

PHẦN I – ĐỀ BÀI HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 + mx + 2$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

- A. $m > -3$ B. $m < -3$ C. $m > 3$ D. $m < 3$

Câu 2. Cho hàm số: $y = x^4 - 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm này tạo thành một tam giác đều

- A. $m = 2 - \sqrt[3]{3}$ B. $2 - \sqrt{3}$ C. $3 - \sqrt{2}$ D. $3 - \sqrt[3]{2}$

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là (C) . Tìm tất cả những điểm trên đồ thị (C) sao cho hệ số

góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại những điểm đó là giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = \frac{4x^2 + 3}{x^4 + 1}$

- A. $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ B. $\left(-1; -\frac{3}{2}\right); \left(\frac{4}{3}; \frac{40}{27}\right)$
C. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}; 0\right); (-2; -10)$

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x+1}$ có đồ thị (C) điểm $A(-5; 5)$. Tìm m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt

đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành (O là gốc tọa độ).

- A. $m = 0$ B. $m = 0; m = 2$ C. $m = 2$ D. $m = -2$

Câu 5. Cho hàm số: $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C). Tìm a sao cho từ $A(0, a)$ kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) nằm ở hai phía trục Ox .

- A. $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ B. $(-2; +\infty) \setminus \{1\}$ C. $(-2; +\infty)$ D. $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

Câu 6. Hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị $y = \frac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng?

- A. 8 B. 4 C. $x_M < 3$ D. $8\sqrt{2}$.

Câu 7. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$

- A. $m = 1$ B. $m = -2$ C. $m = 2$ D. $m = -1$

Câu 8. Cho $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m - n^2$.

- A. $m - n^2 = 2018$. B. $m - n^2 = -2018$. C. $m - n^2 = 1$. D. $m - n^2 = -1$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $f(c) > f(a) > f(b)$.
B. $f(c) > f(b) > f(a)$.

C. $f(a) > f(b) > f(c)$.

D. $f(b) > f(a) > f(c)$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (2m-1)x - (3m+2)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-3 \leq m \leq -\frac{1}{5}$.

B. $-3 < m < -\frac{1}{5}$.

C. $m < -3$.

D. $m \geq -\frac{1}{5}$.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số: $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3

A. $m < 0$ hoặc $m > 6$

B. $m > 6$

C. $m < 0$

D. $m = 9$

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và A là điểm thuộc (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ A đến các tiệm cận của (C).

A. $2\sqrt{2}$

B. 2

C. 3

D. $2\sqrt{3}$

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

A. 12

B. -4

C. -3

D. 1

Câu 14. Nếu đồ thị hàm số $y = \frac{x-4}{x+1}$ cắt đường thẳng (d): $2x + y = m$ tại hai điểm AB sao cho độ dài AB nhỏ nhất thì

A. $m = -1$

B. $m = 1$

C. $m = -2$

D. $m = 2$

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2$. Tìm m để trên đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng qua gốc tọa độ

A. $-1 \leq m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$

B. $-1 < m < 0$ hoặc $m > 1$

C. $1 > m > 0$ hoặc $m < -1$

D. $1 \geq m \geq 0$ hoặc $m \leq -1$

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y = m^2x + 2m^3$. Biết rằng m_1, m_2 ($m_1 > m_2$) là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$. Phát biểu nào sau đây là **đúng** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2 ?

A. $m_1 + m_2 = 0$.

B. $m_1^2 + 2m_2 > 4$.

C. $m_2^2 + 2m_1 > 4$.

D. $m_1 - m_2 = 0$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận của (C). Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài IM là ngắn nhất?

A. $M_1(0; -3)$ và $M_2(-2; 5)$

B. $M_1(1; -1)$ và $M_2(-3; 3)$

C. $M_1\left(2; -\frac{1}{3}\right)$ và $M_2\left(-4; \frac{7}{3}\right)$

D. $M_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{3}\right)$ và $M_2\left(-\frac{5}{2}; \frac{11}{3}\right)$

Câu 18. Giá trị của tham số m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $m = 2$

B. $m = 1$

C. $m = -1$

D. $m = -2$

Câu 19. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ hợp với 2 trục tọa độ 1 tam giác có diện tích S bằng:

A. $S = 1,5$

B. $S = 2$

C. $S = 3$

D. $S = 1$

Câu 20. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ có đồ thị (C). Giá trị của m thì (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$ là

- A. $m < 1$ B. $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ C. $-\frac{1}{4} < m < 1$ D. $\frac{1}{4} < m < 1$

Câu 21. Cho hàm số $y = (x-m)^3 - 3x + m^2(1)$. Gọi M là điểm cực đại của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị m thích hợp đồng thời là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị khác của m . Số điểm M thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 22. Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Người ta dựng một hình chữ nhật MNPQ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định giá trị lớn nhất của hình chữ nhật đó?

- A. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ C. 0 D. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{x}{1-x}$ (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = mx - m - 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $A(-1; 1)$.

- A. $m = 1$ B. $m = 2$ C. $m = -1$ D. $m = 3$

Câu 24. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị là:

- A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$ B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$
C. $m = -1$ hoặc $m = 3$ D. $1 \leq m \leq 3$

Câu 25. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1 (O là gốc tọa độ).

- A. $m = 1$ B. $m = 2$ C. $m = \pm 1$

Câu 26. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2\sin^2 x}{\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}}$ là

- A. 0 B. 4 C. 8 D. 2

Câu 27. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ có đồ thị (C), với m là tham số. Giả sử đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3$.

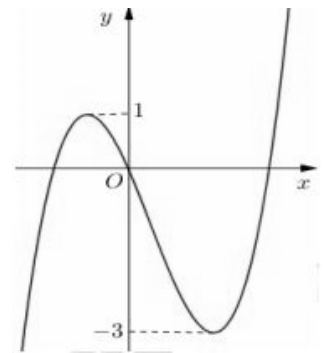
Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $1 < x_1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$ B. $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$
C. $x_1 < 0 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$ D. $1 < x_1 < 3 < x_2 < 4 < x_3$

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng

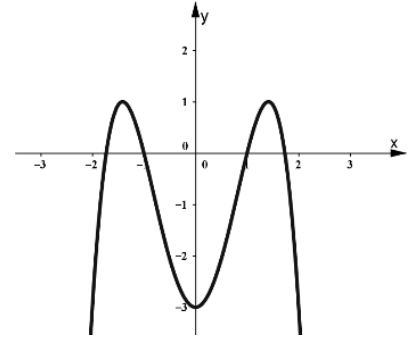
$$\left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

- A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$. B. $m \leq 0$. C. $1 \leq m < 2$. D. $m \geq 2$.



Câu 29. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c > 0$
 B. $a < 0, b > 0, c < 0$
 C. $a < 0, b < 0, c < 0$
 D. $a > 0, b < 0, c < 0$



Câu 30. Cho hàm số: $y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ (C) Tìm những điểm trên đồ thị (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến tại điểm đó tạo với 2 đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

- A. $M = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$
 B. $M = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$
 C. $M = (1; 2 + \sqrt{2})$
 D. $M = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 2 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

Câu 31. Cho hàm số: $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$ (C) và điểm $M \in (C)$ có hoành độ $x_M = a$. Với giá trị nào của a thì tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) 2 điểm phân biệt khác M.

- A. $\begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$
 B. $\begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq 1 \end{cases}$
 C. $\begin{cases} a < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$
 D. $\begin{cases} |a| < \sqrt{7} \\ a \neq \pm 2 \end{cases}$

Câu 32. Cho hàm số: $y = \frac{2x-3}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đó cắt đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{2}IB$, với $I(2, 2)$.

- A. $y = -x + 2$; $y = -x - 3$
 B. $y = x + 2$; $y = -x + 6$
 C. $y = -x + 2$; $y = -x + 6$
 D. $y = x - 2$; $y = x - 6$

Câu 33. Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m) , đường thẳng d có phương trình $y = x + 4$ và điểm $K(1; 3)$. Tìm các giá trị của tham số m để d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt A(0; 4), B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.

- A. $m = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$
 B. $m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$
 C. $m = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$
 D. $m = \frac{1 \pm \sqrt{142}}{2}$

Câu 34. Cho hàm số: $y = x^3 - 2009x$ có đồ thị là (C). M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1 = 1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1 , tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2 , tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} ($n = 4; 5; \dots$), gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ điểm M_n . Tìm n để: $2009x_n + y_n + 2^{2013} = 0$

- A. $n = 685$
 B. $n = 627$
 C. $n = 675$
 D. $n = 672$

Câu 35. Cho hàm số $y = \frac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Xác định m để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD .

- A. $m = \pm \frac{5}{3}$
 B. $m = \pm 3$
 C. $m = \pm \frac{2}{3}$
 D. $m = \pm \frac{1}{3}$

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m) , m là tham số. Tìm các giá trị của m để trên (C_m) có duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến của (C_m) tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x + 2y = 0$.

