

ĐỀ MINH HỌA KỲ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2025

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x$ là

- A. $\frac{e^{x+1}}{x+1} + C$. B. $e^x + C$. C. $\frac{e^x}{x} + C$. D. $x.e^{x-1} + C$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên đoạn $[a; b]$. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox có thể tích là

- A. $V = \pi \int_a^b |f(x)| dx$. B. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$.
C. $V = \pi^2 \int_a^b [f(x)]^2 dx$. D. $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Câu 3: Hai mẫu số liệu ghép nhóm M_1, M_2 có bảng tần số ghép nhóm như sau:

M_1	Nhóm	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$	$[14;16)$	$[16;18)$
	Tần số	3	4	8	6	4

M_2	Nhóm	$[8;10)$	$[10;12)$	$[12;14)$	$[14;16)$	$[16;18)$
	Tần số	6	8	16	12	8

Gọi s_1, s_2 lần lượt là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm M_1, M_2 . Phát biểu nào sau đây là đúng?

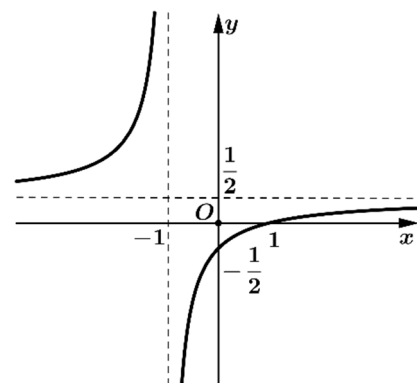
- A. $s_1 = s_2$. B. $s_1 = 2s_2$. C. $2s_1 = s_2$. D. $4s_1 = s_2$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(1; -3; 5)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(2; -1; 1)$ là

- A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{1}$. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+5}{1}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{1}$. D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{1}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

- A. $x = -1$. B. $y = \frac{1}{2}$.
C. $y = -1$. D. $x = \frac{1}{2}$.



Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) < 3$ là

- A. $(1; 9)$. B. $(-\infty; 9)$.
C. $(9; +\infty)$. D. $(1; 7)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 3y - z + 8 = 0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A. $\vec{n}_1(1; -3; 1)$. B. $\vec{n}_2(1; -3; -1)$. C. $\vec{n}_3(1; -3; 8)$. D. $\vec{n}_4(1; 3; 8)$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$?

- A. (SAB) . B. (SBC) . C. (SCD) . D. (SBD) .

Câu 9: Nghiệm của phương trình $2^x = 6$ là

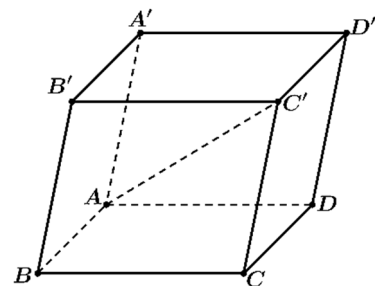
- A. $x = \log_6 2$. B. $x = 3$. C. $x = 4$. D. $x = \log_2 6$.

Câu 10: Cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và $u_2 = 3$. Số hạng u_5 của cấp số cộng là

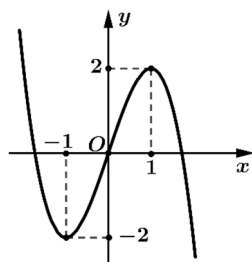
- A. 5. B. 7. C. 9. D. 11.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (minh họa như hình bên). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AC'}$.
 B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AC'}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
 D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$.



Câu 12: Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?



- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

BẢNG ĐÁP ÁN PHẦN TRẮC NGHIỆM ĐMH

1.B	2.D	3.A	4.C	5.B	6.A	7.B	8.A	9.D	10.C	11.D	12.C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 13 đến câu 16. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = 2 \cos x + x$.

a) $f(0) = 2; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 2 \sin x + 1$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6}$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$.

Câu 14: Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn 200 m, tốc độ của ô tô là 36 km/h. Hai giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc trong 24 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

a) Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là 180m.

b) Giá trị của b là 10.

c) Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây ($0 \leq t \leq 24$) kể

từ khi tăng tốc được tính theo công thức: $S(t) = \int_0^t v(t) dt$.

d) Sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô không vượt quá tốc độ tối đa cho phép là 100 km/h.

Câu 15: Trước khi đưa một loại sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó. Kết quả thống kê như sau: có 105 người trả lời “sẽ mua”; có 95 người trả lời “không mua”. Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời “sẽ mua” và “không mua” lần lượt là 70% và 30%. Gọi A là biến cố “Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm”.

