

CỰC TRỊ HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:

- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa x_0 sao cho $(a; b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f .
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa x_0 sao cho $(a; b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f .
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K .
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số**.
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f .

* Nhận xét:

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập D ; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $(a; b)$ nào đó chứa x_0 hay nói cách khác khi x_0 điểm cực đại (cực tiểu) sẽ tồn tại khoảng $(a; b)$ chứa x_0 sao cho $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $(a; b)$.
- Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập K . Hàm số có thể không có cực trị trên một tập cho trước.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lý 1:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý:

- Đạo hàm $f'(x)$ có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0 .
- Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
- Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lý 2:

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó, nếu hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

- Nếu trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

4. Quy tắc tìm cực trị

Quy tắc 1:

- Bước 1: Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- Bước 2: Tìm các điểm x_i ($i=1;2;\dots$) mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- Bước 3: Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i .

Định lý 3:

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:

- Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0 .

Từ định lý trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

Quy tắc 2:

- Bước 1: Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- Bước 2: Tìm các nghiệm x_i ($i=1;2;\dots$) của phương trình $f'(x) = 0$.
- Bước 3: Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.
 - * Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i .
 - * Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i .

MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ HÀM SỐ

1. Cực trị của hàm đa thức bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1.1. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn hoành độ cho trước

Bài toán tổng quát:

Cho hàm số $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

Phương pháp:

- Bước 1:
 - * Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
 - * Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c = Ax^2 + Bx + C$
- Bước 2:

Hàm số có cực trị (hay có hai cực trị, hai cực trị phân biệt hay có cực đại và cực tiểu)

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua 2 nghiệm đó

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = B^2 - 4AC = 4b^2 - 12ac > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$
- Bước 3:

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Khi đó:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A} = \frac{c}{3a} \end{cases}.$$

- Bước 4:

Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P . Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

• Bước 5:

Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

* **Chú ý:** Hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Điều kiện	Kết luận
$b^2 - 3ac \leq 0$	Hàm số không có cực trị.
$b^2 - 3ac > 0$	Hàm số có hai điểm cực trị.

➤ **Điều kiện để hàm số có cực trị cùng dấu, trái dấu.**

▪ Hàm số có 2 cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu

$$\Leftrightarrow AC = 3ac < 0 \Leftrightarrow ac < 0.$$

▪ Hàm số có hai cực trị cùng dấu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A} > 0 \end{cases}$$

▪ Hàm số có hai cực trị cùng dấu dương

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} > 0 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A} > 0 \end{cases}$$

▪ Hàm số có hai cực trị cùng dấu âm

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} < 0 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A} > 0 \end{cases}$$

➤ **Tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn:**

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 < \alpha < x_2 \\ x_1 < x_2 < \alpha \\ \alpha < x_1 < x_2 \end{array} \right.$$

▪ Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < \alpha < x_2$

$$\Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 < 0$$

▪ Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases}$$

▪ Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $\alpha < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases}$$

- Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng

khi có 1 nghiệm là $x = \frac{-b}{3a}$, có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân khi có 1 nghiệm là $x = -\sqrt[3]{\frac{d}{a}}$.

1.2. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.

Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) < 0$ thì hai điểm A, B nằm về hai phía so với đường thẳng Δ .

Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) > 0$ thì hai điểm A, B nằm cùng phía so với đường thẳng Δ .

Một số trường hợp đặc biệt:

- Các điểm cực trị của đồ thị nằm cùng về 1 phía đối với trục Oy
 $\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị cùng dấu
 $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu
- Các điểm cực trị của đồ thị nằm cùng về 2 phía đối với trục Oy
 $\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị trái dấu
 $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu
- Các điểm cực trị của đồ thị nằm cùng về 1 phía đối với trục Ox
 $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{C\Box} \cdot y_{CT} > 0$

Đặc biệt:

- Các điểm cực trị của đồ thị nằm cùng về phía trên đối với trục Ox
 $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{C\Box} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{C\Box} + y_{CT} > 0 \end{cases}$
- Các điểm cực trị của đồ thị nằm cùng về phía dưới đối với trục Ox
 $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{C\Box} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{C\Box} + y_{CT} < 0 \end{cases}$
- Các điểm cực trị của đồ thị nằm về 2 phía đối với trục Ox
 $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{C\Box} \cdot y_{CT} < 0$

(áp dụng khi không nhớ được nghiệm và viết được phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số)

Hoặc: Các điểm cực trị của đồ thị nằm về 2 phía đối với trục Ox

$\Leftrightarrow$ đồ thị cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhớ được nghiệm)

1.3. Phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị

$$g(x) = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right)x + d - \frac{bc}{9a} \quad \text{hoặc} \quad g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{18a} \quad \text{hoặc} \quad g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{3y'''}.$$

1.4. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc 3 là

$$AB = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}} \quad \text{với} \quad e = \frac{b^2 - 3ac}{9a}$$

2. Cực trị của hàm bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$)

2.1. Một số kết quả cần nhớ

- Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$.
- Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$.
- Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.
- Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.
- Hàm số có hai cực tiểu và một cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.
- Hàm số có một cực tiểu và hai cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

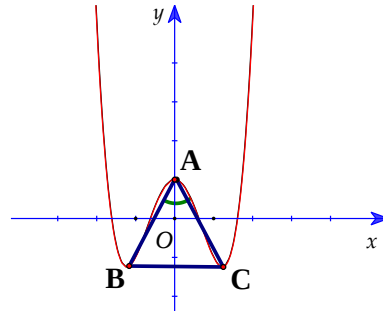
2.2. Một số công thức tính nhanh

Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị: $A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

tạo thành tam giác ABC thỏa mãn đủ kiện: $ab < 0$

Đặt: $BAC = \alpha$

Tổng quát: $\cot^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{-b^3}{8a}$



Dữ kiện	Công thức thỏa mãn $ab < 0; c \neq 0$
Tam giác ABC vuông cân tại A	$b^3 = -8a$
Tam giác ABC đều	$b^3 = -24a$
Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC} = S_0$	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
Tam giác ABC có diện tích $\max(S_0)$	$S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC} = r_0$	$r = \frac{b^2}{4 a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC} = R$	$R = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}$
Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
Tam giác ABC có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 = 4ac$
Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 = 6ac$

Tam giác ABC có trục tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
Tam giác ABC cùng điểm O tạo thành hình thoi	$b^2 = 2ac$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3.k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2} ac $
Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 = 8ac$
Đồ thị hàm số $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng	$b^2 = \frac{100}{9}ac$
Định tham số để hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ và trục hoành có diện tích phần trên và phần dưới bằng nhau.	$b^2 = \frac{36}{5}ac$
Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là: $x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$	