A. $\begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{2}{3} \end{cases}$

B. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$

C. $0 < m < \frac{1}{3}$

D. $\begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{5}{3} \end{cases}$

Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2;5)$. Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác PAB đều.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là:

A. $m = 1, m = -5$

B. $m = 1, m = 4$

C. $m = 6, m = -5$

D. $m = 1, m = -8$

Câu 38. Cho hàm số $y = x^4 - mx^3 + 4x + m + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số ban đầu có 3 cực trị và trọng tâm của tam giác với 3 đỉnh là tọa độ các điểm cực trị trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{4x}{4x-m}$.

A. $m = 2$

B. $m = 1$

C. $m = 4$

D. $m = 3$

Câu 39. Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m+1)x + 2$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4.

A. $m < \frac{1-\sqrt{21}}{2}$

B. $m < \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ hoặc $m > \frac{1+\sqrt{21}}{2}$

C. $m > \frac{1+\sqrt{21}}{2}$

D. $\frac{1-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{21}}{2}$

Câu 40. Đường thẳng $d: y = x + a$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ (H) tại hai điểm phân biệt A, B.

Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (H) tại A và B. Tìm a để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $a = 1$

B. $a = 2$

C. $a = -5$

D. $a = -1$

Câu 41. Tìm m để phương trình $x^4 - (2m+3)x^2 + m + 5 = 0$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn: $-2 < x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4 < 3$

A. Không có m

B. $m = 1$

C. $m = 4$

D. $m = 3$

Câu 42. Cho hàm số: $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$. Xác định m để đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

A. $m = 0; m = \pm\sqrt{2}$

B. $m = 0$

C. $m = \pm\sqrt{2}$

D. $m = 0; m = \sqrt{2}$

Câu 43. Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$. Xác định m để hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

A. $-3 < m < 2$

B. $-2 \leq m \leq 2$

C. $-3 \leq m \leq 1$

D. $-3 \leq m \leq 2$

Câu 44. Bạn A có một đoạn dây dài $20m$. Bạn chia đoạn dây thành hai phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều. Phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

A. $\frac{40}{9+4\sqrt{3}}m$

B. $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}m$

C. $\frac{120}{9+4\sqrt{3}}m$

D. $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}m$

Câu 45. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -8+4a-2b+c > 0 \\ 8+4a+2b+c < 0 \end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 46. Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có đúng 1

đường tiệm cận là

A. $\{0\}$.

B. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $\emptyset$

D. $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$.

Câu 47. Đường thẳng $d: y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4), B$ và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m = 2$ hoặc $m = 3$. **B.** $m = -2$ hoặc $m = 3$. **C.** $m = 3$.

D. $m = -2$ hoặc $m = -3$.

Câu 48. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$ là:

A. $\min P = -83$

B. $\min P = -63$

C. $\min P = -80$

D. $\min P = -91$

Câu 49. Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - m + 2017$. Tìm m để (C_m) có đúng 3 điểm chung phân biệt với trục hoành, ta có kết quả:

A. $m = 2017$

B. $2016 < m < 2017$

C. $m \geq 2017$

D. $m \leq 2017$

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2}{\sqrt{mx^4+3}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. $m = 0$

B. $m < 0$

C. $m > 0$

D. $m > 3$

Câu 51. Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a = 3$

B. $a = 2$

C. $a = 1$

D. Một giá trị khác

Câu 52. Giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{x^3 + 2(1 + \sqrt{x^3 + 1})} + \sqrt{x^3 + 2(1 - \sqrt{x^3 + 1})}$ là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

PHẦN II – ĐÁP ÁN & LỜI GIẢI CHI TIẾT HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 + mx + 2$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

A. $m > -3$ B. $m < -3$ C. $m > 3$ D. $m < 3$

Hướng dẫn giải:

Số giao điểm của đồ thị (C_m) với Ox là số nghiệm của phương trình $x^3 + mx + 2 = 0$

Với $m = 0$ vô nghiệm nên không có giao điểm

Với $m \neq 0$ ta có

$$m = -x^2 - \frac{2}{x} = f(x); (*)$$

$$f'(x) = -2x + \frac{2}{x^2} = \frac{-2(x^3 - 1)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	-3	$-\infty$

Số nghiệm phương trình $(*)$ là số giao điểm của đồ thị hàm $f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m > -3$ thì phương trình $(*)$ có 1 nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án B.

Câu 2. Cho hàm số: $y = x^4 - 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm này tạo thành một tam giác đều

A. $m = 2 - \sqrt[3]{3}$ B. $2 - \sqrt{3}$ C. $3 - \sqrt{2}$ D. $3 - \sqrt[3]{2}$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m-2)x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{cases}$$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ PT $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 2$ (*)

Khi đó tọa độ các điểm cực trị là: $A(0, m^2 - 5m + 5)$, $B(\sqrt{2-m}; 1-m)$, $C(-\sqrt{2-m}; 1-m) \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4)$; $\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4)$ Do ΔABC luôn cân tại A, nên bài

toán thỏa mãn khi $A = 60^\circ \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt[3]{3}$

Chọn đáp án A.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là (C) . Tìm tất cả những điểm trên đồ thị (C) sao cho hệ số

góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại những điểm đó là giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = \frac{4x^2 + 3}{x^4 + 1}$

A. $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ B. $\left(-1; -\frac{3}{2}\right); \left(\frac{4}{3}; \frac{40}{27}\right)$

C. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-1+\sqrt{2}}{4}\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}; 0\right); (-2; -10)$

Hướng dẫn giải:

* Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $g(x) = \frac{4x^2 + 3}{x^4 + 1}$

- Đặt $t = x^2$, với $t \geq 0$ ta có hàm số $g(t) = \frac{4t + 3}{t^2 + 1}$;

- $g'(t) = \frac{-4t^2 - 6t + 4}{(t^2 + 1)^2}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2; t = \frac{1}{2}$;

- Ta lại có: $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = 0$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$, bảng biến thiên của hàm số:

t	$-\infty$	-2	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(t)$		0	+	+	0 -
$g(t)$	0	-1	3	4	0

- Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $g(x) = 4$, đạt được khi $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

* Tìm các điểm thuộc đồ thị (C)

- Ta có: $y' = 3x^2 - x$, giả sử điểm $M_0(x_0, f(x_0)) \in (C)$, thì hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại M_0 là $f'(x_0) = 3x_0^2 - x_0$

- Vậy: $3x_0^2 - x_0 = 4$ suy ra $x_0 = -1; x_0 = \frac{4}{3}$, tung độ tương ứng $f(-1) = -\frac{3}{2}$; $f(\frac{4}{3}) = \frac{40}{27}$

+ Có hai điểm thỏa mãn giải thiết $\left(-1; -\frac{3}{2}\right); \left(\frac{4}{3}; \frac{40}{27}\right)$.

Chọn đáp án B.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{2x-4}{x+1}$ có đồ thị (C) điểm $A(-5;5)$. Tìm m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt

đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho tứ giác OAMN là hình bình hành (O là gốc tọa độ).

A. $m = 0$

B. $m = 0; m = 2$

C. $m = 2$

D. $m = -2$

Hướng dẫn giải:

Do các điểm O và A thuộc đường thẳng $\Delta: y = -x$ nên để OAMN là hình bình hành thì

$$MN = OA = 5\sqrt{2}$$

Hoành độ của M và N là nghiệm của pt: $\frac{2x-4}{x+1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 + (3-m)x - (m+4) = 0 \quad (x \neq -1) \quad (1)$

Vì $\Delta = m^2 - 2m + 25 > 0, \forall m$, nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt

Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của (1) ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 3 \\ x_1 x_2 = -(m + 4) \end{cases}$

$$\text{Gọi } M(x_1; -x_1 + m), N(x_2; -x_2 + m) \Rightarrow MN^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = 2m^2 - 4m + 50$$

$$MN = 5\sqrt{2} \Rightarrow 2m^2 - 4m + 50 = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 0 \end{cases}$$

+ $m = 0$ thì O, A, M, N thẳng hàng nên không thỏa mãn.

+ m = 2 thỏa mãn.

Chọn đáp án C.

Câu 5. Cho hàm số: $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C). Tìm a sao cho từ A(0, a) kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) nằm ở hai phía trục Ox.

