Phần 1: GIẢI TÍCH

ÔN TẬP

I. CÔNG THỨC VỀ ĐẠO HÀM:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$	
2. $(uv)' = u'v + uv'$ 3. $(ku)' = k.u'$ (k: hằng số)	4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
5. $(c)' = 0$ (c: hằng số)	6. $(x)' = 1$
7. $(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1}.u'$
8. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
9. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ $\left(\dfrac{k}{x}\right)' = -\dfrac{k}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ $\left(\dfrac{k}{u}\right)' = -\dfrac{ku'}{u^2}$ $\left(\dfrac{u}{k}\right)' = \dfrac{u'}{k}$
10. $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ 11. $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \dfrac{ad\,x^2 + 2aex + be - dc}{(dx+e)^2}$	12. $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^2 + 2x\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2+b'x+c')^2}$
13. $(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'\cos u$ $(\sin kx)' = k\cos kx$
14. $(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$ $(\cos kx)' = -k'\sin kx$
15. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$
16. $(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = \dfrac{-u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$
17. $(e^x)' = e^x$ $(e^u)' = u'e^u$	$(a^x)' = a^x \ln a$ $(a^u)' = u'a^u \ln a$
18. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}(x>0)$, $(\ln\lvert x\rvert)' = \dfrac{1}{x}(x \neq 0)$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}(u>0)$, $(\ln\lvert u\rvert)' = \dfrac{u'}{u}(u \neq 0)$
19. $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
20. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}(x>0)$, $(\log_a\lvert x\rvert)' = \dfrac{1}{x\ln a}(x \neq 0)$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}(u>0)$, $(\log_a\lvert u\rvert)' = \dfrac{u'}{u\ln a}(u \neq 0)$

II. MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP:

1. Các hệ thức cơ bản:

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$\tan a.\cot a = 1, \quad a \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1,$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}, \quad a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}, \quad a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2. Công thức nhân đôi:

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$,

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$,

$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

3. Công thức hạ bậc:

$\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$,

$\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$,

$\tan^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$,

$\sin a\sin b = -\dfrac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

$\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$\cos a+\cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$,

$\cos a-\cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

$\sin a+\sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$,

$\sin a-\sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

6. Công thức khác:

$\sin x+\cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$\sin x-\cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

III. VIẾT PTTT CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ y = f(x):

*** Dạng pttt:** $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Tìm x_0: hoành độ; $y_0 = f(x_0)$: tung độ; $f'(x_0) = y'(x_0)$: hệ số góc của tiếp tuyến.

* **Dạng 1:** Cho x_0: thay x_0 vào y tìm y_0; thay x_0 vào y' tìm $f'(x_0)$

* **Dạng 2:** Cho y_0: thay y_0 vào y tìm x_0; thay x_0 vào y' tìm $f'(x_0)$

* **Dạng 3:** cho $f'(x_0)$: thay $f'(x_0)$ vào y' tìm x_0; thay x_0 vào y tìm y_0

* **Chú ý:**

+ Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = ax + b \Leftrightarrow f'(x_0) = a$

+ Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = ax + b \Leftrightarrow f'(x_0) = -1/a$

+ Trục hoành Ox có pt: y = 0

+ Trục tung Oy có pt: x = 0

BÀI TẬP

Bài 1: Giải các phương trình:

1/ Bậc 1: ax + b = 0 : nhập phương trình, shift slove = =

2/ Bậc 2: $ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0)$: mode 5 3. Kết quả:

+ Có chữ i: pt vô nghiệm.

+ Có 1 chữ x: pt có nghiệm kép: $x = -\dfrac{b}{2a}$

+ Có 2 chữ x: pt có 2 nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

3/ Bậc 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\ (a \neq 0)$: mode 5 4.

4/ Bậc 4 dạng: $ax^4 + bx^2 + c = 0\ (a \neq 0)$: mode 5 3, nghiệm là: x^2

Bài 2: Xét dấu 1 biểu thức:

+ *Vô nghiệm:* cùng dấu a.

+ *Có nghiệm:* khoảng cuối cùng dấu a, qua nghiệm đổi dấu, qua nghiệm kép và không xác định không đổi dấu.

Bài 3: Cho hàm số: $y = \dfrac{3x+1}{5-x}$. **Tính giá trị của hàm số (tính y)** biết $x = 1, x = -1, x = 2, x = -2$

Nhập biểu thức chứa x, CALC lần lượt từng giá trị x ta được giá trị y.

Bài 4: Tính đạo hàm các hàm số:

1/ $y = x^3 - 3x + 1$

2/ $y = -\dfrac{3}{2}x^4 - 2x^2 + 3x$

3/ $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$

4/ $y = \dfrac{1-2x}{3x-2}$

5/ $y = \dfrac{2x^2 - 6x + 5}{1-x}$

6/ $y = \sqrt{6x^2 - x - 7}$

7/ $y = x + 2 - \dfrac{3}{x-1}$

8/ $y = 5 - 2x + \dfrac{2}{3-x}$

9/ $y = x\cos 2x$

10/ $y = x\sqrt{1+x^2}$

11/ $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + 5x^2 - x + 1$

12/ $y = 3x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 - 3$

13/ $y = \dfrac{-2x}{5-x}$

14/ $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{2x-3}$

15/ $y = 3x + 2 + \dfrac{4}{x-3}$

16/ $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

17/ $y = x\sin 2x$

18/ $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$

19/ $y = (x^2+5)^3$

20/ $y = \dfrac{3 - 2x - x^2}{x+1}$

Bài 5: Thực hiện phép chia: $\dfrac{\textbf{Töû}}{\textbf{Maãu}}$ **= Nguyeân +** $\dfrac{\textbf{Dö}}{\textbf{Maãu}}$

1/ $y = \dfrac{2x^2 - x + 1}{3-x}$

2/ $y = \dfrac{x^2 - 2x}{1-x}$

3/ $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{3-x}$

4/ $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{2-x}$

5/ $y = \dfrac{-x^2 + 3x - 1}{x+1}$

6/ $y = \dfrac{-2x^2 - x + 5}{2-x}$

7/ $y = \dfrac{1-2x}{3-x}$

8/ $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

9/

Bài 6: Tính Δ hoặc Δ'

1/ $-x^2 + (m+2)x + m - 5 = 0$

2/ $(m-1)x^2 + 2(3m-1)x + 1 = 0$

3/ $(m+1)x^2 + (1-2m)x + (m-2) = 0$

4/ $x^2 + (m+3)x + 1 - 3m = 0$

Chương I: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

§1 SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ:

Giả sử y = f(x) có đạo hàm trên khoảng (a; b). Ta có:

1) Điều kiện đủ :

- y'(x) > 0 trên khoảng (a; b) $\Rightarrow$ hàm số y = f(x) đồng biến trên khoảng (a; b).
- y'(x) < 0 trên khoảng (a; b) $\Rightarrow$ hàm số y = f(x) nghịch biến trên khoảng (a; b).

2) Điều kiện cần:

- Hàm số y = f(x) đồng biến trên khoảng (a ; b) $\Rightarrow$ y'(x) ≥ 0 trên khoảng (a; b).
- Hàm số y = f(x) nghịch biến trên khoảng (a ; b) $\Rightarrow y'(x) \leq 0$ trên khoảng (a; b).

*** Chú ý**:

+ Trong điều kiện đủ, nếu y'(x) = 0 tại một số hữu hạn điểm thuộc (a; b) thì kết luận vẫn đúng

+ Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng (a; b) gọi là hàm số đơn điệu trên (a; b)

3) Ghi nhớ:

*** Ghi nhớ 1**: y'(x) = ax^2 + bx + c $(a \neq 0)$

+ $y'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

+ $y'(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

+ Nếu cơ số a chứa tham số ta xét trường hợp a = 0 trước khi sử dụng công thức trên.

