

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

1. Định nghĩa.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$. Kí hiệu:

$$M = \max_{x \in D} f(x).$$
- Số m gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$. Kí hiệu:

$$m = \min_{x \in D} f(x).$$

2. Phương pháp tìm GTLN, GTNN

2.1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp

- Bước 1:** Tính $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.
- Bước 2:** Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

2.2. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn

- Bước 1:**
 - Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.
 - Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- Bước 2:** Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.
- Bước 3:** Khi đó:
 - $\max_{[a; b]} f(x) = \max \{ f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b) \}.$
 - $\min_{[a; b]} f(x) = \min \{ f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b) \}.$

2.3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng

- Bước 1:** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- Bước 2:** Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a; b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a; b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- Bước 3:** Tính $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(x_i), f(\alpha_i)$.
- Bước 4:** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max_{(a; b)} f(x), m = \min_{(a; b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Chú ý:

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(a) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(b) \end{cases}$.
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(b) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(a) \end{cases}$.
- Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.