A. $\left(\frac{-2}{3}; +\infty\right)$

B. $(-2; +\infty) \setminus \{1\}$

C. $(-2; +\infty)$

D. $\left(\frac{-2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

Hướng dẫn giải:

Đường thẳng qua A(0, a) có hệ số góc k có phương trình $y = kx + a$ tiếp xúc (C)

$$\Leftrightarrow kx + a = \frac{x+2}{x-1} \text{ có nghiệm kép} \Leftrightarrow (kx+a)(x-1) = x+2 \text{ có nghiệm kép}$$

$$\Leftrightarrow kx^2 - (k-a+1)x - (a-2) = 0 \text{ có nghiệm kép}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = (k-a+1)^2 - 4k(a-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ h(k) = k^2 + 2(a+5)k + (a-1)^2 = 0 \end{cases} \text{ có 2 nghiệm } k \text{ phân}$$

biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 12(a+2) > 0 \\ h(0) = (a-1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-2; +\infty) \setminus \{1\} \quad (1)$$

Khi đó
$$\begin{cases} x_1 = \frac{k_1 - (a-1)}{2k_1} \Rightarrow y_1 = \frac{k_1 + (a+1)}{2} \\ x_2 = \frac{k_2 - (a-1)}{2k_2} \Rightarrow y_2 = \frac{k_2 + (a+1)}{2} \end{cases}$$

Mà

$$y_1 y_2 < 0 \Rightarrow [k_1 + (a+1)][k_2 + (a+1)] < 0$$

$$\Leftrightarrow k_1 k_2 + (a+1)(k_1 + k_2) + (a+1)^2 = -4(3a+2) < 0$$

$$\Rightarrow a > \frac{-2}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow a \in \left(\frac{-2}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$$

Chọn đáp án D.

Câu 6. Hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị $y = \frac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng?

A. 8

B. 4

C. $x_M < 3$

D. $8\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử $x_M < 3$, $x_N > 3$, khi đó $M\left(3-m; 3-\frac{8}{m}\right)$, $N\left(3+n; 3+\frac{8}{n}\right)$ với $m, n > 0$

$$MN^2 = (m+n)^2 + \left(\frac{8}{m} + \frac{8}{n}\right)^2 \geq (2\sqrt{mn})^2 + 64 \left(2\sqrt{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}}\right)^2 = 4\left(mn + \frac{64}{mn}\right) \geq 64$$

$$\Rightarrow MN \geq 8. \text{ Kết luận MN ngắn nhất bằng 8}$$

Chọn đáp án A.

Câu 7. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$

A. $m = 1$

B. $m = -2$

C. $m = 2$

D. $m = -1$

Hướng dẫn giải:

- + $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6mx = 0$. Đồ thị có 2 điểm cực trị khi: $m \neq 0$
- + Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y = 2m^2 \cdot x - 3m - 3$
- + Trung điểm 2 điểm cực trị là $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$
- + Điều kiện để 2 điểm cực trị đối xứng qua $d: x + 8y - 74 = 0$

$$\begin{cases} 2m^2 \cdot (-\frac{1}{8}) = -1 \\ m + 8(2m^3 - 3m - 1) - 74 = 0 \end{cases}$$

+ Từ đó thấy $m = 2$ thỏa mãn hệ trên.

Chọn đáp án C.

Câu 8. Cho $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m - n^2$.

A. $m - n^2 = 2018$.

B. $m - n^2 = -2018$.

C. $m - n^2 = 1$.

D. $m - n^2 = -1$.

Hướng dẫn giải:

Xét các số thực $x > 0$

Ta có: $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}} = \sqrt{\frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^2(x+1)^2}} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} = 1 + \frac{1}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

Vậy, $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}\right)} = e^{2018 - \frac{1}{2018}} = e^{\frac{2018^2 - 1}{2018}}$,

hay $\frac{m}{n} = \frac{2018^2 - 1}{2018}$

Ta chứng minh $\frac{2018^2 - 1}{2018}$ là phân số tối giản.

Giả sử d là ước chung của $2018^2 - 1$ và 2018

Khi đó ta có $2018^2 - 1 : d, 2018 : d \Rightarrow 2018^2 : d$ suy ra $1 : d \Leftrightarrow d = \pm 1$

Suy ra $\frac{2018^2 - 1}{2018}$ là phân số tối giản, nên $m = 2018^2 - 1, n = 2018$.

Vậy $m - n^2 = -1$.

Chọn đáp án C.

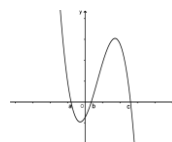
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(c) > f(a) > f(b)$.

B. $f(c) > f(b) > f(a)$.

C. $f(a) > f(b) > f(c)$.

D. $f(b) > f(a) > f(c)$.

**Hướng dẫn giải:**

Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên các đoạn $[a; b]$ và $[b; c]$, lại có $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Do đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:
$$\begin{cases} y = f'(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$
 là:

$$S_1 = \int_a^b |f'(x)| dx = - \int_a^b f'(x) dx = -f(x) \Big|_a^b = f(a) - f(b). \text{ Vì } S_1 > 0 \Rightarrow f(a) > f(b) \quad (1)$$

Tương tự: diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:
$$\begin{cases} y = f'(x) \\ y = 0 \\ x = b \\ x = c \end{cases}$$
 là:

$$S_2 = \int_b^c |f'(x)| dx = \int_b^c f'(x) dx = f(x) \Big|_b^c = f(c) - f(b). \text{ Vì } S_2 > 0 \Rightarrow f(c) > f(b) \quad (2).$$

Mặt khác, dựa vào hình vẽ ta có: $S_1 < S_2 \Leftrightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c) \quad (3).$

(có thể so sánh $f(a)$ với $f(b)$ dựa vào dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[a; b]$ và so sánh $f(b)$ với $f(c)$ dựa vào dấu của $f'(x)$ trên đoạn $[b; c]$).

Từ (1), (2) và (3)

Chọn đáp án A.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (2m-1)x - (3m+2)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-3 \leq m \leq -\frac{1}{5}.$

B. $-3 < m < -\frac{1}{5}.$

C. $m < -3.$

D. $m \geq -\frac{1}{5}.$

Hướng dẫn giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = (2m-1) + (3m+2)\sin x$

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \leq 0, \forall x$ tức là: $(2m-1) + (3m+2)\sin x \leq 0 \quad (1), \forall x$

+) $m = -\frac{2}{3}$ thì (1) thành $-\frac{7}{3} \leq 0, \forall x$

+) $m > -\frac{2}{3}$ thì (1) thành $\sin x \leq \frac{1-2m}{3m+2} \Rightarrow \frac{1-2m}{3m+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{5m+1}{3m+2} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m \leq -\frac{1}{5}$

+) $m < -\frac{2}{3}$ thì (1) thành $\sin x \geq \frac{1-2m}{3m+2} \Rightarrow \frac{1-2m}{3m+2} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{m+3}{3m+2} \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m < -\frac{2}{3}$

Kết hợp được: $-3 \leq m \leq -\frac{1}{5}$

Chọn đáp án A.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số: $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3

A. $m < 0$ hoặc $m > 6$

B. $m > 6$

C. $m < 0$

D. $m = 9$

Hướng dẫn giải:

Dùng BBT để xét sự đồng biến và nghịch biến của hàm số trên các khoảng

$$y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)x$$

$$\Delta' = 9(m-1)^2 - 36(m-2) = 9m^2 - 54m + 81 \geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = 3$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y' = 0$ ($x_1 < x_2$)

Theo viet:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 \cdot x_2 = m - 2 \end{cases}$$

Ta có BBT

t	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y'	+	0	- 0	+
y				

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1, x_2) \Rightarrow$ pt $y' = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow m \neq 3$

Gọi Độ dài khoảng nghịch biến của hàm số là D

$$D = |x_1 - x_2| \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = (1 - m)^2 - 4(m - 2) = m^2 - 6m + 9$$

$$D > 3 \Leftrightarrow D^2 > 9 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 > 9 \Leftrightarrow m^2 - 6m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } m > 6 \text{ (thỏa mãn)}$$

Chọn đáp án A.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và A là điểm thuộc (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ A đến các tiệm cận của (C).

A. $2\sqrt{2}$

B. 2

C. 3

D. $2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M\left(m; \frac{m+1}{m-1}\right) \in (C) (m \neq 1)$. Tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận $x=1$ và $y=1$ là

$$S = |m-1| + \left| \frac{m+1}{m-1} - 1 \right| = |m-1| + \frac{2}{|m-1|} \geq 2\sqrt{|m-1| \cdot \frac{2}{|m-1|}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra} \Leftrightarrow |m-1| = \frac{2}{|m-1|} \Leftrightarrow |m-1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{2}$$

Chọn đáp án A.

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C). Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

A. 12

B. -4

C. -3

D. 1

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{2x+1}{x+1} = kx + 2k + 1 \Leftrightarrow 2x + 1 = (x+1)(kx + 2k + 1); (x \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0 \quad (1); \quad (x \neq -1)$$

d cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \\ k(-1)^2 + (3k-1)(-1) + 2k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2} \vee k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó: $A(x_1; kx_1 + 2k + 1), B(x_2; kx_2 + 2k + 1)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1).