*** Ghi nhớ 2**: hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên khoảng $K \Leftrightarrow y' > 0 \ \forall x \in K$ và nghịch biến trên khoảng $K \Leftrightarrow y' < 0 \ \forall x \in K$

II. QUY TẮC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU (SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN) CỦA HÀM SỐ:

- B1: tìm tập xác định ***(mẫu hoặc trong căn vô nghiệm → D = $\mathbb{R}$)***
- B2: Tính y' và tìm các điểm x_i (y' = 0 hoặc không xác định)
- B3: Lập bảng biến thiên
- B4: Kết luận về đồng biến, nghịch biến

Áp dụng: Bài 1: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số:

1/ $y = x^4 + 8x^2 + 5$

2/ $y = \dfrac{2x-3}{4-x}$

3/ $y = \dfrac{x^2+x-1}{x-2}$

4/ $y = \sqrt{25-x^2}$

Bài 2: Tìm m để các hàm số sau:

1/ y = $-\dfrac{x^3}{3} + (m-2)x^2 + (m-8)x + 1$ nghịch biến trên TXĐ

2/ y = $\dfrac{(m-2)x+3}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của hàm số

III. BÀI TẬP :

Bài 1: Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số:

1) y = x^3 – 2x^2 + x + 1

2) y = –x^4 + 2x^2

3) $y = \dfrac{3x+1}{1-x}$

4) $y = \dfrac{x^2-2x}{1-x}$

5) y = 2x^3 – 6x + 2

6) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7x + 1$

7) y = x + $\dfrac{4}{x}$

8) $y = 2x - 1 + \dfrac{2}{x+1}$

9) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

10) y = x^4 – 2x^2 + 3

Bài 2: Tìm m để các hàm số sau:

1) $y = x^3 - mx^2 + 3x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

2) $y = -x^3 - (m-1)x^2 + (m+2)x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

3) $y = \dfrac{(m-1)x^3}{3} + mx^2 + (3m-2)x + 3$ đồng biến trên TXĐ

4) $y = -\dfrac{x^3}{3} + (m-2)x^2 + (m-8)x + 1$ nghịch biến trên TXĐ

5) $y = \dfrac{(m-2)x+3}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của hàm số

5) $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của hàm số

6) $y = \dfrac{2mx-m}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của hàm số.

---

§2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. ĐỊNH NGHĨA: SGK/ 13, 14.

Cho hs $y = f(x)$ liên tục trên khoảng (a; b) và $x_0 \in$ (a; b). Hàm số đạt cực tiểu (cực đại) tại x_0

+ x_0 là điểm cực tiểu (điểm cực đại) của hàm số gọi chung là điểm cực trị,

+ $f(x_0)$ là giá trị cực tiểu (giá trị cực đại) của hàm số còn gọi là cực tiểu (cực đại) gọi chung là cực trị

+ Điểm $M(x_0, f(x_0))$ là điểm cực tiểu (điểm cực đại) của đồ thị hàm số.

II. ĐỊNH LÝ:

1. ĐIỀU KIỆN CẦN: hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a; b) và đạt cực trị tại x_0 thì $y'(x_0) = 0$

2. ĐIỀU KIỆN ĐỦ :

a/ Quy tắc 1: Cho hs $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a; b), $x_0 \in$ (a; b) và $y'(x_0) = 0$. Ta có :

+ Nếu đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu.

+ Nếu đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực đại.

*** Phương pháp: lập bảng biến thiên.**

+ B1: TXĐ

+ B2: Tính y' và tìm các x_i (y' = 0 hoặc không xác định)

+ B3: Lập BBT

+ B4: Kết luận về cực trị: **ĐỒI** → cực đại; **THUNG LŨNG** → cực tiểu

*** Áp dụng: tìm các điểm cực trị của hàm số:**

a1/ $y = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$

a2/ $y = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$

a3/ $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 + 6$

b/ Quy tắc 2: Cho hs $y = f(x)$

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$

+ Hàm số đạt cực tiểu đại $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$

+ Hàm số đạt cực trị tại $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) \neq 0 \end{cases}$

+ Nhớ âm lồi (CĐ), dương lõm (CT)

*** Phương pháp:**

+ B1: Tìm TXĐ
+ B2: Tính y'. Giải pt y' = 0 tìm các nghiệm x_i (i = 1, 2, 3…n).
+ B3: Tính y'' và y''(x_i).
+ B4: Kết luận về cực trị: **y''(x_i) > 0 → CT ; y''(x_i) < 0 → CĐ**

*** Áp dụng:**

Bài 1: Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - x^2 - x + 3$

Bài 2 : Tìm m để hàm số :

a/ $y = x^3 - 2x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại x = 1

b/ $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (3m+4)x - m$ có 2 cực trị.

III. BÀI TẬP :

Bài 1: Tìm cực trị của các hàm số:

1) y = $\frac{1}{3}x^3 - 4x$

2) y = $\frac{1}{4}x^4 - 4x^2 - 1$

3) y = $\frac{x^2 - 3x}{x+1}$

4) y = $\frac{2x+7}{4x+3}$

5) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

6) $y = \frac{x+3}{x-4}$

Bài 2: Tìm m để hàm số:

1) y = $\frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại x = 2

2) y = $\frac{x^2 - mx + m - 1}{x+1}$ đạt cực tiểu tại x = 1

3) $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x+1}$ đạt cực tiểu tại x = 2

4) $y = mx^3 + 3x^2 + 5x + m$ đạt cực tiểu tại x = 2

5) $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-2)x^2 + (2-m)x + 2$ đạt cực đại tại x = –1

Bài 3: CMR hàm số: $y = x^3 - x^2 - (m^2+1)x + m - 1$ luôn có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

---

§3 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. CÁCH TÌM GTLN – GTNN (max – min) CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ TRÊN KHOẢNG (a; b):

*** Phương pháp :** lập BBT

+ B1: TXĐ
+ B2: Tính y' và tìm các x_i (y' = 0 hoặc không xác định)
+ B3: Lập BBT
+ B4: Kết luận về GTLN – GTNN ***(đồi → max, thung lũng → min)***

*** Áp dụng: Tìm GTLN – GTNN của hàm số:**

a/ $y = -\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7x + 1$

b/ $y = 2x - 1 + \frac{2}{x+1}$ với x < – 1

II. CÁCH TÌM GTLN – GTNN (max – min) CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ TRÊN ĐOẠN [a; b]:

*** Phương pháp :**

+ B1: Tính y' và tìm các $x_1, x_2, x_3, ... \in (a; b)$ mà y' = 0 hoặc không xác định
+ B2: Tính y(a), y(b), y(x_1), y(x_2), y(x_3), ...
+ B3: Tìm số lớn nhất m và số nhỏ nhất n trong các số trên. Với $\max\limits_{[a;b]} y = m; \min\limits_{[a;b]} y = n$ *****

*** Áp dụng: Tìm GTLN – GTNN của hàm số:**

a/ $y = x^4 + 6x^2 + 2$ trên đoạn [–3; 1]

b/ $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$

c/ $y = \sqrt{5 - x} + \sqrt{x + 2}$

III. BÀI TẬP: Tìm GTLN, GTNN của hàm số:

1) $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn [–4; 0]

2) $y = \sqrt{100 - x^2}$

3) $y = \sqrt{3 + x} + \sqrt{6 - x}$

4) $y = 2\cos 2x - 5\cos x + 3$

5) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ trên đoạn [–2; 2]

6) $y = x + \sqrt{12 - 3x^2}$

7) $y = \sqrt{x + 3} + \sqrt{10 - x}$

8) $y = 2\sin^2 x - \cos x + 1$

9) y = 2sinx + sin2x trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

10) y = x – 2.lnx trên đoạn [1; e]

11) $y = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng (0; +∞)

12) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ trên đoạn [2; 5]

13) $y = 2x - 1 + \frac{1}{x + 2}$ trên đoạn [-1 ; 2]

14) $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$ trên đoạn [–3; 3]

