mềm mô phỏng thiết bị thám hiểm đại dương có dạng hình cầu trong không gian $Oxyz$. Biết tọa độ tâm mặt cầu là $I(360;200;400)$ và bán kính $r = 2$ m. Phương trình của mặt cầu là



Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là mét, một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21;35;50)$. Biết ngọn hải đăng đó được thiết kế với đường kính phủ sáng là 8 km. Phương trình mặt cầu để mô tả vùng phủ sáng của ngọn hải đăng là

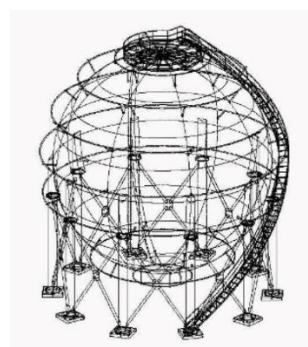


Câu 9: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là cm), mặt sàn nhà đa năng thuộc mặt phẳng Oxy . Một quả cầu bằng nhựa nằm trên mặt sàn nhà đa năng và có tâm $I(12; 20; 50)$. Khi đó, mặt ngoài của quả cầu nhựa (S) có phương trình là

Câu 10: Một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí $I(2; -1; 1)$ được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km. Một người dùng điện thoại đang ở vị trí $M(0; 1; 2)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng này hay không?

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là km), bốn chiếc máy bay ở bốn hướng khác nhau khi vừa bay vào vùng phủ sóng của một chiếc ra đa thì trên ra đa ngay lập tức báo tín hiệu phát hiện mục tiêu. Tại thời điểm ra đa phát hiện mục tiêu thì 4 chiếc máy bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $A(30; 25; 33), B(14; 1; 49), C(40; -29; 1), D(0; 31; 41)$. Phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới vùng phủ sóng của ra đa trong không gian là

Câu 12: Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hóa lỏng hình cầu bằng phần mềm 3D. Cho biết tâm mặt cầu có tọa độ $I(2; 3; 4)$ và mặt cầu tiếp xúc với nắp đáy là mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-7; 0; 4), B(-\frac{2}{3}; 0; \sqrt{7}), C(-\sqrt{2} + 1; 0; -\frac{\sqrt{3}}{5})$ như hình vẽ. Đường kính của bồn chứa khí hóa lỏng bằng bao nhiêu?

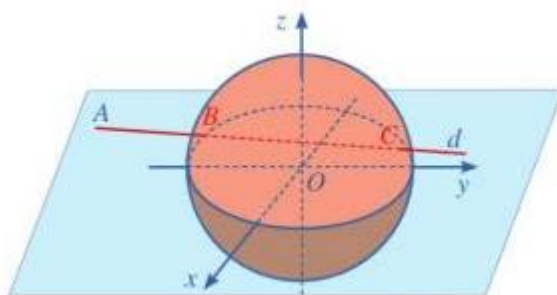


Câu 13: Phía trước của một sân vận động, người ta có đặt một quả bóng đá khổng lồ. Cách đó không xa, có một bóng đèn. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là mét), giả sử mặt ngoài quả bóng (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ và bóng đèn ở vị trí $M(15; 1; 6)$. Khi đó, khoảng cách xa nhất mà bóng đèn có thể chiếu đến một điểm trên quả bóng bằng MA , với MA chính là tiếp tuyến kẻ từ M đến (S) và A là tiếp điểm. Vậy MA bằng bao nhiêu mét?

Câu 14: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh – Khánh Hòa ở vị trí $O(0; 0; 0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600km . Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí A , chuyển động theo

đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -200 + 80t \\ z = 10 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu

(như hình vẽ). Khoảng cách giữa vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa và vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa là bao nhiêu?



Câu 15: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Viettel được đặt ở vị trí $I(-1; 2; 3)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là $5000m$. Phương trình mặt cầu biểu diễn ranh giới vùng phủ sóng là:

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là kilômét, một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(-3; 2; 7)$, trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km. Người dùng điện thoại ở điểm nào có thể sử dụng dịch vụ của trạm này?