Theo định lý Viet ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-3k+1}{k} \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$$

Ta có $d(A; Ox) = d(B; Ox) \Leftrightarrow |kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} kx_1 + 2k + 1 = kx_2 + 2k + 1 \\ kx_1 + 2k + 1 = -kx_2 - 2k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases}$$

Do hai điểm A, B phân biệt nên ta loại nghiệm $x_1 = x_2$. Do đó $k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -3$.

Chọn đáp án C.

Câu 14. Nếu đồ thị hàm số $y = \frac{x-4}{x+1}$ cắt đường thẳng $(d): 2x + y = m$ tại hai điểm A, B sao cho độ dài

AB nhỏ nhất thì

A. $m = -1$

B. $m = 1$

C. $m = -2$

D. $m = 2$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-4}{x+1} = -2x + m \quad (x \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (m-3)x - m - 4 = 0$$

$$\Delta = (m+1)^2 + 40 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Suy ra (d) luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B

$$x_A + x_B = \frac{m-3}{2}; \quad x_A \cdot x_B = \frac{-m-4}{2};$$

$$y_A = -2x_A + m; \quad y_B = -2x_B + m$$

$$y_B - y_A = -2(x_B - x_A)$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{5(x_B - x_A)^2}$$

$$= \sqrt{5[(x_B + x_A)^2 - 4x_A x_B]} = \sqrt{5\left[\left(\frac{m-3}{2}\right)^2 - 4\frac{-m-4}{2}\right]} = \sqrt{\frac{5}{4}[(m+1)^2 + 40]} \geq 5\sqrt{2}$$

Vậy AB nhỏ nhất khi $m = -1$

Chọn đáp án A.

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2$. Tìm m để trên đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng qua gốc tọa độ

A. $-1 \leq m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$

B. $-1 < m < 0$ hoặc $m > 1$

C. $1 > m > 0$ hoặc $m < -1$

D. $1 \geq m \geq 0$ hoặc $m \leq -1$

Hướng dẫn giải:

Gọi hai điểm đối xứng nhau qua O là $A(x_0, y_0), B(-x_0, -y_0)$

Khi đó ta có $y_0 = x_0^3 - 3mx_0^2 + 3(m^2 - 1)x_0 + 1 - m^2$ và $-y_0 = -x_0^3 - 3mx_0^2 - 3(m^2 - 1)x_0 + 1 - m^2$

Từ đó suy ra: $-6mx_0^2 + 2 - 2m^2 = 0(*)$

Nếu $x_0 = 0$ thì $2 - 2m^2 = 0$ suy ra $y_0 = 1 - m^2 = 0$. Vậy $A \equiv B \equiv O$

Do đó: đồ thị hàm số có hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O

$$\Leftrightarrow \text{phương trình } (*) \text{ có nghiệm khác } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2 - 2m^2 \neq 0 \\ \Delta' = 6m(2 - 2m^2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0 \text{ hay } m > 1$$

Chọn đáp án B.

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y = m^2x + 2m^3$. Biết rằng m_1, m_2 ($m_1 > m_2$) là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có

hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$. Phát biểu nào sau đây là **đúng** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2 ?

A. $m_1 + m_2 = 0$.

B. $m_1^2 + 2m_2 > 4$.

C. $m_2^2 + 2m_1 > 4$. D. $m_1 - m_2 = 0$.

Hướng dẫn giải:

$$x^3 + 3mx^2 - m^2x - 3m^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m \text{ (DK: } m \neq 0) \\ x = -3m \end{cases}$$

$$ycbt \Leftrightarrow x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83 \Leftrightarrow m^4 + m^4 + 81m^4 = 83 \Leftrightarrow m = \pm 1 \Rightarrow m_1 + m_2 = 0.$$

Chọn đáp án A.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận của (C). Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài IM là ngắn nhất ?

A. $M_1(0; -3)$ và $M_2(-2; 5)$

B. $M_1(1; -1)$ và $M_2(-3; 3)$

C. $M_1\left(2; -\frac{1}{3}\right)$ và $M_2\left(-4; \frac{7}{3}\right)$

D. $M_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{3}\right)$ và $M_2\left(-\frac{5}{2}; \frac{11}{3}\right)$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M\left(m; \frac{m-3}{m+1}\right)$ thuộc đồ thị, có $I(-1; 1)$

$$IM = \sqrt{(m+1)^2 + \frac{16}{(m+1)^2}}, \quad IM = \sqrt{(m+1)^2 + \frac{16}{(m+1)^2}} \geq \sqrt{2\sqrt{16}} \geq 2\sqrt{2}$$

IM nhỏ nhất khi $IM = 2\sqrt{2}$. Khi đó $(m+1)^2 = 4$. Tìm được hai điểm $M_1(1; -1)$ và $M_2(-3; 3)$.

Chọn đáp án B.

Câu 18. Giá trị của tham số m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $m = 2$

B. $m = 1$

C. $m = -1$

D. $m = -2$

Hướng dẫn giải:

Vì với m tùy ý ta luôn có $3x^2 + 2mx + m^2 + 1 > 0 \quad \forall x$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^2 (3x^2 + 2mx + m^2 + 1) dx = \left[x^3 + mx^2 + (m^2 + 1)x \right]_0^2 = 2m^2 + 4m + 10 = 2(m+1)^2 + 8$$

S đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8 khi $m = -1$. (dùng casio thử nhanh hơn)

Chọn đáp án C.

Câu 19. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ hợp với 2 trục tọa độ 1 tam giác có diện tích S bằng:

A. $S = 1,5$

B. $S = 2$

C. $S = 3$

D. $S = 1$

Hướng dẫn giải:

Ta có kết quả: Nếu đồ thị hàm số $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ có điểm cực trị $(x_0; y_0)$ thì $y_0 = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y = 2x - 2$ (d)

(d) cắt 2 trục tọa độ tại 2 điểm $A(0; -2)$, $B(1; 0)$ nên diện tích tam giác OAB bằng 1

Chọn đáp án D.

Câu 20. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ có đồ thị (C). Giá trị của m thì (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$ là

A. $m < 1$

B. $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$

C. $-\frac{1}{4} < m < 1$

D. $\frac{1}{4} < m < 1$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là

$$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \end{cases}$$

$$(C) \text{ và trục hoành cắt nhau tại 3 điểm phân biệt: } \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 1 < 4 \Leftrightarrow 1 + 2m + 1 < 4 \Leftrightarrow m < 1$$

Chọn đáp án B.

Câu 21. Cho hàm số $y = (x-m)^3 - 3x + m^2$ (1). Gọi M là điểm cực đại của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị m thích hợp đồng thời là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị khác của m. Số điểm M thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Hướng dẫn giải:

Ta có $y' = 3(x-m)^2 - 3, y'' = 6(x-m)$

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ x = m+1 \end{cases}$

Vì $x = x_1 = m-1, y''(m-1) < 0$ nên hàm số đạt cực đại $x = x_1 = m-1$ tại và giá trị cực đại là $y_1 = m^2 - 3m + 2$.

Tương tự, ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_2 = m+1$ và giá trị cực tiểu là $y_2 = m^2 - 3m - 2$.

Ta giả sử điểm M là điểm cực đại của đồ thị hàm số ứng với giá trị m_1 và là điểm cực tiểu ứng của đồ thị hàm số ứng với với giá trị m_2 .

Từ YCBT suy ra hệ phương trình $\begin{cases} m_1 - 1 = m_2 + 1 \\ m_1^2 - 3m_1 + 2 = m_2^2 - 3m_2 - 2 \end{cases}$

Giải hệ ta tìm được nghiệm $m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}$ và suy ra tồn tại duy nhất một điểm $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ thỏa

bài toán.

Chọn đáp án A.

Câu 22. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật MNPQ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định giá trị lớn nhất của hình chữ nhật đó?

A. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

B. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

C. 0

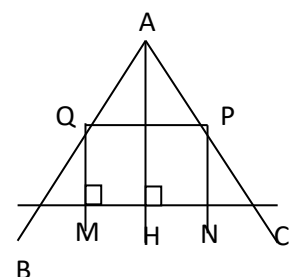
D. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow BH = CH = \frac{a}{2}$

Đặt $BM = x, 0 < x < \frac{a}{2}$, ta có:

$$MN = 2MH = 2(BH - BM) = 2\left(\frac{a}{2} - x\right) = a - 2x$$



Tam giác MBQ vuông ở M, $B = 60^\circ$ và $BM = x \Rightarrow QM = x\sqrt{3}$

Hình chữ nhật MNPQ có diện tích:

$$S(x) = MN \cdot QM = (a - 2x)x\sqrt{3} = \sqrt{3}(ax - 2x^2)$$

$$S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x); S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4} \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$$

x	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$
S'	+	0	-
S		$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$	

Vậy $\max_{x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)} S(x) = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$ khi $x = \frac{a}{4}$

Chọn đáp án A.

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{x}{1-x}$ (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = mx - m - 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $A(-1; 1)$.