---

§4 ĐƯỜNG TIỆM CẬN

I. TCN: Nếu $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$ thì $y = y_0$ là tiệm cận ngang

II. TCĐ: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ thì $x = x_0$ là tiệm cận đứng

III. CHÚ Ý:

+ Tiệm cận đứng $x = x_0$ với x_0 là nghiệm của mẫu chỉ có ở hàm phân thức (đa thức chia đa thức)

+ Tiệm cận ngang chỉ có khi bậc tử ≤ bậc mẫu:

- Nếu bậc tử < bậc mẫu thì tiệm cận ngang y = 0.
- Nếu bậc tử = bậc mẫu thì tiệm cận ngang y = (hệ số của mũ cao nhất trên từ)/(hệ số của mũ cao nhất dưới mẫu)

*** Áp dụng: tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số:**

1/ $y = \frac{x - 3}{2x + 1}$

2/ $y = \frac{1 - x}{x - 5}$

3/ $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

4/ $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 4x + 3}$

5/ $y = \frac{3x - 2}{2x + 1}$

6/ $y = \frac{x + 3}{x - 4}$

7/ $y = \frac{x - 5}{3 - x}$

8/ $y = \frac{x^2 - x + 1}{4 - x^2}$

9/ $y = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

10/ $y = \frac{1 - x^2}{2x + 4}$

11/

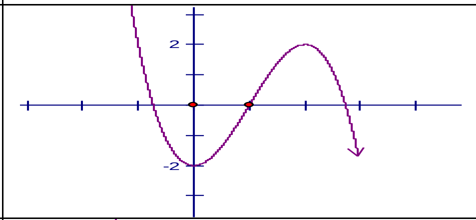
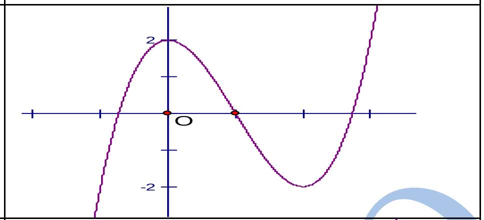
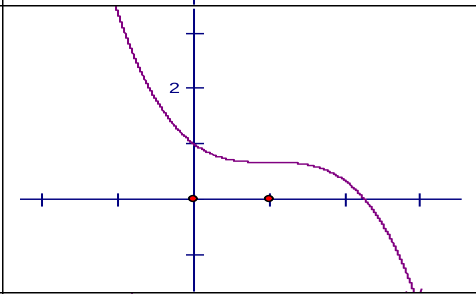
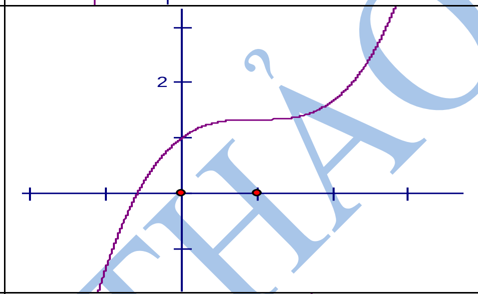
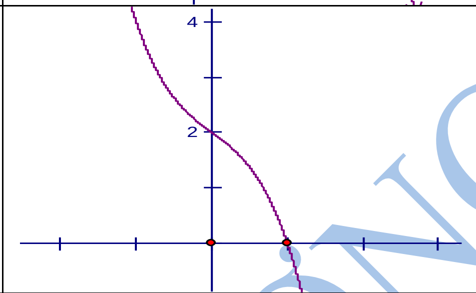
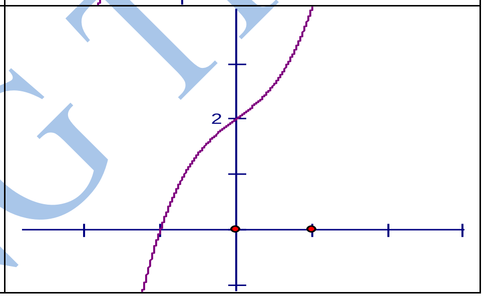
---

§5 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. HÀM SỐ: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ ***(hàm bậc ba)***

1. TXĐ: $D = \mathbb{R}$
2. $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ Cho y' = 0 ⇒ tìm nghiệm.
3. Kết luận đồng biến, nghịch biến.
4. Cực trị: cực đại, cực tiểu.
5. Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y =$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y =$

6. Bảng biến thiên.
7. $y''=6ax+2b$ Cho y’’ = 0 $\Rightarrow$ tìm nghiệm$\Rightarrow$ điểm uốn.
8. Tìm điểm.
9. Vẽ đồ thị: Đồ thị có 1 trong các dạng sau:

	a < 0	a > 0
Pt y’ = 0 có hai nghiệm phân biệt.		
Pt y’ = 0 có nghiệm kép		
Pt y’ = 0 vô nghiệm		

Nhớ: Đồ thị nhận điểm uốn làm tâm đối xứng

*** Bài tập mẫu:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: y= $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

Giải:

Tập xác định: D= ℝ

$y' = 6x^2 - 18x + 12$

$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

$y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>2 \end{array}\right.$; $y' < 0 \Leftrightarrow 1<x<2$

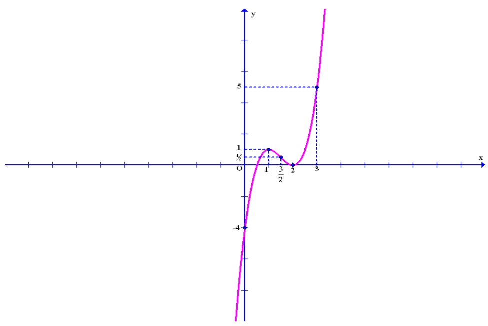
Hàm số đồng biến trong 2 khoảng:($-\infty$;1) và (2; $+\infty$), nghịch biến trong khoảng: (1;2)

Hàm số đạt cực đại tại x=1; $y_{CĐ}$=1, cực tiểu tại x=2; y_{CT}=0

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$



Điểm đặc biệt

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3
y	-4	1	$\frac{1}{2}$	0	5

*** Áp dụng: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số:**

1/ $y = 2 + 3x - x^3$ 2/ $y = x^3 + 4x^2 + 4x$

3/ $y = x^3 + x^2 + 9x$ 4/ $y = -2x^3 + 5$

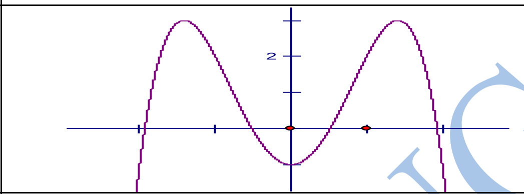
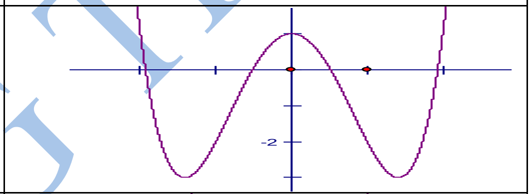
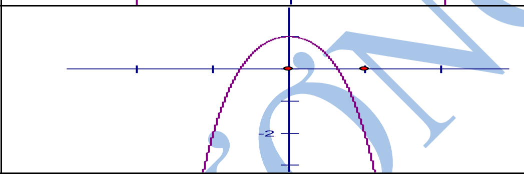
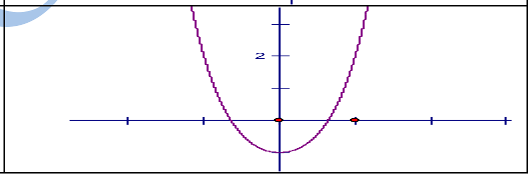
5/ $y = 2x^3 - 3x^2 - 2$ 6/ $y = x^3 - x^2 + x$

7/ $y = -x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ 8/ $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

9/ $y = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 5x - 1$ 10/ $y = -2x^3 - x + 2$