- A. $A(2; 3; 4)$. B. $B(-2; 1; 8)$.
C. $C(1; 1; 1)$. D. $D(-3; -1; 3)$.



Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(1; 5; 5)$ như hình vẽ. Ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sóng là 5 km.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

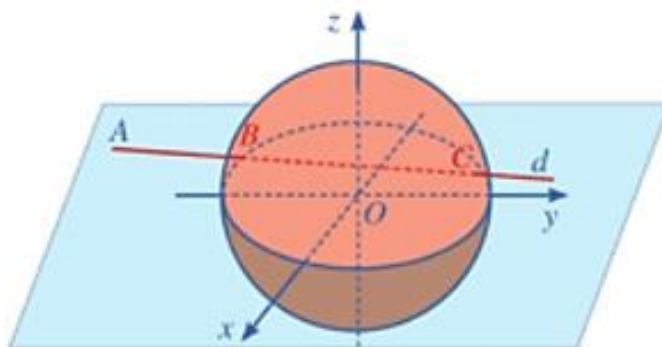
Một người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(1; 5; 5)$ đến vị trí $A(7; 14; 11)$. Điểm nào sau đây mà người đi biển đi qua và vẫn thuộc vùng phủ sóng của ngọn hải đăng?

- A. $M(3; 8; 7)$. B. $N(0; 4; 8)$. C. $P(7; 3; 0)$. D. $Q(7; 11; 3)$.

Câu 18: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng radar của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(2; -1; -3)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa $500km$. Điểm nào sau đây nằm trong vùng phủ sóng của radar?

- A. $N(500; 200; 100)$. B. $P(-300; 250; 400)$.
C. $M(200; -100; -230)$. D. $Q(120; -200; -500)$.

Câu 19: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0; 0; 0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với $1km$. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát $417km$ sẽ hiển thị trên màn hình radar. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688; -185; 8)$, chuyển động theo theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (91; 75; 0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu. Hãy xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình radar.



Câu 20: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn vệ tinh $A(0;4;5)$, $B(-3;-1;3)$, $C(-2;8;9)$, $D(-7;2;-3)$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến điểm M biết rằng khoảng cách từ các vệ tinh đến điểm M lần lượt là $MA=3$, $MB=5$, $MC=9$, $MD=10$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

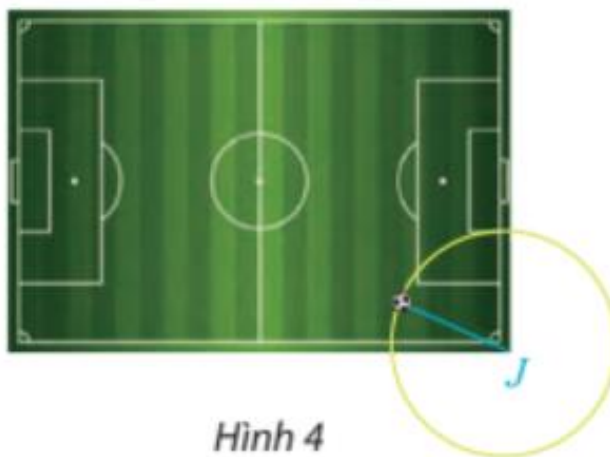
Câu 21: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được một khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ.



Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.
(Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>)

Bốn vệ tinh được đặt tại các điểm $A(9;-2;7)$, $B(1;4;8)$, $C(7;-3;-5)$, $D(-4;-11;12)$. Một con tàu đang ở vị trí điểm $M(x;y;z)$ mà khoảng cách từ nó đến các vệ tinh lần lượt là $MA=\sqrt{58}$, $MB=\sqrt{83}$, $MC=\sqrt{173}$, $MD=\sqrt{97}$. Khi đó tổng bình phương tọa độ điểm M là