A. $m = 1$

B. $m = 2$

C. $m = -1$

D. $m = 3$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d: \frac{x}{1-x} = mx - m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ mx^2 - 2mx + m + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow m < 0$

Gọi I là trung điểm của $MN \Rightarrow I(1; -1)$ cố định.

Ta có: $AM^2 + AN^2 = 2AI^2 + \frac{MN^2}{2}$

Do $AM^2 + AN^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất

$$MN^2 = (x_2 - x_1)^2(1+m)^2 = -4m - \frac{4}{m} \geq 8. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow m = -1$$

Vậy $\min(AM^2 + AN^2) = 20$ khi $m = -1$

Chọn đáp án C.

Câu 24. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị là:

A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$

B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$

C. $m = -1$ hoặc $m = 3$

D. $1 \leq m \leq 3$

Hướng dẫn giải:

Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ là đồ thị hàm số $y = f(x)$ tịnh tiến trên trục

Oy m đơn vị

Để đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y = f(x) + m$ xảy

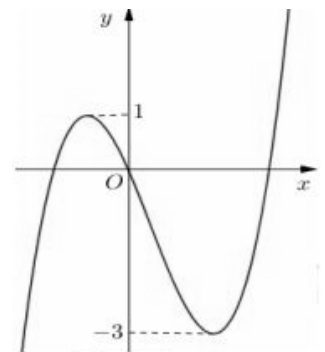
ra hai trường hợp sau:

+ Nằm phía trên trục hoành hoặc điểm cực tiểu thuộc trục Ox và cực đại dương

+ Nằm phía dưới trục hoành hoặc điểm cực đại thuộc trục Ox và cực tiểu dương

Khi đó $m \geq 3$ hoặc $m \leq -1$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án A.



Câu 25. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1 (O là gốc tọa độ).

A. $m = 1$ B. $m = 2$ C. $m = \pm 1$ D. $m = 3$

Hướng dẫn giải:

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì $m \neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;1)$ và $B(2m; -4m^3 + 1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm B lên trục tung, ta có $BH = |2m|$. Diện tích của tam giác OAB là

$$S = \frac{1}{2} BH \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot |2m|$$

Theo đề bài $S=1$ nên ta có $\frac{1}{2} \cdot |2m| = 1$ suy ra $m = \pm 1$. Vậy $m = \pm 1$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án C.

Câu 26. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2\sin^2 x}{\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}}$ là

A. 0

B. 4

C. 8

D. 2

Hướng dẫn giải:

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}, \text{ ta có } f(x) = \frac{2\sin^2 x}{\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2 x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x} = \frac{4\sin^2 x}{2 - \sin^2 x}.$$

Đặt $\sin^2 x = t$ ($t \in [0;1]$), hàm số trở thành $g(t) = \frac{4t}{-t+2}$ với $t \in [0;1]$, ta có

$$g'(t) = \frac{8}{(-t+2)^2} > 0 \text{ } t \in [0;1], \text{ suy ra hàm số đồng biến trên } [0;1], \text{ vậy}$$

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max_{t \in [0;1]} g(t) = g(1) = 4, \text{ xảy ra khi } t = 1 \Leftrightarrow x = \frac{p}{2} + kp (k \in \mathbb{Z})$$

Chọn đáp án B.

Câu 27. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ có đồ thị (C), với m là tham số. Giả sử đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $1 < x_1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$ B. $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$ C. $x_1 < 0 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$ D. $1 < x_1 < 3 < x_2 < 4 < x_3$

Hướng dẫn giải:

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$. Dựa vào đồ thị ta tìm được $-4 < m < 0$ thì đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.

Ta có $y(0) \cdot y(1) < 0$; $y(1) \cdot y(3) < 0$; $y(3) \cdot y(4) < 0$ do đó $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$

Chọn đáp án B.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng

$$\left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.B. $m \leq 0$.C. $1 \leq m < 2$.D. $m \geq 2$.

Hướng dẫn giải:

$$y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(\tan x - m) - \frac{1}{\cos^2 x}(\tan x - 2)}{(\tan x - m)^2} = \frac{2 - m}{\cos^2 x (\tan x - m)^2}$$

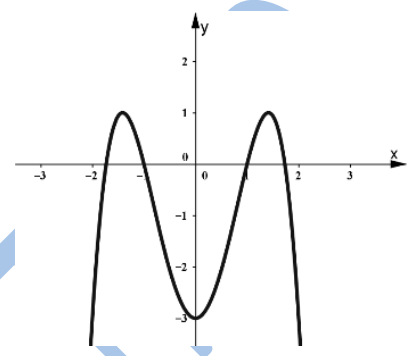
Hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi hàm số xác định trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và $y' \geq 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \neq m, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \\ 2 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m \leq 2 \end{cases}$$

Chọn đáp án A.

Câu 29. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c > 0$
- B. $a < 0, b > 0, c < 0$
- C. $a < 0, b < 0, c < 0$
- D. $a > 0, b < 0, c < 0$



Hướng dẫn giải:

Do giới hạn của y khi x tiến tới vô cùng thì $-\infty$ nên $a < 0$. Loại A và D

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$$

Do $a < 0$ mà nếu $b < 0$ thì phương trình $2ax^2 + b$ vô nghiệm

Nên $b > 0$ thì hàm số mới có 3 cực trị.

Chọn đáp án B.

Câu 30. Cho hàm số : $y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ (C) Tìm những điểm trên đồ thị (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến tại điểm đó tạo với 2 đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

- A. $M = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$
- B. $M = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$
- C. $M = (1; 2 + \sqrt{2})$
- D. $M = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 2 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Gọi } M = (a; y(a)) \in (C); a > 0 \text{ thì } y(a) = a + 1 + \frac{1}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}$$

$$\text{PTTT của (C) tại M là: } y - y(a) = y'(a)(x - a) \Leftrightarrow y = \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2}(x - a) + \frac{a^2}{a-1} \quad (d)$$

Tiệm cận đứng $x = 1$; Tiệm cận xiên $y = x + 1$

Giao điểm của 2 tiệm cận là $I = (1; 2)$

$$\text{Giao điểm của d với tiệm cận đứng } x = 1 \text{ là } A = \left(1; \frac{2a}{a-1}\right)$$

$$\text{Với tiệm cận xiên là: } B = (2a - 1; 2a)$$

$$\text{Ta có } AI = \frac{2}{|a-1|}; BI = 2\sqrt{2}|a-1|, \text{ nên } AI \cdot BI = 4\sqrt{2} \text{ vì } a > 1$$

$$\text{Lại có } \angle AIB = \frac{\pi}{4} \text{ suy ra } AB^2 = AI^2 + BI^2 - 2AI \cdot BI \cos \frac{\pi}{4} = AI^2 + BI^2 - \sqrt{2}AI \cdot BI$$

Theo bất đẳng thức Cô si : $AB^2 \geq 2AI.BI - \sqrt{2}AI.BI = (2 - \sqrt{2})AI.BI$

$$\Leftrightarrow AB \geq 2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)} \quad (1)$$

Đặt p là chu vi tam giác ABI thì : $p = AB + AI + BI \geq AB + 2\sqrt{AI.BI} \geq 2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)} + 4\sqrt{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AI = BI \Leftrightarrow a = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

$$\text{Vậy } \min p = 2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)} + 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Hay điểm cần tìm là $M = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 2 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

Chọn đáp án D.

Câu 31. Cho hàm số: $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}(C)$ và điểm $M \in (C)$ có hoành độ $x_M = a$. Với giá trị nào của a thì tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) 2 điểm phân biệt khác M.

A. $\begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} |a| < \sqrt{7} \\ a \neq \pm 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Điểm $M \in (C)$, $x_M = a \Rightarrow y_M = \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2}$ ta có Pt tiếp tuyến với (C) có dạng

$$(\Delta): y = y'_M(x - x_M) + y_M \text{ với } y'_M = 2a^3 - 6a$$

$$\Rightarrow (\Delta) \quad y = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2}$$

Hoành độ giao điểm của (Δ) và (C) là nghiệm của phương trình

$$\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2} = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2} \Leftrightarrow (x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^3 - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ g(x) = x^2 + 2ax + 3a^3 - 6 = 0 \end{cases}$$

Bài toán trở thành tìm a để $g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{g(x)} = a^2 - (3a^3 - 6) > 0 \\ g(a) = 6a^2 - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3 < 0 \\ a^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án A.

Câu 32. Cho hàm số: $y = \frac{2x-3}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đó cắt đường

tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{2}IB$, với $I(2, 2)$.

A. $y = -x + 2$; $y = -x - 3$

B. $y = x + 2$; $y = -x + 6$

C. $y = -x + 2$; $y = -x + 6$

D. $y = x - 2$; $y = x - 6$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M\left(x_0, \frac{2x_0-3}{x_0-2}\right) \in (C)$. PTTT của (C) tại M: $y = -\frac{1}{(x_0-2)^2}x + \frac{2x_0^2-6x_0+6}{(x_0-2)^2}$

Do $AB = \sqrt{2}IB$ và tam giác AIB vuông tại I $\Rightarrow IA = IB$ nên hệ số góc của tiếp tuyến $k = 1$ hoặc $k = -$

1. vì $y' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0$ nên ta có hệ số góc tiếp tuyến $k = -1$.