Gọi B là biến cố “Người được phỏng vấn trả lời sẽ mua sản phẩm”.

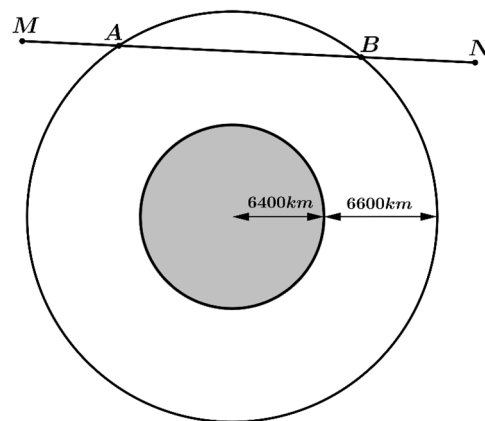
a) Xác suất $P(B) = \frac{21}{40}$ và $P(\bar{B}) = \frac{19}{40}$.

b) Xác suất có điều kiện $P(A|B) = 0,3$.

c) Xác suất $P(A) = 0,51$.

d) Trong số những người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm có 70% người đã trả lời “sẽ mua” khi được phỏng vấn (kết quả tính theo phần trăm được làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 16: Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7 500 000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6 600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6 400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6;20;0)$ đến điểm $N(-6;-12;16)$.



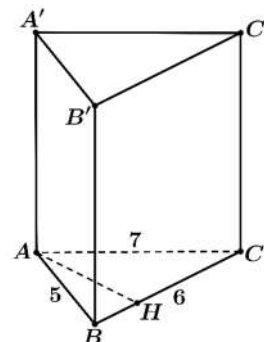
a) Đường thẳng MN có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t \\ z = -4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

b) Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3;-4;12)$.

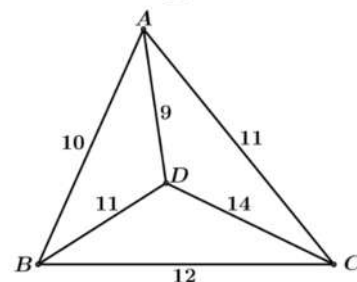
- c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18 900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị km).
- d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 17 đến câu 22

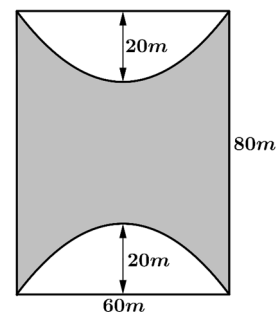
Câu 17: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=5$, $BC=6$, $CA=7$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Câu 18: Một trò chơi điện tử quy định như sau: Có 4 trụ A, B, C, D với số lượng các thử thách trên đường đi giữa các cặp trụ được mô tả trong hình bên. Người chơi xuất phát từ một trụ nào đó, đi qua tất cả các trụ còn lại, mỗi khi đi qua một trụ thì trụ đó sẽ bị phá hủy và không thể quay trở lại trụ đó được nữa, nhưng người chơi vẫn phải trở về trụ ban đầu. Tổng số thử thách của đường đi thỏa mãn điều kiện trên nhận giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?



Câu 19: Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm $A(3;1;0)$, $B(3;6;6)$, $C(4;6;2)$, $D(6;2;14)$; vị trí $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA=3$, $MB=6$, $MC=5$, $MD=13$. Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu?



Câu 20: Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là 60m và 80m. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh đó đến trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20m (xem hình minh họa). Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông?

Câu 21: Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân

cho một sản phẩm là $G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$ (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Câu 22: Có hai chiếc hộp, hộp I có 6 quả bóng màu đỏ và 4 quả bóng màu vàng, hộp II có 7 quả bóng màu đỏ và 3 quả bóng màu vàng, các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp I bỏ vào hộp II. Sau đó, lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp II. Tính xác suất để quả bóng được lấy ra từ hộp II là quả bóng được chuyển từ hộp I sang, biết rằng quả bóng đó có màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

-----HẾT-----

§ CHỦ ĐỀ 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Dạng toán 1. Câu 13. Ứng dụng đạo hàm**KIẾN THỨC CẦN NHỚ****1. Các quy tắc tính đạo hàm**

① $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$	② $(u.v)' = u'v + v'u.$	③ $(k.u)' = k.u', (k \in \mathbb{R}).$
--	-------------------------	--