Câu 22: Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M . Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z=0$, đồng thời thuộc mặt cầu (S): $(x-22)^2 + (y-4)^2 + (z-13)^2 = 194$ (đơn vị độ dài tính theo mét). Gọi J là hình chiếu tâm I của mặt cầu (S) xuống mặt sân bóng. Khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là:



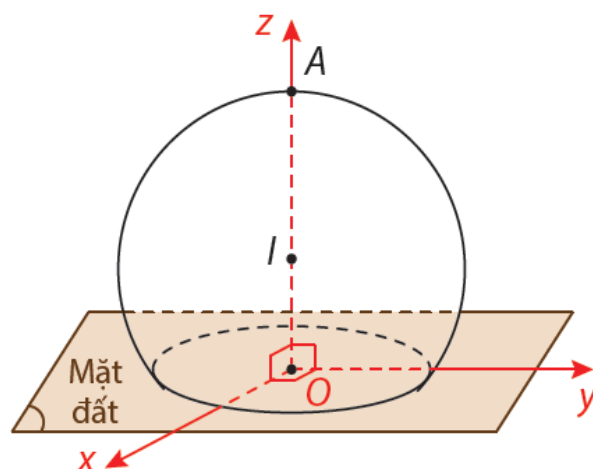
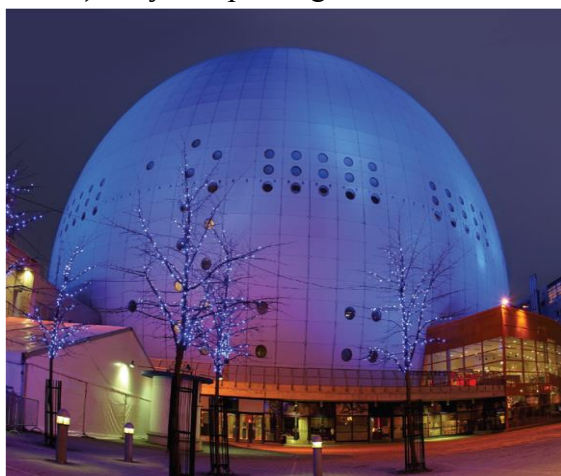
Hình 4

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3; -2; 1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2; -5; 0)$ trên đường băng. Có một đám mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 16$ tại $M\left(\frac{10}{9}; -\frac{25}{9}; \frac{7}{9}\right)$. Tính độ cao của máy bay khi đi xuyên qua đám mây để hạ cánh (Giả sử mặt đất ở vị trí máy bay đang bay được coi là mặt phẳng mặt phẳng (Oxy))

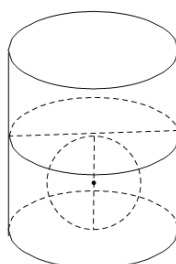
Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21; 35; 50)$ và ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km . Nếu người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(21; 35; 50)$ đến vị trí $D(5121; 658; 0)$ hãy tìm vị trí cuối cùng trên đoạn ID sao cho người đi biển có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng (kết quả làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai).



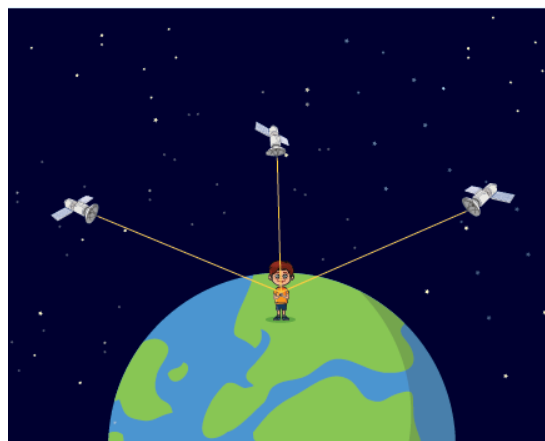
Câu 25: Ericsson Globe (Thủy Điện) là toà nhà bán cầu lớn nhất trên thế giới (năm 2020), với hình dạng một quả cầu màu trắng có đường kính 110 m và chiều cao bên trong 85 m, nó có đủ chỗ ngồi cho 16 000 khán giả của các buổi biểu diễn hoà nhạc hoặc 13 850 khán giả của các trận đấu khúc côn cầu trên băng. Giả sử ta biểu diễn mô phỏng của toà nhà Ericsson Globe trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ bởi một mặt cầu có tâm I , đường kính 110 m và $OI = 85\text{ m}$ như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Hãy viết phương trình của mặt cầu này.