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ có hai phương trình tiếp tuyến $y = -x + 2$; $y = -x + 6$

Chọn đáp án C.

Câu 33. Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m + 3)x + 4$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m) , đường thẳng d có phương trình $y = x + 4$ và điểm $K(1; 3)$. Tìm các giá trị của tham số m để d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0; 4)$, B , C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.

A. $m = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$

B. $m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$

C. $m = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$

D. $m = \frac{1 \pm \sqrt{142}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$x^3 + 2mx^2 + (m + 3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x(x^2 + 2mx + m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 (*) \end{cases}$$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (2; +\infty)$$

Khi đó $B = (x_1; x_1 + 4)$, $C = (x_2; x_2 + 4)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$.

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2} = 2\sqrt{2(m^2 - m - 2)}$$

Ta có khoảng cách từ K đến d là $h = \sqrt{2}$. Do đó diện tích ΔKBC là:

$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2(m^2 - m - 2)} = 2\sqrt{m^2 - m - 2}$$

$$S = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 - m - 2} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2} \text{ (TM).}$$

Chọn đáp án B.

Câu 34. Cho hàm số: $y = x^3 - 2009x$ có đồ thị là (C) . M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1 = 1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1 , tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2 , tiếp tuyến của (C) tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} ($n = 4; 5; \dots$), gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ điểm M_n . Tìm n để: $2009x_n + y_n + 2^{2013} = 0$

A. $n = 685$

B. $n = 627$

C. $n = 675$

D. $n = 672$

Hướng dẫn giải:

Gọi $M_k(x_k; y_k)$ suy ra tiếp tuyến tại M_k : $y - y_k = y'(x_k)(x - x_k)$

$$\Leftrightarrow y = (3x_k^2 - 2009)(x - x_k) + x_k^3 - 2009x_k$$

Tọa độ điểm M_{k+1} được xác định:

$$x^3 - 2009x = (3x_k^2 - 2009)(x - x_k) + x_k^3 - 2009x_k \Leftrightarrow (x - x_k)(x^2 + x \cdot x_k - 2x_k^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = x_k \vee x = -2x_k \Rightarrow x_{k+1} = -2x_k$$

Ta có: $x_1 = 1; x_2 = -2; x_3 = 4; \dots; x_n = (-2)^{n-1}$

$$2009x_n + y_n + 2^{2010} = 0 \Leftrightarrow 2009x_n + x_n^3 - 2009x_n + 2^{2010} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2)^{3n-3} = -2^{2013} = (-2)^{2013} \Leftrightarrow 3n - 3 = 2013 \Leftrightarrow n = 672$$

Chọn đáp án D.

Câu 35. Cho hàm số $y = \frac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Xác định m để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD .

A. $m = \pm \frac{5}{3}$

B. $m = \pm 3$

C. $m = \pm \frac{2}{3}$

D. $m = \pm \frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị: $3mx^2 - 3m^2x - m = 0, x \neq \frac{-1}{m}$

Vì $m \neq 0$ nên phương trình $\Leftrightarrow 3x^2 - 3mx - 1 = 0$ (*). Ta có $\Delta = 9m^2 + 12 > 0, \forall m \neq 0$ và

$$f\left(\frac{-1}{m}\right) = \frac{3}{m^2} + 2 \neq 0, \forall m \neq 0 \text{ (ở đây } f(x) \text{ là vế trái của (*)) nên } d \text{ luôn cắt đồ thị tại 2 điểm } A, B$$

phân biệt $\forall m \neq 0$

Ta có $A(x_1; 3x_1 - 3m), B(x_2; 3x_2 - 3m)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của (*). Kẻ đường cao OH của ΔOAB

$$\text{ta có } OH = d(0; d) = \frac{|-3m|}{\sqrt{10}} \text{ và } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (3x_2 - 3x_1)^2} = \sqrt{10(x_2 - x_1)^2}$$

$$= \sqrt{10(x_1 + x_2)^2 - 40x_1x_2} = \sqrt{10m^2 + \frac{40}{3}}$$

(Định lý Viet đối với (*)).

Mặt khác ta có $C(m; 0), D(0; -3m)$ (để ý $m \neq 0$ thì C, D, O phân biệt). Ta tìm m để $S_{\Delta OAB} = 2S_{\Delta OCD}$

$$\text{hay } \sqrt{10m^2 + \frac{40}{3}} \cdot \frac{|-3m|}{\sqrt{10}} = 2|m||3m| \Leftrightarrow m = \pm \frac{2}{3}$$

Chọn đáp án C.

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ có đồ thị là (C_m) , m là tham số. Tìm các giá trị của m để trên (C_m) có duy nhất một điểm có hoành độ âm mà tiếp tuyến của (C_m) tại điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x + 2y = 0$.

A. $\begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{2}{3} \end{cases}$

B. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$

C. $0 < m < \frac{1}{3}$

D. $\begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{5}{3} \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

$y' = mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m$. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng 2

Ta tìm $m: mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m = 2$ (*) có đúng một nghiệm âm

$$(*) \Leftrightarrow (x-1)(mx+3m-2) = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } mx = 2-3m$$

$m=0$: không thỏa yêu cầu

$$m \neq 0, \text{ yêu cầu bài toán xảy ra khi } \frac{2-3m}{m} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Chọn đáp án A.

Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2;5)$. Tìm các giá trị của tham số m để

đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác PAB đều.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là:

A. $m = 1, m = -5$

B. $m = 1, m = 4$

C. $m = 6, m = -5$

D. $m = 1, m = -8$

Hướng dẫn giải:

$$\frac{2x-1}{x+1} = -x+m \Leftrightarrow x^2 - (m-3)x - m - 1 = 0 \quad (1), \text{ với } x \neq -1$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 13 > 0 \\ 0.m - 3 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{đúng } \forall m)$$

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1), ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 3 \\ x_1 x_2 = -m - 1 \end{cases}$

Giả sử $A(x_1; -x_1 + m), B(x_2; -x_2 + m)$

Khi đó ta có: $AB = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2}$

$$PA = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (-x_1 + m - 5)^2} = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2},$$

$$PB = \sqrt{(x_2 - 2)^2 + (-x_2 + m - 5)^2} = \sqrt{(x_2 - 2)^2 + (x_1 - 2)^2}$$

Suy ra $\triangle PAB$ cân tại P

Do đó $\triangle PAB$ đều $\Leftrightarrow PA^2 = AB^2$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 2(x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 4(x_1 + x_2) - 6x_1 x_2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}. \text{ Vậy giá trị cần tìm là } m = 1, m = -5.$$

Chọn đáp án C.

Câu 38. Cho hàm số $y = x^4 - mx^3 + 4x + m + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số ban đầu có 3 cực trị và trọng tâm của tam giác với 3 đỉnh là tọa độ các điểm cực trị trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{4x}{4x - m}$.

A. $m = 2$

B. $m = 1$

C. $m = 4$

D. $m = 3$

Hướng dẫn giải:

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi phương trình $y'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 3mx^2 + 4 = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt}$$

$$\text{Xét } g(x) = 4x^3 - 3mx^2 + 4 \text{ có } g'(x) = 12x^2 - 6mx \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{m}{2}$$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ và } g(0) = 4 > 0, g\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{16 - m^3}{4} \text{ nên } g(x) = 0$$

$$\text{có 3 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \\ \frac{16 - m^3}{4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2\sqrt[3]{2} \quad (\text{học sinh có thể lập bảng biến thiên})$$

của hàm $\mu(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ để tìm ra kết quả trên)

Khi đó tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{4x}{4x - m}$ là $I\left(\frac{m}{4}; 1\right)$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho thì

x_1, x_2, x_3 là nghiệm phương trình: $4x^3 - 3mx^2 + 4 = 0$ nên theo định lý Viet ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3m}{4} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{m}{4} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = \frac{9m^2}{16} \end{cases}$$

Viết hàm số ban đầu dưới dạng: $y(x) = y'(x)\left(\frac{x}{4} - \frac{m}{16}\right) + \left(-\frac{3m^2x^2}{16} + 3x + \frac{5m}{4} + 2\right)$, vì thế

$$y_i = y(x_i) = y'(x_i)\left(\frac{x_i}{4} - \frac{m}{16}\right) + \left(-\frac{3m^2x_i^2}{16} + 3x_i + \frac{5m}{4} + 2\right) = -\frac{3m^2x_i^2}{16} + 3x_i + \frac{5m}{4} + 2$$

$$\text{do } y'(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\text{Từ đó: } \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = -\frac{m^2}{16}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1 + x_2 + x_3) + \frac{5m}{4} + 2 = -\frac{9m^4}{16^2} + \frac{5m}{4} + 2$$

Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) \equiv I\left(\frac{m}{4}; 1\right)$ khi và chỉ

$$\text{khi: } \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 1 \Leftrightarrow -\frac{9m^4}{16^2} + \frac{5m}{4} + 2 = 1 \Leftrightarrow (m-4)(9m^3 + 36m^2 + 144m + 64) = 0$$

Vì $m > 2\sqrt[3]{2}$ nên $m = 4$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Chọn đáp án C.