2. Bảng đạo hàm của

○ $(C)' = 0 \quad C \in \mathbb{R}.$	○ $(x)' = 1.$
○ $(x^n)' = n.x^{n-1} (n \in \mathbb{N}).$	○ $(u^n)' = n.u^{n-1}.u' \quad (n \in \mathbb{N}^*).$
○ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0).$	○ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u > 0).$
○ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0).$	○ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (u \neq 0).$
○ Công thức tính nhanh 1) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$ 2) $\left(\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\right)' = \frac{abx^2+2acx+bc}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2} \quad (\text{tích huyền trừ tích sắc})$	

3. Bảng đạo hàm của hàm số lượng giác

○ $(\sin x)' = \cos x.$	○ $(\sin u)' = u'.\cos u.$
○ $(\cos x)' = -\sin x.$	○ $(\cos u)' = -u'.\sin u.$
○ $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$	○ $(\tan u)' = u'.(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}.$
○ $(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$	○ $(\cot u)' = -u'.(1 + \cot^2 u) = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$

4. Bảng đạo hàm của hàm số mũ - logarit

$\left. \begin{aligned} & \bullet (a^x)' = a^x \cdot \ln a \\ & \bullet (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} & \bullet (e^u)' = u' \cdot e^u \\ & \bullet (e^x)' = e^x \end{aligned} \right.$	$\left. \begin{aligned} & \bullet (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \\ & \bullet (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} & \bullet (\ln u)' = \frac{u'}{u} \\ & \bullet (\ln x)' = \frac{1}{x} \end{aligned} \right.$
---	---

5. Các công thức lượng giác quan trọng

5.1. Đường tròn lượng giác và dấu của các giá trị lượng giác				
Cung phần tư Giá trị LG	I $0^\circ < \alpha < 90^\circ$	II $90^\circ < \alpha < 180^\circ$	III $180^\circ < \alpha < 270^\circ$	IV $270^\circ < \alpha < 360^\circ$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

5.2. Công thức lượng giác cơ bản

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$
-------------------------------------	---	---	-------------------------------------

5.3. Công thức liên kết

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau	Cung hơn kém π
$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$	$\sin(\pi + a) = -\sin a$
$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$	$\cos(\pi + a) = -\cos a$
$\tan(-a) = -\tan a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$	$\tan(\pi + a) = \tan a$
$\cot(-a) = -\cot a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$	$\cot(\pi + a) = \cot a$

5.4. Công thức cộng

$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b.$	$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b.$
$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}.$	$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}.$

5.5. Công thức nhân đôi và hạ bậc

Nhân đôi	Hạ bậc
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$	$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

5.6. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$
Đặc biệt	
$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	
$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	

5.7. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$	$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} \cdot [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$	

5.8. Bảng giá trị lượng giác một số góc đặc biệt

	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	360^0
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0

5.9. Công thức nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản

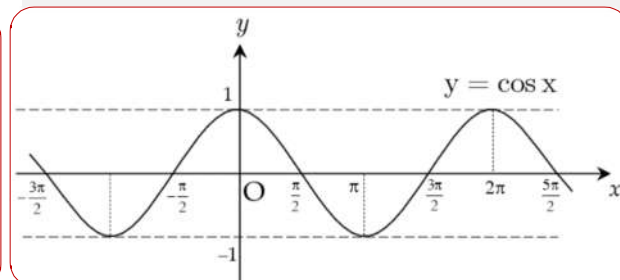
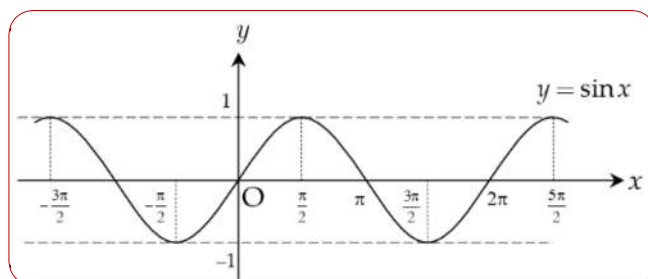
Với $k \in \mathbb{Z}$, ta có các phương trình lượng giác cơ bản sau:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k2\pi \\ a = \pi - b + k2\pi \end{cases} & \bullet \cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k2\pi \\ a = -b + k2\pi \end{cases} \\
 & \bullet \tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi. & \bullet \cot a = \cot b \Leftrightarrow a = b + k\pi.
 \end{aligned}$$

Nếu đề bài cho dạng độ (α^0) thì ta sẽ chuyển $k2\pi \rightarrow k360^0$, $k\pi \rightarrow k180^0$, với $\pi = 180^0$.