Câu 26: Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn $4,5\text{ cm}$ vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên bi đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng. Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4\text{ cm}$ và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng $4,5\text{ cm}$. Bán kính của viên bi đó bằng?



Câu 27: Giả sử Trái Đất có dạng hình cầu bán kính bằng $6,4 \cdot 10^6 m$. Bạn An đang đứng trên mặt đất. Có 3 vệ tinh báo về máy chủ tiếp nhận thông tin rằng vệ tinh thứ nhất đang cách An $3 \cdot 10^6 m$, vệ tinh thứ hai đang cách An $4 \cdot 10^6 m$ và vệ tinh thứ ba đang cách An $5 \cdot 10^6 m$. Biết rằng trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước với O là tâm Trái Đất ($1 \text{ đơn vị} = 10^6 m$), tại thời điểm vệ tinh thông báo về máy chủ thì tọa độ của các vệ tinh lần lượt là $I_1(4; 4; 6)$, $I_2(8; 4; 3)$ và $I_3(4; 9; 3)$. Hãy tìm tọa độ vị trí của bạn An (làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 28: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là mét), một thiết bị phát sóng wifi đặt tại vị trí $A(3; 1; 1)$ như hình vẽ. Vùng phủ sóng tốt nhất của thiết bị có bán kính bằng $11 (m)$. Hỏi số giá trị nguyên của tham số m để một người sử dụng điện thoại tại điểm $E(-3; 8; m)$ có thể bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên.



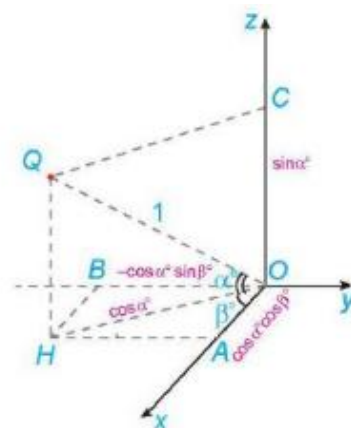
Câu 29: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có ranh giới của vùng phủ sóng là hình cầu (S) đường kính AB biết $A(1; 3; -2)$, $B(3; -1; 0)$.

a) Viết phương trình mặt cầu (S) .

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để một người dùng điện thoại di động tại điểm $C(m+2; m; m)$ có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

c) Người dùng điện thoại di động tại điểm $D(n; n+3; n-1)$, $n \in \mathbb{R}$ có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không?

Câu 30: Xét Trái Đất trong không gian $Oxyz$, với O là tâm trái đất, tia Ox chứa giao điểm của kinh tuyến gốc và xích đạo, tia Oz chứa điểm cực bắc N , tia Oy giao xích đạo tại điểm thuộc bán cầu Đông, một đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6371 km trong thực tế. Biết rằng điểm M có vĩ độ và kinh độ tương ứng là $\alpha^\circ N, \beta^\circ W$ ($0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 180$) thì có tọa độ là $M(\cos \alpha^\circ \cos \beta^\circ; -\cos \alpha^\circ \sin \beta^\circ; \sin \alpha^\circ)$. Giả sử một trạm phát sóng trên mặt đất được đặt ở vị trí $10^\circ N, 20^\circ W$ và một máy thu được đặt tại vị trí $80^\circ N, 70^\circ W$. Biết rằng trạm phát sóng có bán kính phủ sóng là 8272 km , hỏi máy thu có thu được tín hiệu của trạm phát sóng không (các phép tính được làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư sau dấu phẩy)?