Câu 39. Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m+1)x + 2$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4.

A. $m < \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$

B. $m < \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ hoặc $m > \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$

C. $m > \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$

D. $\frac{1 - \sqrt{21}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $D = \square$, $y' = 3x^2 + 6mx + 3(m+1) = 3(x^2 + 2mx + m+1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m+1 = 0$ (1). Điều kiện cần và đủ để hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4 $\Leftrightarrow y' \leq 0$ trên đoạn có độ dài lớn hơn 4 $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ ($x_1 \neq x_2$) thỏa mãn $|x_1 - x_2| > 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ |x_1 - x_2| > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ |2\sqrt{\Delta'}| > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta' > 4 \Leftrightarrow m^2 - m - 1 > 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \vee m > \frac{1 + \sqrt{21}}{2}.$$

Vậy hàm số (1) nghịch biến trên một đoạn có độ dài lớn hơn 4

$$\Leftrightarrow m < \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \vee m > \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

Chọn đáp án B.

Câu 40. Đường thẳng $d: y = x + a$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ (H) tại hai điểm phân biệt A, B.

Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (H) tại A và B. Tìm a để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $a = 1$

B. $a = 2$

C. $a = -5$

D. $a = -1$

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (H) :

$$\frac{-x+1}{2x-1} = x+a \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ 2x^2 + 2ax - a - 1 = 0 (*) \end{cases}$$

Đặt $g(x) = 2x^2 + 2ax - a - 1$

Vì $\begin{cases} \Delta'_g = a^2 + 2a + 2 > 0, \forall a \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0, \forall a \end{cases}$ nên $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác $\frac{1}{2}$ với mọi a .

Vậy d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi a .

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo định lý Vi-ét ta có

$$x_1 + x_2 = -a, x_1 x_2 = \frac{-a-1}{2}.$$

Tiếp tuyến tại A và B có hệ số góc là $k_1 = \frac{-1}{(2x_1-1)^2}; k_2 = \frac{-1}{(2x_2-1)^2}$

$$\text{Ta có } k_1 + k_2 = \frac{-1}{(2x_1-1)^2} + \frac{-1}{(2x_2-1)^2} = -\left[\frac{(2x_1-1)^2 + (2x_2-1)^2}{(2x_1-1)^2 (2x_2-1)^2} \right]$$

$$= -\left[\frac{4(x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2 - 4(x_1+x_2) + 2}{(2x_1-1)^2 (2x_2-1)^2} \right] \quad (\text{do } (2x_1-1)^2 (2x_2-1)^2 = 1)$$

$$= -4(a+1)^2 - 2 \leq -2, \forall a. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = -1$$

Vậy $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất bằng -2 khi $a = -1$.

Chọn đáp án D.

Câu 41. Tìm m để phương trình $x^4 - (2m+3)x^2 + m + 5 = 0$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn :
 $-2 < x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4 < 3$

A. Không có m

B. $m = 1$

C. $m = 4$

D. $m = 3$

Hướng dẫn giải:

Đặt $x^2 = X \geq 0$, ta có phương trình: $f(X) = X^2 - (2m+3)X + m + 5 = 0$ (*)

để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ thì phương trình (*) có hai nghiệm thỏa mãn: $0 < X_1 < X_2$. Khi đó $x_1 = -\sqrt{X_2}; x_2 = -\sqrt{X_1}; x_3 = \sqrt{X_1}; x_4 = \sqrt{X_2}$

$$\text{Do đó: } -2 < -\sqrt{X_2} < -1 < -\sqrt{X_1} < 0 < \sqrt{X_1} < 1 < \sqrt{X_2} < 3$$

$$\Leftrightarrow 2 > \sqrt{X_2} > 1 > \sqrt{X_1} > 0 \Leftrightarrow 4 > X_2 > 1 > X_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(1) < 0 \\ af(0) > 0 \\ af(4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+3 < 0 \\ m+5 > 0 \\ -7m+9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m > -5 \\ m < \frac{9}{7} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ không tồn tại m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án A.

Câu 42. Cho hàm số: $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$. Xác định m để đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

A. $m = 0; m = \pm\sqrt{2}$

B. $m = 0$

C. $m = \pm\sqrt{2}$

D. $m = 0 ; m = \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

PT hoành độ giao điểm: $x^3 - \frac{3}{2}mx^2 - x + \frac{1}{2}m^3 = 0$ (1)

Đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt A, B, C $\Leftrightarrow$ pt (1) có 3 nghiệm phân biệt x_A, x_B, x_C .

Theo Vi et ta có: $x_A + x_B + x_C = \frac{3}{2}m$ (2)

theo gt $AB = BC \Leftrightarrow 2x_B = x_A + x_C$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow x_B = \frac{m}{2}$. Vậy $x = \frac{m}{2}$ là một nghiệm của (1).

Chia $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 - x + \frac{1}{2}m^3$ cho $x - \frac{m}{2}$ ta được:

$$f(x) = \left(x - \frac{m}{2}\right) \left(x^2 - mx - 1 - \frac{m^2}{2}\right) - \frac{m}{2} + \frac{m^3}{4}.$$

$$x = \frac{m}{2} \text{ là nghiệm của (1) } \Leftrightarrow -\frac{m}{2} + \frac{m^3}{4} = 0 \Leftrightarrow m=0, m = \pm\sqrt{2}$$

Khi đó $f(x) = \left(x - \frac{m}{2}\right) \left(x^2 - mx - 1 - \frac{m^2}{2}\right)$ có 3 nghiệm phân biệt

vì $\varphi(x) = x^2 - mx - 1 - \frac{m^2}{2}$ có 2 nghiệm trái dấu và có $\varphi\left(\frac{m}{2}\right) = -1 - \frac{3m^2}{4} \neq 0, \forall m$

Vậy: $m = 0 ; m = \pm\sqrt{2}$

Chọn đáp án A.**Câu 43.** Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$. Xác định m để hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

A. $-3 < m < 2$

B. $-2 \leq m \leq 2$

C. $-3 \leq m \leq 1$

D. $-3 \leq m \leq 2$

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$y' = g(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$$

$$\Delta' = 7m^2 - 7m + 7 = 7(m^2 - m + 1) > 0, \forall m$$

$$y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} g(2) \geq 0 \\ \frac{5}{2} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + m - 6 \leq 0 \\ m - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 2$$

Chọn đáp án D.**Câu 44.** Bạn A có một đoạn dây dài $20m$. Bạn chia đoạn dây thành hai phần. Phần đầu uốn thành một tam giác đều. Phần còn lại uốn thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

A. $\frac{40}{9+4\sqrt{3}}m$.

B. $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}m$.

C. $\frac{120}{9+4\sqrt{3}}m$.

D. $\frac{60}{9+4\sqrt{3}}m$.

Hướng dẫn giải:Bạn A chia sợi dây thành hai phần có độ dài $x(m)$ và $20 - x(m)$, $0 < x < 20$ (như hình vẽ).

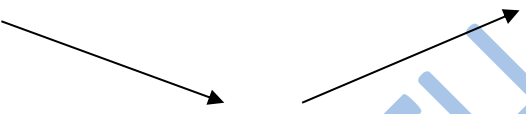
Phần đầu uốn thành tam giác đều có cạnh $\frac{x}{3}(m)$, diện tích $S_1 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2\sqrt{3}}{36}(m^2)$

Phần còn lại uốn thành hình vuông có cạnh $\frac{20-x}{4}(m)$, diện tích $S_2 = \left(\frac{20-x}{4}\right)^2 (m^2)$

Tổng diện tích hai hình nhỏ nhất khi $f(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{36} + \left(\frac{20-x}{4}\right)^2$ nhỏ nhất trên khoảng $(0; 20)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{x\sqrt{3}}{18} - \frac{20-x}{8} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{180}{4\sqrt{3}+9}$.

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{180}{4\sqrt{3}+9}$	20
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta được $x = \frac{180}{4\sqrt{3}+9}$.

Chọn đáp án D.

Câu 45. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -8+4a-2b+c > 0 \\ 8+4a+2b+c < 0 \end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải:

Ta có hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên tồn tại số $M > 2$ sao cho $y(M) > 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ nên tồn tại số $m < -2$ sao cho

$y(m) < 0$; $y(-2) = -8 + 4a - 2b + c > 0$ và $y(2) = 8 + 4a + 2b + c < 0$.