II. HÀM SỐ: $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ ***(hàm trùng phương)***

1. TXĐ: D = $\mathbb{R}$
2. $y' = 4ax^3 + 2bx$ Cho y' = 0 $\Rightarrow$ tìm nghiệm.
3. Kết luận đồng biến, nghịch biến.
4. Cực trị: cực đại, cực tiểu.
5. Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \left\langle \begin{matrix} -\infty, & a < 0 \\ +\infty, & a > 0 \end{matrix} \right.$
6. Bảng biến thiên.
7. Tìm điểm.
8. Vẽ đồ thị: Đồ thị có 1 trong các dạng sau:

	a < 0	a > 0
Pt y' = 0 có 3 n_0 phân biệt		
Pt y' = 0 có 1 nghiệm		

Đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng

***Bài tập mẫu:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: y= $x^4 - 2x^2 - 1$

Giải:

Miền xác định: D= $\mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 4x$ cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{matrix}\right.$

$y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} -1 < x < 0 \\ x > 1 \end{matrix}\right.$; $y' < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x < -1 \\ 0 < x < 1 \end{matrix}\right.$

Hàm số đồng biến trong 2 khoảng: (–1;0) và (1; $+\infty$), nghịch biến trong 2 khoảng: ($-\infty$;–1) và (0;1)

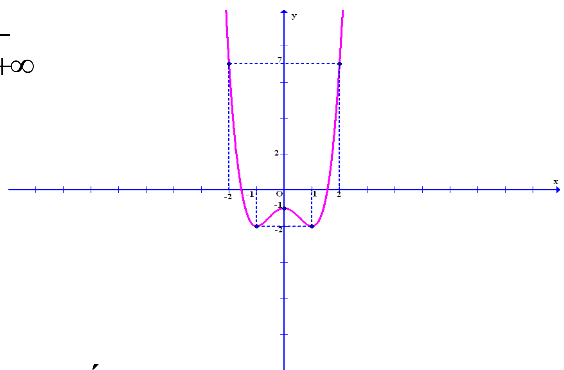
Hàm số đạt cực đại tại x=0; $y_{CĐ}$= -1, cực tiểu tại x= ±2; y_{CT}= -2

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$	↘	–2	↗	–1	↘	–2	↗	$+\infty$

Điểm đặc biệt



x	-2	-1	0	1	2
y	7	-2	-1	-2	7

Nhận xét: đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.

*** Áp dụng: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số:**

1/ $y = -x^4 + 8x^2 - 1$ 2/ $y = x^4 - 2x^2 + 2$

3/ $y=\frac{1}{2}x^4+x^2-\frac{3}{2}$

4/ $y=-2x^4-4x^2+3$

5/ $y=\frac{x^4}{2}-x^2+1$

6/ $y=-\frac{1}{4}x^4+x^2$

7/ $y=-x^4-2x^2+1$

8/ $y=\frac{3}{4}x^4-x^2+2$

9/ $y=x^4+5x^2-3$

10/ $y = 2x^2 - x^4 - 1$

III. HÀM SỐ: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0; ad-bc\neq 0)$ *(hàm nhất biến)*

1. TXĐ: D = ℝ $\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ ($-\frac{d}{c}$ là nghiệm mẫu)
2. $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}\begin{cases}<0\ \forall x\in D\\ >0\ \forall x\in D\end{cases}$
3. Kết luận đồng biến, nghịch biến (chỉ đồng biến hoặc nghịch biến)
   - Trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)$ và $\left(-\frac{d}{c};+\infty\right)$, y' < 0 nên hàm số nghịch biến
   - Trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)$ và $\left(-\frac{d}{c};+\infty\right)$, y' > 0 nên hàm số đồng biến
4. Cực trị: hàm số không có cực trị
5. Giới hạn, tiệm cận:
   - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\frac{a}{c}$ $\Rightarrow$ Tiệm cận ngang: $y=\frac{a}{c}$
   - $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} y=+\infty(hoac-\infty)$, $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} y=-\infty(hoac+\infty)$ $\Rightarrow$ Tiệm cận đứng: $x=-\frac{d}{c}$(n$_0$ mẫu)
6. Bảng biến thiên.

y' < 0

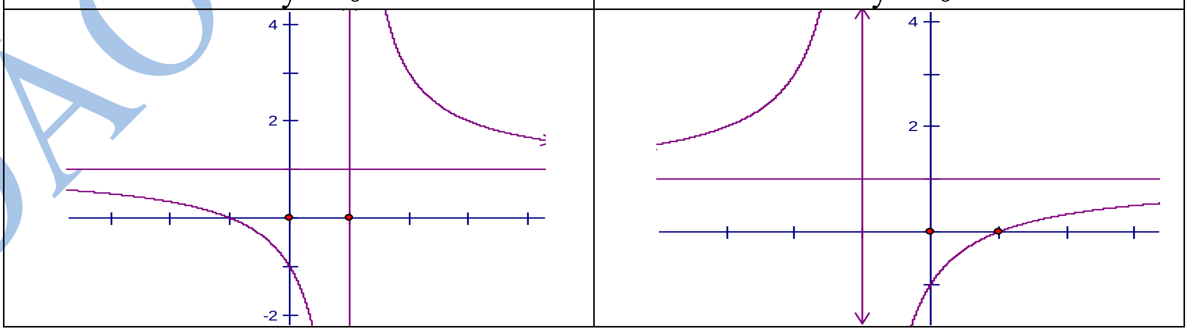
x	- ∞	- d/c	+ ∞
y'	–	‖	–
y	a/c ↘ - ∞	‖	+ ∞ ↘ a/c

y' > 0

x	- ∞	- d/c	+ ∞
y'	+	‖	+
y	a/c ↗ + ∞	‖	- ∞ ↗ a/c

7. Tìm điểm.
8. Vẽ đồ thị: Đồ thị có 1 trong các dạng sau:

y' < 0	y' > 0



Đồ thị nhận giao điểm 2 đường tiệm cận làm tâm đối xứng

* **Bài tập mẫu:** Khaûo saùt haøm soá $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$.

TXÑ: D= R$\setminus\{-1\}$

$y' = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0\ \forall x\in D$

$\Rightarrow$ Haøm soá luoân ñoàng bieán treân töøng khoûang xaùc ñònh cuûa noù.

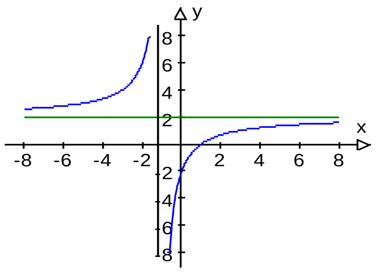
Tieäm caän ngang laø: $y = 2$ vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 2$.

Tieäm caän ñöùng laø $x = -1$ vì $\lim\limits_{x\to -1^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} y = -\infty$

Baûng bieán thieân.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y/		+	‖	+	
y	2 ↗	$+\infty$	‖ $-\infty$	↗	2

Ñoà thò:



*** Áp dụng: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số:**

1/ $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ 2/ $y = \dfrac{1-2x}{2x-4}$

3/ $y = \dfrac{-x+2}{2x+1}$ 4/ $y = \dfrac{3-2x}{x+1}$

5/ $y = \dfrac{2x}{x-2}$ 6/ $y = \dfrac{2x-1}{1-x}$

7/ $y = \dfrac{5}{x-2}$ 8/ $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

IV. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ:

1. Biện luận số nghiệm phương trình bằng đồ thị:

- Đưa pt về dạng: f(x) = g(m).
- Số nghiệm pt là số giao điểm của (C): $y = f(x)$ và (d): $y = g(m)$ song song hoặc trùng với Ox (cùng phương Ox)

*** Áp dụng: Cho hàm số:** $y = -x^4 + 2x^2 + 3 \ (C)$

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b/ Dựa vào đồ thị biện luận theo m số nghiệm pt: $x^4 - 2x^2 - 1 - m = 0$

2. Viết pttt của đường cong y = f(x):

*** Dạng pttt:** y = f'(x_0) (x – x_0) + y_0

Tìm x_0: hoành độ; y_0 = f(x_0): tung độ; f'(x_0) = y'(x_0): hệ số góc của tiếp tuyến.

