

SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1 - Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

Phương pháp:

Cho 2 hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C').

- +) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'): $f(x) = g(x)$
- +) Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.
- +) Số nghiệm của (*) là số giao điểm của (C) và (C').

2 - Tương giao của đồ thị hàm bậc 3

Phương pháp 1: Bảng biến thiên (PP đồ thị)

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x, m) = 0$ (phương trình ẩn x tham số m)

+) Cô lập m đưa phương trình về dạng $m = f(x)$

+) Lập BBT cho hàm số $y = f(x)$.

+) Dựa và giả thiết và BBT từ đó suy ra m.

*) **Dấu hiệu:** Sử dụng PP bảng biến thiên khi m độc lập với x.

Phương pháp 2: Nhẩm nghiệm – tam thức bậc 2.

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x, m) = 0$

+) Nhẩm nghiệm: (Khử tham số). Giả sử $x = x_0$ là 1 nghiệm của phương trình.

+) Phân tích: $F(x, m) = 0 \Leftrightarrow (x - x_0) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ (là $g(x) = 0$ là phương trình bậc 2 ẩn x

tham số m).

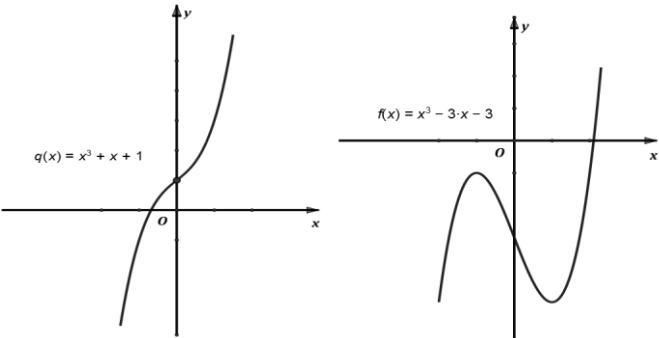
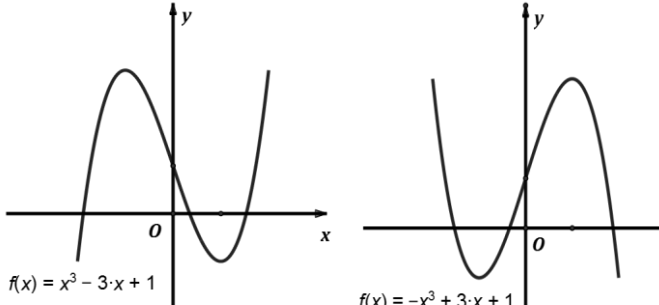
+) Dựa vào yêu cầu bài toán đi xử lý phương trình bậc 2 $g(x) = 0$.

Phương pháp 3: Cực trị

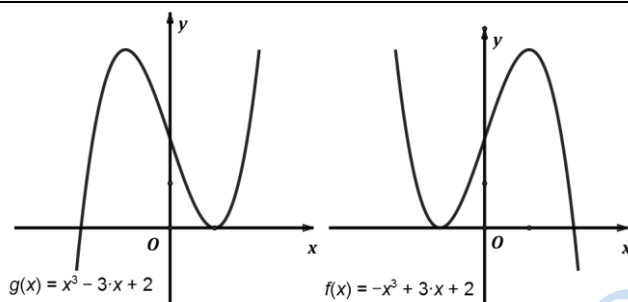
*) **Nhận dạng:** Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhẩm được nghiệm.

*) **Quy tắc:**

+) Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x, m) = 0$ (1). Xét hàm số $y = F(x, m)$

+) Đề (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị $y = F(x, m)$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm. (2TH) - Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$ - Hoặc hàm số có CĐ, CT và $y_{cd} \cdot y_{ct} > 0$ (hình vẽ)	
+) Đề (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị $y = F(x, m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd} \cdot y_{ct} < 0$	

+) Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị $y = F(x, m)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd} \cdot y_{ct} = 0$



Bài toán: Tìm m để đồ thị hàm bậc 3 cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành 1 cấp số cộng:

1. Định lý vi ét:

*) Cho bậc 2: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thì ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

*) Cho bậc 3: Cho phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thì ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{c}{a}, x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$$

2. Tính chất của cấp số cộng:

+) Cho 3 số a, b, c theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng thì: $a + c = 2b$

3. Phương pháp giải toán:

+) Điều kiện cần: $x_0 = -\frac{b}{3a}$ là 1 nghiệm của phương trình. Từ đó thay vào phương trình để tìm m.

+) Điều kiện đủ: Thay m tìm được vào phương trình và kiểm tra.

3 - Tương giao của hàm số phân thức

Phương pháp

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (C) và đường thẳng $d: y = px + q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và

(d):

$$\frac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x, m) = 0 \text{ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).}$$

*) Các câu hỏi thường gặp:

1. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$.

2. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 \text{ và thỏa mãn: } -\frac{d}{c} < x_1 < x_2.$$

3. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 \text{ và thỏa mãn } x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}.$$

4. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và

$$\text{thỏa mãn } x_1 < -\frac{d}{c} < x_2.$$

5. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:

+) Đoạn thẳng $AB = k$

+) Tam giác ABC vuông.

+) Tam giác ABC có diện tích S_0

*** Quy tắc:**

- +) Tìm điều kiện tồn tại A, B $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt.
- +) Xác định tọa độ của A và B (chú ý Vi ét)
- +) Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.

***) Chú ý:** Công thức khoảng cách:

$$\begin{aligned}
 &+) A(x_A; y_A), B(x_B; y_B): AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\
 &+) \begin{cases} M(x_0; y_0) \\ \Delta: Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases} \Rightarrow d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}
 \end{aligned}$$

4 - Tương giao của hàm số bậc 4

NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1)

1. Nhẩm nghiệm:

- Nhẩm nghiệm: Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.

- Khi đó ta phân tích: $f(x, m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

- Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc 2 $g(x) = 0$

2. Ẩn phụ - tam thức bậc 2:

- Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).

- Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{cases}$

- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{cases}$

- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$

- Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$

3. Bài toán: Tìm m để (C): $y = ax^4 + bx^2 + c$ (1) cắt (Ox) tại 4 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2).

- Để (1) cắt (Ox) tại 4 điểm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) thỏa mãn $t_2 = 9t_1$.

- Kết hợp $t_2 = 9t_1$ với định lý Vi – ét tìm được m.