Câu 31: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Viettel được đặt ở vị trí $I(1;2;4)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là 4 km .



- a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 4$.
- b) Bạn An có vị trí tọa độ là $A(-1;0;0)$ có thể sử dụng được dịch vụ của trạm này.
- c) Bạn Bình có vị trí tọa độ là $B(2;0;2)$ có thể sử dụng được dịch vụ của trạm này.
- d) Giả sử bạn An đến nhà bạn Bình theo con đường là một đường thẳng. Bạn An có thể bắt được sóng trạm này khi đi được $2,38\text{ km}$.

Câu 32: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một trạm thu phát sóng điện thoại di động (Hình bên) được đặt ở vị trí $I(2;1;-3)$. Trạm thu phát được thiết kế bán kính phủ sóng là 3 km .



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

- a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$.
- b) Người dùng điện thoại đứng ở vị trí $A(0;1;-2)$ không sử dụng được dịch vụ của trạm này.
- c) Người dùng điện thoại đứng ở vị trí $B(6;-3;-1)$ sử dụng được dịch vụ của trạm này.
- d) Có một người đi từ vị trí $I(2;1;-3)$ đến vị trí $B(6;-3;-1)$ theo một đường thẳng, vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng IB để người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm này là $C(x;y;z)$ với $x+y+z=-1$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên trục là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động (hình vẽ dưới đây) được đặt ở vị trí $I(-4; 2; 5)$. Biết rằng trạm phát sóng được thiết kế với bán kính phủ sóng là 4 km.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng là:

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 16$$

b) Điểm $A(3; 5; -6)$ nằm phía trong mặt cầu đó.

c) Nếu người dùng đứng ở vị trí điểm $B(-2; 3; 0)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng này.

d) Nếu người dùng đứng ở vị trí điểm $M(-4; 6; 2)$ thì quãng đường ngắn nhất người đó phải di chuyển để đến được vị trí có thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng là 1 km.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(-3; 5; 2)$ được thiết kế với bán kính phủ sóng 4 km, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km.

a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x+3)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 = 16$

b) Khoảng cách xa nhất giữa hai điểm thuộc vùng phủ sóng là 8 km.

c) Người dùng điện thoại ở vị trí A có tọa độ $(-3; 4; 1)$ không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Trong điều kiện giao thông thuận lợi, khoảng cách ngắn nhất để người B ở tọa độ $(8; 6; 2)$ di chuyển tới vùng phủ sóng là 11,05 km.

Câu 35: Một tháp kiểm soát không lưu ở sân bay cao 109 m đặt một đài kiểm soát không lưu ở độ cao 105 m. Máy bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 450 km sẽ hiển thị trên màn hình radar. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox là hướng tây, trục Oy là hướng nam và trục Oz là trục thẳng đứng (Hình bên dưới), đơn vị trên mỗi trục là kilômét.



(Nguồn: <https://znews.vn/>)

Một máy bay đang ở vị trí A cách mặt đất 8 km, cách 268 km về phía đông, 185 km về phía nam so với tháp kiểm soát không lưu và đang chuyển động theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (82; 76; 0)$ hướng về đài kiểm soát không lưu.

a) Đài kiểm soát không lưu có tọa độ là $(0; 0; 0)$.

b) Vị trí A có tọa độ là $(-268; 185; 8)$

c) Đài kiểm soát không lưu có phát hiện được máy bay tại vị trí A .

d) Khoảng cách gần nhất giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu là 217,96 km.

Câu 36: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng (Hình bên) được đặt ở vị trí $I(-2;1;3)$. Ngọn hải đăng được thiết kế bán kính phủ sáng là $5km$.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

- Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng là $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$.
- Người đi biển đứng ở vị trí $A(2;3;1)$ có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.
- Người đi biển đứng ở vị trí $B(-2;-5;6)$ không thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.
- Một người đi biển đang ở vị trí $C(5;3;-2)$. Tính theo đường chim bay, khoảng cách ngắn nhất người đó phải di chuyển để có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng là 73 .