+ **Dạng 1:** Cho x_0: thay x_0 vào y tìm y_0; thay x_0 vào y' tìm f'(x_0)

+ **Dạng 2:** Cho y_0: thay y_0 vào y tìm x_0; thay x_0 vào y' tìm f'(x_0)

+ **Dạng 3:** cho f'(x_0): thay f'(x_0) vào y' tìm x_0; thay x_0 vào y tìm y_0

+ **Chú ý:**

- Tiếp tuyến song song với đường thẳng y = ax + b $\Leftrightarrow$ f'(x_0) = a
- Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng y = ax + b $\Leftrightarrow$ f'(x_0) = –1/a
- Trục hoành Ox: y = 0
- Trục tung Oy: x = 0

*** Áp dụng:** Cho hàm số: $y = \dfrac{x+1}{2x-1} \ (C)$

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b/ Viết pttt của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{3}x-2$

3. Vị trí tương đối của hai đồ thị: Cho 2 đường (C_1): y = f(x) và (C_2): y = g(x)

- Để tìm giao điểm của (C_1) và (C_2) ta lập pt hoành độ gđ của (C_1) và (C_2): f(x) = g(x)
- Số nghiệm pt này là số giao điểm của (C_1) và (C_2)

* Áp dụng: Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị 2 hàm số: $y=-x^2+2x-3$ và $y=x^2-x+2$

V. BÀI TẬP TỔNG HỢP:

Bài 1: Cho hàm số $y=x^3-3x-2\ \ (C)$

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (C)
2/ Viết pttt của (C) tại điểm M(−2;−4)
3/ Viết pttt của (C) song song với đường thẳng y = 24x +10
4/ Viết pttt của (C) vuông góc với đường thẳng y = $\frac{1}{3}$x −7
5/ Dựa vào (C) biện luận theo m số nghiệm pt: $x^3-3x-2-m=0$

Bài 2: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-2x^2+\frac{5}{2}\ \ (C)$

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C)
2/ Viết pttt của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ = 2
3/ Dựa vào (C) biện luận theo m số nghiệm pt: $\frac{1}{2}x^4-2x^2+\frac{5-m}{2}=0$

Bài 3: Cho hàm số y = $x^3 + 3x^2 – 4$
1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2/ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M_0(–1; –2)
3/ Viết pttt của đồ thi hàm số tại điểm có tung độ = –4.

Bài 4: Cho hàm số y = $–x^3 + 3x + 1$.
1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2/ Dựa vào đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^3 – 3x + m = 0$.
3/ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hòanh độ x_0 = 1.

Bài 5: Cho hàm số y = $x^3 – 6x^2 + 9x + 1$
1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng y = $-\frac{1}{24}x+2$
3/ Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số
4/ Dựa vào đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^3 – 6x^2 + 9x + m = 0$

Bài 6: Cho hàm số y = $–x^3 + 3x^2 – 2$.
1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng y = – 9x + 1
3/ Tìm m để đường thẳng y = m cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

Bài 7: Cho hàm số y = $\frac{1}{3}x^3-x^2+1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm A(1 ; 0)

Bài 8: Cho hàm số y = $\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

Bài 9: Cho hàm số y = x^3 + x
1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

Bài 10: Cho hàm số y = $x^4 - 2x^2 + 1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^4 - 2x^2 + 1 - m = 0$.

3/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = \sqrt{2}$

Bài 11: Cho hàm số y = $- x^4 + 2x^2 + 2$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm m để phương trình $x^4 - 2x^2 + m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

3/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Bài 12: Cho hàm số y = $\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{3}{2}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^4 - 6x^2 + 3 - m = 0$.

3/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tại điểm A(0; $\frac{3}{2}$)

Bài 13: Cho hàm số y = $-x^4 + 6x^2 - 5$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm m để đường thẳng y = m cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

3/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(1 ; 0)$.

Bài 14: Cho hàm số y = $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2/ Tìm m để phương trình : $x^4 - 8x^2 - 4 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

3/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

Bài 15: Cho hàm số y = $\frac{x+1}{x-1}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số.

2/ Viết phương trình tiếp tuyến của (H) tại điểm M(2; 3).

3/ Viết phương trình tiếp tuyến biết tiếp tuyến song song với đường thẳng y = $-2x + 1$

Bài 16: Cho hàm số y = $\frac{2x+1}{x+1}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số.

2/ Viết phương trình tiếp tuyến của (H) tại điểm có hoành độ x = -2

3/ Viết phương trình tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng y = $-x + 2$

Bài 17: Cho hàm số y = $\frac{2x}{1-x}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số.

2/ Tìm trên (H) những điểm có tọa độ là các số nguyên.

3/ Viết phương trình tiếp tuyến của (H) tại giao điểm của (H) với trục tung.

Bài 18: Cho hàm số y = $\frac{x-1}{x}$.

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số.

2/ Viết phương trình tiếp tuyến của (H) tại giao điểm của (H) với trục hoành.

Bài 19: Cho hàm số y = $\frac{4}{x-4}$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số.

2/ Viết phương trình tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến đi qua điểm A(4; 4).

Bài 20: Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{1-x}$

1) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Viết pttt của đồ thị biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng y = $- x + 2$

3) Tìm những điểm trên đồ thị thị có hoành độ và tung độ đều là những số nguyên.

Bài 21: Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$

1) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = –2

2) Dựa vào (C) biện luận theo k số nghiệm pt: $x^4 - 4x^2 + k = 0$

3) Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại x = –1

Bài 22: Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1$

1) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm m để pt $x^4 - 8x^2 + 4 = m$ có 2 nghiệm phân biệt

3) Viết pttt của đồ thị tại điểm có hoành độ = 1.

Bài 23: Cho hàm số $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - 2$

1) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 0

2) Dựa vào đồ thị (C) biện luận theo k số nghiệm pt: $-x^3 + 3x^2 - 2k = 0$

3) Tìm m để hàm số đạt cực đại tại x = 2

4) Viết pttt của đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc = 3

Bài 24: Cho hàm số $y = 4x^3 - 3x - 1$

1) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Viết pttt của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{x}{72} + 5$

Bài 25: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$

1) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

2) Viết pttt tại điểm có tung độ bằng –1/2

Chương II: PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LÔGARIT

§1 LŨY THỪA – MŨ – LÔGARIT

$a \in R, n \in N^*$	$a^n = a.a......a$ (n thừa số)
$a \neq 0$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$
Lưu ý: $0^0, 0^{-n}$ *không có nghĩa*	
$a > 0, r = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N, n \geq 2$	$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$	$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$
$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha.\beta}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$
$(ab)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha$	
Nếu: $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$	Nếu: $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

$\log_a b = \alpha \Leftrightarrow b = a^\alpha$	$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$
$\log b = \alpha \Leftrightarrow b = 10^\alpha$	$a^{\log_a b} = b$	$\log_a\left(a^\alpha\right) = \alpha$

$$\boxed{\ln b = \alpha \Leftrightarrow b = e^{\alpha}}$$

$0 < a \neq 1, b > 0, c > 0$. *Khi đó:*	
$\log_a b.c = \log_a b + \log_a c$	$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
$0 < a \neq 1, 0 < b, 0 < c \neq 1$. *Khi đó:*	
$\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b$	$\log_{a^{\alpha}} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$, $(\alpha \neq 0)$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $(b \neq 1)$

§2 PHƯƠNG TRÌNH MŨ – PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

I. Phương trình mũ cơ bản $\boxed{a^x = b \quad (a > 0; a \neq 1)}$

Nếu b > 0 thì phương trình có duy nhất một nghiệm $x = \log_a b$

Nếu b = 0 hoặc b < 0 thì phương trình vô nghiệm

Bài 1: giải các phương trình sau: a) $10^x = 1$ b) $2^x = 8$ c) $4^x = -4$ d) $e^x = 5$

e) $3^x = 2$ f) $3^x = \frac{1}{27}$ g) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 9$ h) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$