5.10. Với $k \in \mathbb{Z}$, ta cần nhớ những trường hợp nghiệm đặc biệt:

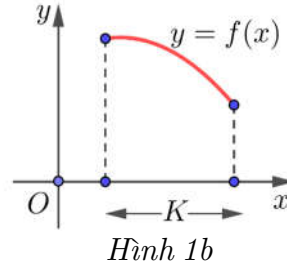
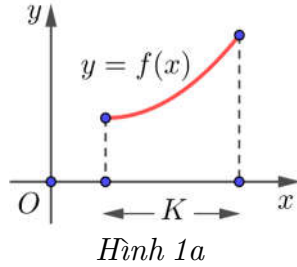
$ \begin{cases} + \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \circ + \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ + \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} $	$ \begin{cases} + \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \\ \circ + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ + \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \end{cases} $
$ \begin{cases} + \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \circ + \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ + \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} $	$ \begin{cases} + \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \circ + \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ + \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} $

5.11. Đồ thị hàm số lượng giác

6. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số

1. Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

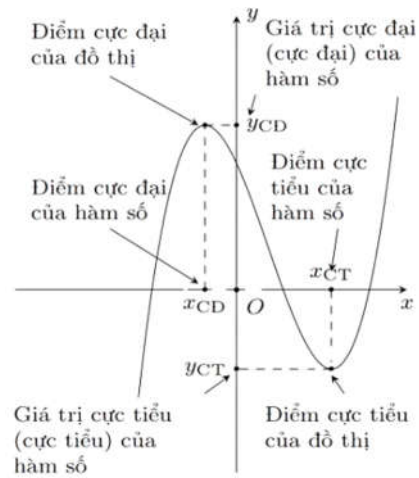
- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị đi lên từ trái sang phải (Hình 1a).
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải (Hình 1b).



2. Cực trị của hàm số

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(x_0)$ Cực đại	

x	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$f(x_0)$ Cực tiểu	



3. Bài toán liên quan tính đơn điệu có chứa tham số

(1) Tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên tập xác định

- **Bước 1:** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
- **Bước 2:** Điều kiện để hàm đơn điệu:

$$\text{Để } y \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Để } y \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}.$$

(2) Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định

- **Bước 1:** Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Tính $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.
- **Bước 2:** Điều kiện để hàm đơn điệu:

$$\text{Để } y \text{ đồng biến trên từng khoảng xác định} \Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow ad - bc > 0$$

$$\text{Để } y \text{ nghịch biến trên từng khoảng xác định} \Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow ad - bc < 0.$$

4. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$:

- **Bước 1:** Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc $(a; b)$ sao cho $f'(x) = 0$.
- **Bước 2:** Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(b)$
- **Bước 3:** Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2.
 Khi đó $M = \max_{[a; b]} f(x)$ và $m = \min_{[a; b]} f(x)$.

Sử dụng bất đẳng thức thường gặp:

❖ **Bất đẳng thức Cô-si:**

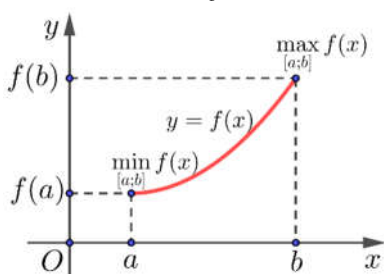
- Với hai số thực không âm: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.
- Với ba số thực không âm: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.
- Với n thực không âm: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.
 Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Sử dụng “Tập giá trị” của hàm số lượng giác:

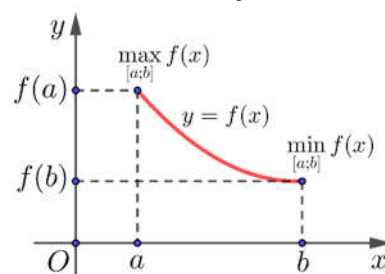
- Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác: $\begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{cases}$.

Chú ý: Nếu $y = f(x)$:

✓ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(a) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(b) \end{cases}$.



✓ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(b) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(a) \end{cases}$.