Câu 37: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian (Hình minh họa).

Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Như vậy điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.



Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.

(Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>)

Ta xét ví một ví dụ cụ thể sau: Cho bốn vệ tinh $A(1;-1;2), B(2;1;3); C(-1;4;0); D(2;3;1)$.

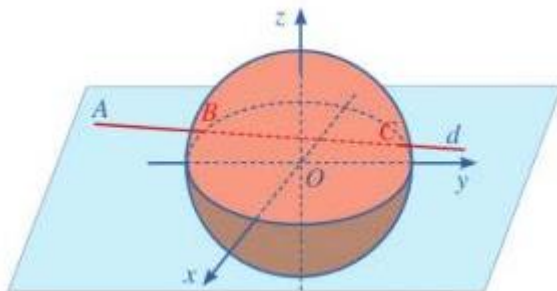
Một chiếc máy bay quân sự đang ở vị trí M với $MA=3; MB=\sqrt{5}; MC=\sqrt{26}; MD=\sqrt{5}$.

- Mặt cầu tâm A đi qua điểm M có bán kính là 3 .
- Phương trình mặt cầu (S_1) tâm A bán kính MA là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$.
- Phương trình mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu (S_1) và $S(B, MB)$ là $x + 2y + z - 6 = 0$.
- Tọa độ của máy bay quân sự là $M(x; y; z)$ với $x + y + z = 3$.

Câu 38: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh – Khánh Hòa ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa $600km$. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí

$$A(-800;-40;10), \text{ chuyển động theo đường thẳng } d \text{ có phương trình } \begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -200 + 80t \\ z = 10 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2 + y^2 + z^2 = 600^2$.

b) Giả sử $B(-1000 + 100b; -200 + 80b; 10)$ là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa. Khi đó $b \in [4; 5]$.

c) Giả sử $C(-1000 + 100c; -200 + 80c; 10)$ là vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa. Khi đó $c \in [8; 9]$.

d) Khoảng cách ngắn nhất (làm tròn đến hàng phần trăm) giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu là $250,51km$.

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), Một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt ở tại vị trí $I(2;0;0)$. Vùng phủ sóng của trạm có bán kính bằng $2km$. Hai người bạn Mai và Nga cùng sử dụng điện thoại. Bạn Mai dùng điện thoại tại vị trí $M(2;1;1)$, bạn Nga dùng điện thoại tại vị trí $N(1;2;2)$.



a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sóng là: $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 2$

b) Bạn Mai có thể sử dụng được dịch vụ của trạm phát sóng trên.

c) Hai bạn Mai và Nga liên lạc được với nhau.

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách ngắn nhất để bạn Nga di chuyển tới vùng phủ sóng của trạm là $1(km)$.

Câu 40: Một sân khấu đã được thiết lập một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét) để đạo diễn có thể sắp đặt ánh sáng và xác định vị trí của các diễn viên. Người đạo diễn đặt một đèn chiếu sáng ở vị trí $I(1;2;3)$ tạo ra một vùng sáng là mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ bán kính $10(m)$.

- Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 100$.
- Diễn viên A đang đứng trên sân khấu ở vị trí $A(3;4;5)$ để chuẩn bị biểu diễn. Khi đó diễn viên A đang được đèn chiếu sáng.
- Diễn viên B luôn đứng yên ở vị trí $B(10;11;12)$. Diễn viên A biểu diễn luôn cách tâm I một khoảng bằng $1(m)$. Khoảng cách ngắn nhất giữa hai diễn viên A và B bằng $5m$.
- Diễn viên A biểu diễn luôn cách tâm I một khoảng bằng $1(m)$, còn diễn viên C có nhiệm vụ di chuyển xung quanh rìa của vùng chiếu sáng. Tổng khoảng cách từ B đến A và C có giá trị lớn nhất là $11(m)$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(20;35;60)$, biết rằng ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km .