II. Một số cách giải phương trình mũ:

1. Đưa về cùng cơ số: $0 < a \neq 1$ $\boxed{a^{f(x)} = a^b \Leftrightarrow f(x) = b}$ $\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$

Bài 2: giải các phương trình sau: **a)** $5^{x^2-5x+6} = 1$ **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} = 3$ **c)** $4^{x^2-3x+2} = 16$

d) $2^{x-4} = \sqrt[3]{4}$ **e)** $(1{,}25)^{1-x} = (0{,}64)^{2(1+x)}$

Bài 3: giải các phương trình sau: **a)** $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1}$ **b).** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} = 2^{4-3x}$

c) $(0{,}75)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{5-x}$ **d)** $(0{,}5)^{2+3x} = \left(\sqrt{2}\right)^{-x}$ **e)** $2^{x^2-x+8} = 4^{1-3x}$ **f)** $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^{2x}$

g) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$ **h)** $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 16\sqrt{2}$

Bài 4: giải các phương trình sau:

a) $3^{x+1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750$ **b)** $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$ **c)** $5^{2x+1} - 3.5^{2x-1} = 550$

d) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$ **e)** $2.3^{x+1} - 6.3^{x-1} - 3^x = 9$ **f)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x-7}{6}} .4^{\frac{1}{x}} = 8^{\frac{1}{6x}}$

2. Đặt ẩn phụ:

*** Dạng 1: Phương trình** $A.a^{2x} + B.a^x + C = 0$

Cách giải: Đặt $t = a^x$**, điều kiện: t > 0**

Giải phương trình theo t: $At^2 + Bt + C = 0$, chọn t thỏa đk. Suy ra $a^x = t \Leftrightarrow x = \log_a t$

Bài 5: Giải các phương trình sau: **a)** $\frac{1}{5}.5^{2x} + 5.5^x = 250$ **b)** $2^{2x+2} - 9.2^x + 2 = 0$

c) $3^{2x+1} - 9.3^x + 6 = 0$ **d)** $2^{2x+6} + 2^{x+7} - 17 = 0$ **e)** $9^x - 2.3^x - 15 = 0$

f) $64^x - 8^x - 56 = 0$ **g)** $25^x - 6.5^x + 5 = 0$ **h)** $9^x - 24.3^{x-1} + 15 = 0$

i) $3^{4x+8}-4.3^{2x+5}+27=0$ **j)** $4^{\sqrt{x}}-36.2^{\sqrt{x-1}}+32=0$ **k)** $e^{6x}-3.e^{3x}=-2$

l) $4^{x}+2^{x+1}-8=0$ **m)** $2.16^{x}-15.4^{x}-8=0$ **n)**

*** Dạng 2: Phương trình có chứa a^x và a^{-x}, hoặc a^x và b^x với a.b =1. Đặt:** $t=a^x \Rightarrow a^{-x}=\frac{1}{t};b^x=\frac{1}{t}\quad t>0$

Bài 6: Giải các phương trình sau: **a)** $3^{x+1}+18.3^{-x}=29$ **b)** $3^{x+1}+3^{1-x}=10$

c) $5^{\sqrt{x}}-5^{1-\sqrt{x}}+4=0$ **d)** $e^{2x}-4.e^{-2x}=3$

e) $\left(4+\sqrt{15}\right)^{x}+\left(4-\sqrt{15}\right)^{x}=62$ **f)** $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}=4$

g) $\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^{x}+\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^{x}=12$ **h)** $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{x}=14$

i) $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{x}+\left(5-2\sqrt{6}\right)^{x}=10$ **j)** $\left(\frac{5}{2}\right)^{x}-2\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}+\frac{8}{5}=0$

k) $\left(4-\sqrt{15}\right)^{x}+\left(4+\sqrt{15}\right)^{x}=8$ **l)**

*** Dạng 3: Phương trình** $m.a^{2x}+n.a^{x}.b^{x}+p.b^{2x}=0$

Cách giải: *Chia 2 vế của phương trình cho một trong 3 số* $a^{2x};a^{x}.b^{x},b^{2x}$ *để đưa về dạng 1 hoặc 2*

Bài 7: Giải các phương trình sau **a)** $2.25^{x}-7.10^{x}+5.4^{x}=0$ **b)** $3.16^{x}+2.81^{x}=5.36^{x}$

c) $25^{x}+10^{x}=2^{2x+1}$ **d)** $4.9^{x}+12^{x}-3.16^{x}=0$ **e)** $3.4^{x}-2.6^{x}=9^{x}$ **f)** $2.4^{\frac{1}{x}}+6^{\frac{1}{x}}=9^{\frac{1}{x}}$

g) $3^{2x+4}+45.6^{x}-9.2^{2x+2}=0$ **h)** $3.25^{x}+2.49^{x}=5.35^{x}$ **i)** $3.8^{x}+4.12^{x}-18^{x}=2.27^{x}$

j) $27^{x}+12^{x}=2.8^{x}$ **k)** $6.9^{x}-13.6^{x}+6.4^{x}=0$ **l)**

3. Phương pháp logarit hóa

Sử dụng tính chất: Nếu $\alpha>0;\beta>0$ *và* $\alpha=\beta\Leftrightarrow\log_a\alpha=\log_a\beta;\quad 0<a\neq 1$

Thường sử dụng phương pháp này khi gặp phương trình có dạng: $\boxed{a^{f(x)}=b^{g(x)}}$

Lấy logarit cùng một cơ số để đưa ẩn thoát ra khỏi số mũ.

Bài 8: Giải các phương trình sau: **a)** $2^{x+1}.5^{x}=200$ **b)** $2^{x^2-4}=3^{x-2}$

c) $5^{x^2-5x+6}=2^{x-3}$ **d)** $3^{x-1}.2^{x^2}=8.4^{x-2}$ **e)** $5^{x}.\sqrt[x]{8^{x+1}}=100$

B. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

I. Phương trình logarit cơ bản: $0<a\neq 1$ $\boxed{\begin{array}{l}\log_a x=b\\ \Leftrightarrow\quad x=a^b\end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l}\log_a f(x)=b\\ \Leftrightarrow\quad f(x)=a^b\end{array}}$

Bài 9: Giải các phương trình: **a)** $\log_2 x=3$ **b)** $\log x=-1$ **c)** $\ln x=0$

d) $\log_2(x+5)=2$ **e)** $\log_3 x(x+2)=1$ **f)** $\log_2(x^2-x)=1$

II. Cách giải một số phương trình logarit

Khi giải phương trình logarit nói chung, ta cần đặt điều kiện để logarit xác định.