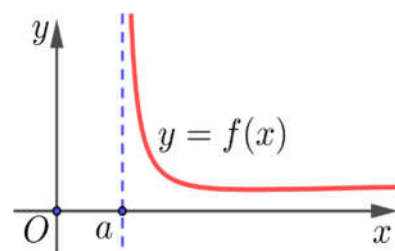


5. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

a) Đường tiệm cận đứng:

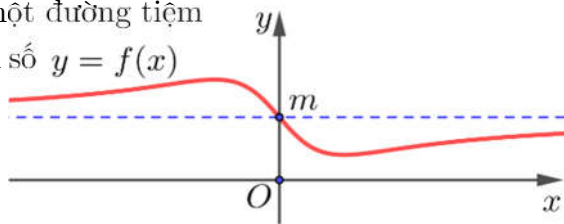
Định nghĩa: Đường thẳng $x = a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$



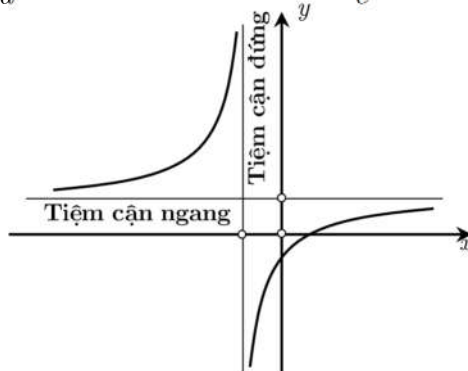
b) Đường tiệm cận ngang:

Định nghĩa: Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$



► **Đặc biệt:**

Đối với hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.



c) Đường tiệm cận xiên:

Định nghĩa: Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

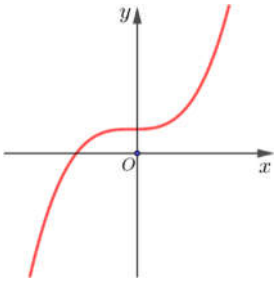
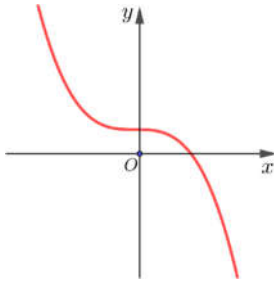
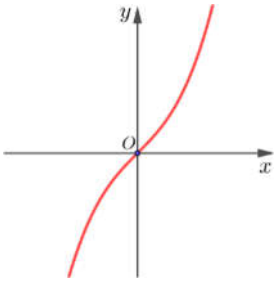
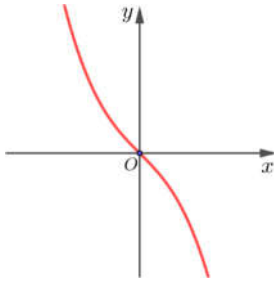
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

► **Chú ý:** Đối với hàm số phân thức $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ta có thể chia đa thức để biến đổi về dạng $f(x) = a'x + b' + \frac{e}{mx + n}$ với $e \neq 0$. **Lưu ý:** PP chia Honner (GV hướng dẫn thêm)
Suy ra $y = a'x + b'$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

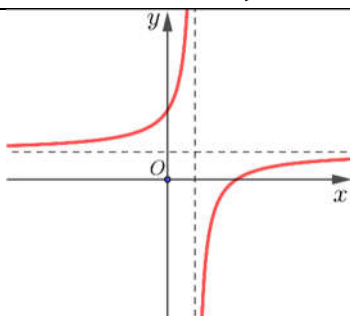
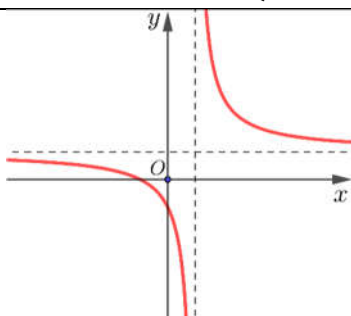
6. Đồ thị hàm số

a) Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có $y' = 3ax^2 + 2bx + c, \Delta_{y'} = 4(b^2 - 3ac)$

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt ($b^2 - 3ac > 0$)		

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép $(b^2 - 3ac = 0)$		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm $(b^2 - 3ac < 0)$		

b) Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

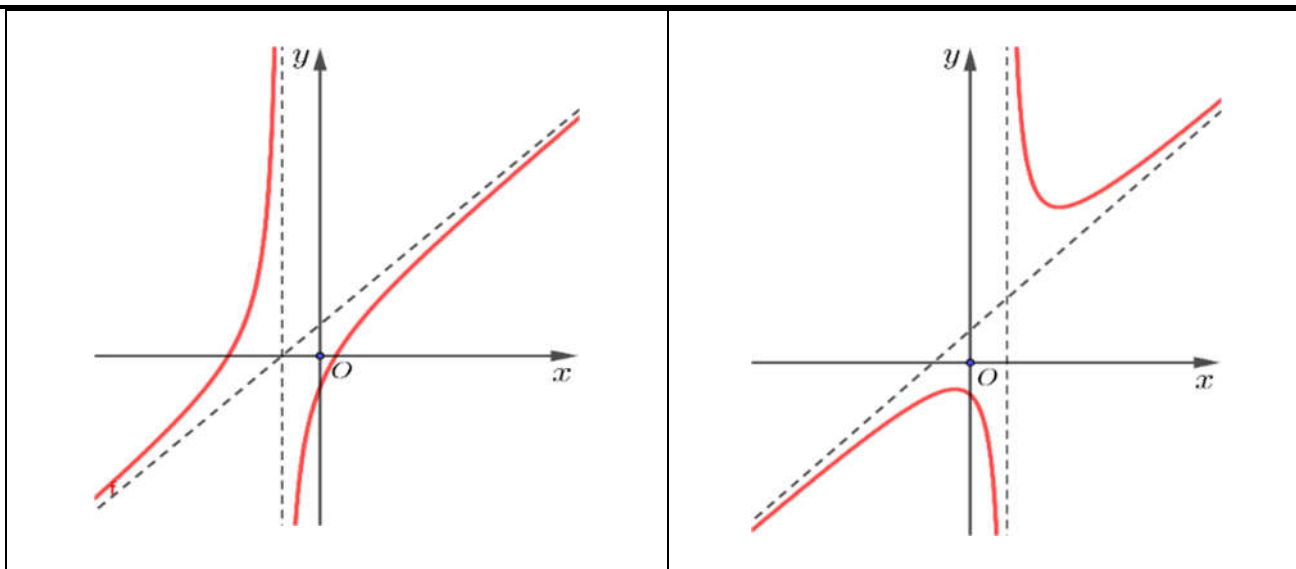
$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

Chú ý

- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$, tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
 - Các điểm đặc biệt: Giao điểm với $Ox : A\left(\frac{-b}{a}; 0\right)$, Giao điểm với $Oy : B\left(0; \frac{b}{d}\right)$.
- Giao của hai đường tiệm cận $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ là tâm đối xứng.

c) Hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \quad (a \neq 0)$

$y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép	$y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt
--	----------------------------------

**Chú ý**

- Ta luôn tách được $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \frac{a}{d}x + f + \frac{m}{dx + e}$.
- Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{e}{d}$, Tiệm cận xiên $y = \frac{a}{d}x + f$.
- Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) luôn nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.
- Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$):
 - (a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
 - (b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.
- Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$):
 - (a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;
 - (b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

d) Nhận dạng hàm số khi biết đồ thị - bảng biến thiên

(a) Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$		Bảng biến thiên	Đồ thị
► TH1: y' có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)	$a > 0$	$\begin{array}{c ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline y & & & y_1 & & y_2 & & +\infty \end{array}$	
	$a < 0$	$\begin{array}{c ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline y & & +\infty & & y_1 & & y_2 & -\infty \end{array}$	
► TH2: y' có 1 nghiệm x_0	$a > 0$	$\begin{array}{c ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & + & \\ \hline y & & & y_0 & & +\infty \end{array}$	
	$a < 0$	$\begin{array}{c ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & - & \\ \hline y & & +\infty & & y_0 & -\infty \end{array}$	

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$		Bảng biến thiên	Đồ thị
► TH2: y' có 1 nghiệm x_0	$a > 0$		
	$a < 0$		
► TH3: y' vô nghiệm	$a > 0$		
	$a < 0$		

(b) Hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) có $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

và TCD: $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$

	Bảng biến thiên	Đồ thị
➤ TH1: $ad - bc > 0$ $\Leftrightarrow y' > 0 \quad \forall x \neq -\frac{d}{c}$		
➤ TH2: $ad - bc < 0$ $\Leftrightarrow y' < 0 \quad \forall x \neq -\frac{d}{c}$		

(c) Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$) có $y = Ax + B + \frac{C}{mx + n}$

$\Rightarrow y' = A - \frac{C}{(mx + n)^2}$ và TCD: $x = -\frac{n}{m}$ và TCX: $y = Ax + B$

		Bảng biến thiên	Đồ thị
➤ TH1: y' có 2 nghiệm phân biệt	$A > 0$		
	$A < 0$		
➤ TH2: y' có 1 nghiệm hoặc vô nghiệm	$A > 0$		
	$A < 0$		