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

- Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là $(x-20)^2 + (y-35)^2 + (z-60)^2 = 4^2$.
- Điểm $B(-290; -165; 3660)$ nằm phía trong mặt cầu đó.
- Nếu người đi biển ở vị trí $C(541;137;-690)$ thì không thể nhìn được ánh sáng từ ngọn hải đăng.
- Giả sử người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí điểm $I(20; 35; 60)$ đến vị trí $D(4020; 35; 3060)$. Vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng ID sao cho người đi biển vẫn còn nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng là $M(-3180;35;2460)$.

Câu 42: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Như vậy điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.



Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho bốn vệ tinh $A(3;-1;6)$, $B(1;4;8)$, $C(7;9;6)$, $D(7;-15;18)$.

a) Phương trình mặt cầu tâm A bán kính bằng 6 có phương trình là:

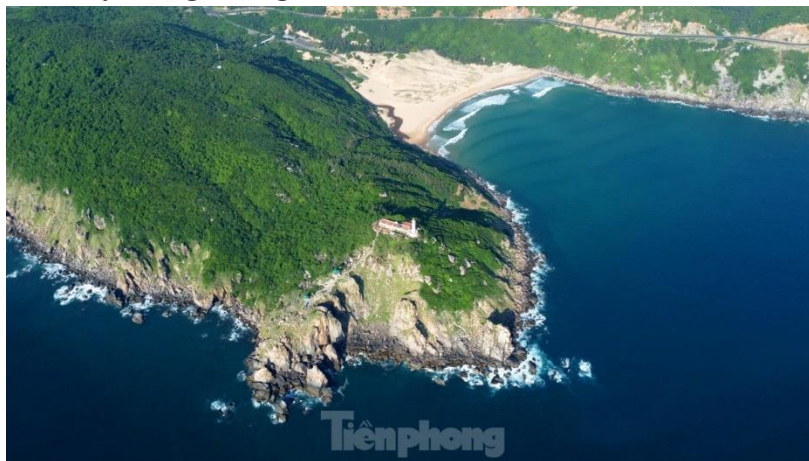
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-6)^2 = 36.$$

b) Nếu điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt cầu tâm B bán kính bằng 7 thì tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình: $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 7$.

c) Khoảng cách từ điểm $N(2;-3;5)$ đến vệ tinh D là lớn nhất.

d) Biết khoảng cách từ điểm $M(x;y;z)$ đến các vệ tinh lần lượt là $MA=6$, $MB=7$, $MC=12$, $MD=24$. Khi đó $x+y+z=4$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), tháp hải đăng Mũi Điện - Phú Yên (là nơi đón ánh bình minh đầu tiên trên đất liền Tổ Quốc), chân tháp được đặt vuông góc với mặt đất (chiều từ chân tháp lên đỉnh tháp cùng hướng với chiều dương của trục Oz) ở vị trí điểm $A(12.040.271; 1.418.620; 84)$. Ngọn đèn của hải đăng được đặt trên đỉnh của tháp hải đăng hình trụ cao 26 m so với mặt đất và sử dụng pin năng lượng mặt trời, có thể phát tín hiệu ánh sáng xa khoảng 27 hải lý tương đương 50 km.



- Mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng có tâm $I(12.040.271; 1.418.620; 110)$ bán kính $R = 50000(m)$.
- Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là $(S): (x - 12.040.271)^2 + (y - 1.418.620)^2 + (z - 84)^2 = 50.000^2$.
- Người đi biển ở trên Cù lao Mái nhà tại vị trí $B(12.026.000; 1.461.000; 0)$ nhìn thấy ánh đèn của ngọn hải đăng.
- Điểm cực đông của mũi Điện là điểm $C(12.040.452; 1.418.462; 0)$. Từ điểm C một chiếc tàu di chuyển trên mặt biển (mặt phẳng Oxy) theo hướng của vector đơn vị $\vec{i}$, để vẫn nhìn thấy ánh đèn của hải đăng thì khoảng cách tối đa tàu di chuyển là 50.000 mét.