Do $y(m).y(-2) < 0$ suy ra phương trình $y = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(m; -2)$.

$y(-2).y(2) < 0$ suy ra phương trình $y = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 2)$.

$y(2).y(M) < 0$ suy ra phương trình $y = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(2; M)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox có 3 điểm chung.

Chọn đáp án D.

Câu 46. Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có đúng 1

đường tiệm cận là

A. $\{0\}$.

B. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $\emptyset$

D. $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải:

Có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$. Nên hàm số luôn có 1 đường tiệm cận ngang $y = 0$. Vậy ta tìm điều kiện để hàm số không có tiệm cận đứng.

Xét phương trình: $(mx^2 - 2x + 1)(4x^2 + 4mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 - 2x + 1 = 0 & (1) \\ 4x^2 + 4mx + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

TH1: Xét $m=0$, ta được $y = \frac{2x-1}{(-2x+1)(4x^2+1)} = -\frac{1}{4x^2+1}$ (thỏa ycbt)

TH2: Xét $m \neq 0$. Có: $\Delta_1 = 1-m$ và $\Delta_2 = 4m^2 - 4$

Th2a. Cả 2 phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm: $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m < 0 \\ 4m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$

Th2b: (1) vô nghiệm, (2) có nghiệm kép $x = \frac{1}{2}$: ta thấy trường hợp này vô lí (vì $m > 1$)

Th2c: (2) vô nghiệm, (1) có nghiệm kép $x = \frac{1}{2}$: ta thấy trường hợp này vô lí (vì $-1 < m < 1$)

Chọn đáp án A.

Câu 47. Đường thẳng $d: y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4), B$ và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. $m=2$ hoặc $m=3$. **B.** $m=-2$ hoặc $m=3$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-2$ hoặc $m=-3$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị (C) : $x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = 4$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \varphi(x) = x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Với $x=0$, ta có giao điểm là $A(0;4)$.

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(0) = m + 2 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta gọi các giao điểm của d và (C) lần lượt là $A, B(x_B; x_B + 2), C(x_C; x_C + 2)$ với x_B, x_C là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lí Viet, ta có:
$$\begin{cases} x_B + x_C = -2m \\ x_B \cdot x_C = m + 2 \end{cases}$$

Ta có diện tích của tam giác MBC là $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot d(M, BC) = 4$.

Phương trình d được viết lại là: $d: y = x + 4 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0$.

$$\text{Mà } d(M, BC) = d(M, d) = \frac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó: } BC = \frac{8}{d(M, BC)} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow BC^2 = 32$$

$$\text{Ta lại có: } BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = 2(x_C - x_B)^2 = 32$$

$$\Leftrightarrow (x_B + x_C)^2 - 4x_B \cdot x_C = 16 \Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(m + 2) = 16$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 24 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = -2.$$

Đối chiếu với điều kiện, loại đi giá trị $m = -2$.

Chọn đáp án C.

Câu 48. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$ là:

A. $\min P = -83$ B. $\min P = -63$ C. $\min P = -80$ D. $\min P = -91$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \Leftrightarrow (x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{x-3}\sqrt{y+3} \geq 4(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 0 \end{cases} \text{ Mặt khác}$$

$$x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}) \leq 2\sqrt{2(x+y)} \Leftrightarrow x + y \leq 8 \Rightarrow x + y \in [4; 8]$$

$$\text{Xét biểu thức } P = 4(x^2 + y^2) + 15xy = 4(x+y)^2 + 7xy \text{ và đặt}$$

$$t = x + y \in [4; 8] \Rightarrow P = 4t^2 + 7xy.$$

$$\text{Lại có } (x+3)(y+3) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -3(x+y) - 9 \Rightarrow P \geq 4(x+y)^2 - 21(x+y) - 63 \\ = 4t^2 - 21t - 63.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 4t^2 - 21t - 63 \text{ trên đoạn } [4; 8] \text{ suy ra } P_{\min} = f(7) = -83$$

Chọn đáp án A.

Câu 49. Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - m + 2017$. Tìm m để (C_m) có đúng 3 điểm chung phân biệt với trục hoành, ta có kết quả:

A. $m = 2017$ B. $2016 < m < 2017$ C. $m \geq 2017$ D. $m \leq 2017$

Hướng dẫn giải:

- Phương pháp: Tìm m để phương trình ẩn x tham số m có n nghiệm phân biệt thuộc khoảng K
- + Cô lập m , đưa phương trình về dạng $m = f(x)$
- + Vẽ đồ thị (hoặc bảng biến thiên) của $y = f(x)$ trên K
- + Biện luận để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại n điểm phân biệt trên K
- Cách giải: (C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình

$$x^4 - 2x^2 - m + 2017 = 0 \Leftrightarrow m = x^4 - 2x^2 + 2017 \text{ có 3 nghiệm phân biệt.}$$

$$\text{Xét hàm số } y = x^4 - 2x^2 + 2017 \text{ trên } \mathbb{R}$$

$$\text{Có } y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm 1. \text{ Bảng biến thiên:}$$

x	$-\infty$	0	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty$		2017		$+\infty$
		2016		2016	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $m = 2017$

Chọn đáp án A.

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{mx^4 + 3}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. $m = 0$ B. $m < 0$ C. $m > 0$ D. $m > 3$

Hướng dẫn giải:

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{mx^4 + 3}}$ có hai đường tiệm cận ngang khi và chỉ khi các giới hạn

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = a (a \in \mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow -\infty} y = b (b \in \mathbb{R})$ tồn tại. Ta có:

+ với $m = 0$ ta nhận thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

+ Với $m < 0$, khi đó hàm số có TXĐ $D = \left(-\sqrt[4]{-\frac{3}{m}}; \sqrt[4]{-\frac{3}{m}} \right)$, khi đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} y, \lim_{x \rightarrow -\infty} y$ không tồn tại suy ra đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

+ Với $m > 0$, khi đó hàm số có TXĐ $D = \mathbb{R}$ suy ra $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \sqrt{m + \frac{3}{x^2}}}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{x^2 \sqrt{m + \frac{3}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}$ suy ra

đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang.

Vậy $m > 0$ thỏa YCBT.

Chọn đáp án C.

Câu 51. Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $a = 3$

B. $a = 2$

C. $a = 1$

D. Một giá trị khác

Hướng dẫn giải:

Ta có $y = |x^2 + 2x + a - 4| = |(x+1)^2 + a - 5|$. Đặt $u = (x+1)^2$ khi đó $\forall x \in [-2; 1]$ thì $u \in [0; 4]$ Ta

được hàm số $f(u) = |u + a - 5|$. Khi đó

$$\max_{x \in [-2; 1]} y = \max_{u \in [0; 4]} f(u) = \max \{ f(0), f(4) \} = \max \{ |a - 5|; |a - 1| \}$$

$$\text{Trường hợp 1: } |a - 5| \geq |a - 1| \Leftrightarrow a \leq 3 \Rightarrow \max_{u \in [0; 4]} f(u) = 5 - a \geq 2 \Leftrightarrow a = 3$$

$$\text{Trường hợp 2: } |a - 5| \leq |a - 1| \Leftrightarrow a \geq 3 \Rightarrow \max_{u \in [0; 4]} f(u) = a - 1 \geq 2 \Leftrightarrow a = 3$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } \max_{x \in [-2; 1]} y = 2 \Leftrightarrow a = 3$$

Chọn đáp án A.

Câu 52. Giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{x^3 + 2(1 + \sqrt{x^3 + 1})} + \sqrt{x^3 + 2(1 - \sqrt{x^3 + 1})}$ là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Hướng dẫn giải:

$$y = \sqrt{x^3 + 2(1 + \sqrt{x^3 + 1})} + \sqrt{x^3 + 2(1 - \sqrt{x^3 + 1})}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{(\sqrt{x^3 + 1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x^3 + 1} - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow y = |\sqrt{x^3 + 1} + 1| + |\sqrt{x^3 + 1} - 1|$$

Điều kiện để hàm số xác định $x \geq -1$

$$\text{Ta có } y = \sqrt{x^3 + 1} + 1 + |\sqrt{x^3 + 1} - 1|$$

$$\text{- Nếu } -1 \leq x < 0 \text{ thì } \sqrt{x^3 + 1} - 1 < 0 \Rightarrow |\sqrt{x^3 + 1} - 1| = 1 - \sqrt{x^3 + 1} \Rightarrow y = 2$$

- Nếu $x \geq 0$ thì $\sqrt{x^3+1}-1 \geq 0 \Rightarrow y = 2\sqrt{x^2+1} \geq 2$

Vậy: $y \geq 2, \forall x \geq -1, y = 2 \Leftrightarrow x = 0$

Chọn đáp án C.

ĐÀO PHƯƠNG THẢO

ĐÀO PHƯƠNG THẢO