1. Đưa về cùng cơ số: $0<a\neq 1$ $\boxed{\log_a f(x)=\log_a g(x)}$ Đặt điều kiện: $\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với: f(x) = g(x)

Bài 10: Giải các phương trình: **a)** $\log_3(5x+3)=\log_3(7x+5)$ **b)** $\log(x^2-6x+7)=\log(x-3)$

c) $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$ **d)** $\log_2(x^2-3)-\log_2(6x-10)+1=0$

e) $2\log 2x=\log_2(x^2+75)$ **f)** $\log_2 x-\log_4(x-3)=2$

g) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x+\log_{16} x=\frac{-25}{12}$ **h)** $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$

i) $\log_3 x=\log_9(4x+5)+1/2$ **j)** $\log_4(x+3)-\log_4(x^2-1)=0$

k) $\log(x-1)-\log(2x-11)=\log 2$ **l)** $\log_2 x+\log_2(x-1)=1$

m) $\log_{\sqrt{2}} x + 4\log_4 x + \log_8 x = 13$

n) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$

o) $\log\dfrac{x+8}{x-1} = \log x$

p) $\dfrac{1}{2}\log\left(x^2 - 4x - 1\right) = \log(8x) - \log(4x)$

2. Đặt ẩn phụ:

Bài 11: Giải các phương trình:

a) $\log_4 x + \log_2(4x) = 5$ (TN 2006 – 2007)

b) $\log^2{}_3(x+1) - 5\log_3(x+1) + 6 = 0$

c) $\log_2^2(x+1) - 3\log_2(x+1)^2 + \log_2 32 = 0$

d) $\log^2{}_{\frac{1}{5}} x - 4\log_5 x - 5 = 0$

e) $3\log^2{}_3 x - 4\log_{\frac{1}{3}} x + 1 = 0$

f) $\dfrac{1}{4-\ln x} + \dfrac{2}{2+\ln x} = 1$

g) $\log^2{}_{\sqrt{2}} x + 3\log_2 x + \log_{1/2} x = 2$

h) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$

3. Mũ hóa:

---

§3 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

I. Baát Phöông trình muõ($0 < a \neq 1$)

* Chuù yù: -Haøm soá y=a^x ñoàng bieán khi a>1 vaø nghòch bieán khi 0<a<1
- Caùch giaûi phöông trình muõ vaãn coøn ñuùng cho vieäc giaûi bpt muõ

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \;\; neu\; a > 1 \\ f(x) < g(x) \;\; neu\; 0 < a < 1 \end{array}\right.$$

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > \log_a^b \;\; neu\; a > 1 \\ f(x) < \log_a^b \;\; neu\; a > 1 \end{array}\right.$$

Baøi 1: Giaûi caùc baát phöông trình

a) $16^{x-4} \geq 8$ b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+5} < 9$ c) $9^x \leq 3^{\frac{6}{x+2}}$

d) $4^{x^2-x+6} > 1$ e) $2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x^2-15x+4} < 2^{3x-4}$ f) $5^{2x} + 2 > 3.\ 5^x$

Baøi 2: Giaûi caùc baát phöông trình

a) $2^{2x+6} + 2^{x+7} > 17$ b) $5^{2x-3} - 2.5^{x-2} \leq 3$ c) $4^{\frac{1}{x}-1} > 2^{\frac{1}{x}-2} + 3$

d) $5.4^x + 2.25^x \leq 7.10^x$ e) $2.\ 16^x - 2^{4x} - 4^{2x-2} \leq 15$ f) $4^{x+1} - 16^x \geq 2\log_4 8$

g) $9.4^{-1/x} + 5.6^{-1/x} < 4.9^{-1/x}$

Baøi 3: Giaûi caùc baát phöông trình

a) $3^{x+1} > 5$ b) $(1/2)^{2x-3} \leq 3$ c) $5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$

Baøi 4: Giaûi caùc baát phöông trình

1. $5^{X^2-X+1} \leq 125$ 2. $7^{3x+6} > 1$ 3. $27^x \leq \dfrac{1}{3}$

4. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4} > 4$ 5. $(\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} > 9^{x-2}$ 6. $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{3x-7} \geq \left(\dfrac{7}{3}\right)^{7x-3}$

7. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2-2x} \leq \left(\dfrac{8}{7}\right)^{x-2}$ 8. $25^x - 4.5^x - 5 < 0$ 9. $9^{x^2-2x} - 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-x^2} \leq 3$

10. $4^x - 2^x - 2 < 0$ 11. $3.4^x - 2.6^x \leq 9^x$ 12. $3^x + 9.3^{-x} - 10 < 0$

13. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$ 14. $6^{2x+3} < 2^{x+7}.3^{3x-1}$

II. Baát Phöông trình logarit

* Chuù yù: -Haøm soá logarit ñoàng bieán khi a>1 vaø nghòch bieán khi 0<a<1
- Caùch giaûi phöông trình logaritõ vaãn coøn ñuùng cho vieäc giaûi bpt logaritõ

$$.\log_a^{f(x)} > \log_a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) > 0 \quad neu \quad a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \quad neu \; 0 < a < 1 \end{array}\right.$$

$$.\log_a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > a^b \quad neu \quad a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b \quad neu \; 0 < a < 1 \end{array}\right.$$

Baøi 1: Giaûi caùc baát phöông trình

a) $\log_4(x + 7) > \log_4(1 - x)$ b) $\log_2(x + 5) \le \log_2(3 - 2x) - 4$

c) $\log_2(x^2 - 4x - 5) < 4$ d) $\log_{1/2}(\log_3 x) \ge 0$

e) $2\log_8(x - 2) - \log_8(x - 3) > 2/3$ f) $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$

g) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{3x-1}{x+2} > 1$

Baøi 2: Giaûi caùc baát phöông trình

a) $\log^2{}_2 + \log_2 x \le 0$ b) $\log_{1/3} x > \log_x 3 - 5/2$

c) $\log_2 x + \log_{2x} 8 \le 4$ d) $\dfrac{1}{1-\log x} + \dfrac{1}{\log x} > 1$

e) $\log_x 2.\log_{x/16} 2 > \dfrac{1}{\log_2 x - 6}$ f) $\log_4(3^x - 1).\log_{\frac{1}{4}}(\dfrac{3^x - 1}{16}) \le \dfrac{3}{4}$

Baøi 3. Giaûi caùc baát phöông trình

a) $\log_3(x + 2) \ge 2 - x$ b) $\log_5(2^x + 1) < 5 - 2x$

c) $\log_2(5 - x) > x + 1$ d) $\log_2(2^x + 1) + \log_3(4^x + 2) \le 2$

Chương III: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

§1 NGUYÊN HÀM

A. BẢNG NGUYÊN HÀM:

1. $\int 0dx = C$	$\int xdx = \dfrac{x^2}{2} + C$
2. $\int dx = \int 1dx = x + C$	$\int kdx = kx + C$
3. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \; (\alpha \ne -1)$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \dfrac{1}{a}.\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
4. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{1}{ax+b}dx = \dfrac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert + C$
5. $\int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x} + C$	$\int \dfrac{1}{(ax+b)^2}dx = -\dfrac{1}{a}.\dfrac{1}{ax+b} + C$
6. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = 2.\dfrac{1}{a}.\sqrt{ax+b} + C$
7. $\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b}dx = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + C$
8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \; (a > 0, a \ne 1)$	$\int a^{kx+b}dx = \dfrac{1}{k}.\dfrac{a^{kx+b}}{\ln a} + C \; (a > 0, a \ne 1)$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}.\sin(ax+b)+C$
10. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}.\cos(ax+b)+C$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$
12. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int (1+\cot^2 x)dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$

B. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM:

1. Phương pháp đưa về các nguyên hàm cơ bản:

Biểu diễn hàm số dưới dạng: $f(x) = af_1(x) + bf_2(x) + ...$

Trong đó ta đã biết nguyên hàm của các hàm số $f_1(x),\ f_2(x),...$ là $F_1(x),\ F_2(x),...$

Vậy $F(x) = aF_1(x), + bF_2(x) + ... + C$

2. Phương pháp đổi biến số:

* **Phương pháp:** Tính: $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = I$

+ Đặt $t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x)dx$ ***(lấy đạo hàm 2 vế)***

+ $I = \int f(t)dt$ ***(thế vào)***

3. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần:

* **Phương pháp:** Tính: $\int P(x)Q(x)dx = I$

+ Đặt: $\begin{cases} u = P(x) \Rightarrow du = P'(x)dx \\ dv = Q(x)dx \Rightarrow v = F(x) \end{cases}$ với F(x) là 1 nguyên hàm của Q(x)

+ $I = uv - \int vdu$

* **Nhớ:**

+ Thứ tự ưu tiên khi đặt u: lốc, đa, lũy, mũ, lượng.

+ Khi P(x) là 1 đa thức chứa x

. Nếu Q(x) là sinx hoặc cosx hoặc e^x thì đặt u = P(x), dv = Q(x)dx

. Nếu Q(x) là lnx thì đặt u = Q(x), dv = P(x)dx

C. BÀI TẬP:

Bài 1: CM hàm số F(x) là nguyên hàm của hàm số f(x):

* **Phương pháp:**

+ Tìm tập xác định D của hàm số F(x) và f(x)

+ CM: F'(x) = f(x) $\forall x \in D$

1/ CMR F(x) = 2x + sin2x là 1 nguyên hàm của hàm số f(x) = $4\cos^2 x$

* **Hướng dẫn:**

+ Tập xác định của F(x) và f(x) là □

+ F'(x) = 2 + 2cox2x = 2(1 + cos2x) = $2.2\cos^2 x = 4\cos^2 x$ = f(x)

+ Vậy F(x) là 1 nguyên hàm của f(x)

2/ CMR F(x) = 4sinx+ (4x + 5)e^x + 1 là 1 nguyên hàm của hàm số f(x) = 4cosx + (4x + 9)e^x

Bài 2: Tìm nguyên hàm F(x) của hàm số f(x) thỏa điều kiện cho trước là F(a) = b:

* **Phương pháp:**

+ Tìm F(x) = P(x) + C (*)

+ Thay F(a) = b vào (*) từ đó tìm C

+ Kết luận F(x) = ?

1/ Tìm nguyên hàm F(x) của hàm số $y = f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ biết $F(1) = \frac{1}{3}$

* Hướng dẫn:

+ Biến đổi: $y = f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+3x-1}{x^2+2x+1} = x+1-\dfrac{2}{(x+1)^2}$

+ $F(x) = \int f(x)dx = \int\left(x+1-\dfrac{2}{(x+1)^2}\right)dx = \dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{2}{x+1}+C$

+ Ta có: $F(1) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1^2}{2}+1+\dfrac{2}{1+1}+C = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow C = -\dfrac{13}{6}$

+ Vậy: $F(x) = \dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{13}{6}$

2/ Tìm nguyên hàm F(x) của hàm số y = f(x) = 2x + 1 biết F(1) = 2

3/ Tìm nguyên hàm F(x) của hàm số y = f(x) = $x-\dfrac{1}{x^2}+2$ biết F(1) = 2

4/ Tìm nguyên hàm F(x) của hàm số y = f(x) = $4x^3 - 3x^2 + 2$ biết F(–1) = 3

Bài 3: Tìm:

1/ $\int e^{3-2x}dx$ 2/ $\int \tan^2 xdx$ 3/ $\int \sin^2\dfrac{x}{2}dx$

4/ $\int \cos^2 xdx$ 5/ $\int \dfrac{2x^2-3x+4}{x+1}dx$ 6/ $\int e^x\left(e^x-1\right)dx$

7/ $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x.\sin^2 x}dx$ 8/ $\int \dfrac{2^x-1}{e^x}dx$ 9/ $\int \dfrac{1}{\cos^2 x.\sin^2 x}dx$

10/ $\int \sin 5x\cos 3xdx$ 11/ $\int \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$ 12/ $\int \dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}dx$

13/ $\int \dfrac{1}{(1+x)(1-2x)}dx$ 14/ $\int \dfrac{5x-5}{(x+2)(x-3)}dx$ 15/ $\int \dfrac{1}{\cos^2 x.\sin^2 x}dx$

Bài 4: Sử dụng phương pháp đổi biến số, tính:

* **Phương pháp:** Tính: $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = I$

+ Đặt $t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x)dx$ ***(lấy đạo hàm 2 vế)***

+ $I = \int f(t)dt$ ***(thế vào)***

1/ $\int (1-x)^9 dx$ 2/ $\int x\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx$ 3/ $\int \cos^3 x\sin xdx$

4/ $\int \dfrac{1}{e^x+e^{-x}+2}dx$ 5/ $\int xe^{-x^2}dx$ 6/ $\int \cos x\sin^3 xdx$

7/ $\int x(3-x)^5 dx$ 8/ $\int \sin^3 x\cos^4 xdx$ 9/ $\int \dfrac{x}{x^2+1}dx$

10/ $\int x\sqrt{x^2+1}dx$ 11/ $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx$ (x > –1) 12/ $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x}dx$

13/ $\int \cos^3 x\sin xdx$ 14/ $\int \sqrt{x^2+1}.xdx$ 15/ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2x-1}}$

16/ $\int (2x^2+1)^7 xdx$ 17/ $\int (x^3+5)^4 x^2dx$ 18/ $\int_0^1 \dfrac{x}{x^2+5}dx$

19/ 20/ 21/

Bài 5: Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, tính:

* **Phương pháp:** Tính: $\int P(x)Q(x)dx = I$

+ Đặt: $\begin{cases} u = P(x) \Rightarrow du = P'(x)dx \\ dv = Q(x)dx \Rightarrow v = F(x) \end{cases}$ với F(x) là 1 nguyên hàm của Q(x)

+ $I = uv - \int vdu$

* **Nhớ:**

+ Thứ tự ưu tiên khi đặt u: lốc, đa, lũy, mũ, lượng.
+ Khi P(x) là 1 đa thức chứa x
   . Nếu Q(x) là sinx hoặc cosx hoặc e^x thì đặt u = P(x), dv = Q(x)dx
   . Nếu Q(x) là lnx thì đặt u = Q(x), dv = P(x)dx

1/ $\int x\ln x dx$ 2/ $\int (x^2+2x-1)e^x dx$ 3/ $\int x\sin(2x+1)dx$

4/ $\int (1-x)\cos x dx$ 5/ $\int x\ln(1-x)dx$ 6/ $\int x\sin^2 x dx$

7/ $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$ 8/ $\int x.\sin x dx$ 9/ $\int x\cos x dx$

10/ $\int x\sin 2x dx$ 11/ $\int x.\cos 2x dx$ 12/ $\int \ln x dx$

---

§2 TÍCH PHÂN

I. DẠNG 1: Tính tích phân dựa vào định nghĩa và các tính chất của tích phân:

**** Phương pháp: biến đổi hàm số dưới dấu tích phân về dạng tổng, hiệu các hàm số có nguyên hàm:*** $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Bài 1: Tính các tích phân:

1/ $\int_0^1 x^2(x-1)^2 dx$ 2/ $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\cos^2 x} - 3\sin 2x\right)dx$ 3/ $\int_1^e \left(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + x^2\right)dx$

4/ $\int_0^1 (t^3 + t\sqrt{t})dt$ 5/ $\int_1^2 \frac{x^2-2x}{x^3}dx$ 6/ $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

7/ $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$ 8/ $\int_{-1}^0 e^{2x+3}dx$ 8'/ $\int_0^1 (1+3x)^{\frac{3}{2}}dx$ 9/ $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x+1}+1}{e^x}dx$

10/ $\int_1^4 \left(t + \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}\right)dt$ 11/ $\int_{-1}^3 (x^3+1)dx$ 12/ $\int_{-2}^2 x(x-3)dx$

13/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x - \sin x)dx$ 14/ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ 15/ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

Bài 2: Tính các tích phân: (tích phân chứa giá trị tuyệt đối)

1/ I = $\int_1^3 |x-2|dx$ 2/ $\int_1^3 |x^2-3x+2|dx$ 3/ $\int_{-2}^1 |x^2-x-2|dx$

4/ $\int_{-2}^3 |1-x|dx$ 5/ $\int_0^2 |x^2-4x+3|dx$ 6/

Bài 3: Tính các tích phân:

**** Tích phân hàm hữu tỉ dạng bậc tử lớn hơn hay bằng bậc mẫu: chia tử cho mẫu tách thành tổng của 1 phân nguyên và 1 phân số rồi tính***

1/ $\int_{-2}^1 \frac{2x^2+5x-1}{x-3}dx$ 2/ $\int_2^4 \frac{2x-1}{1-x}dx$ 3/ $\int_1^{e^2} \frac{7x-2\sqrt{x}-5}{x}dx$

4/ $\int_0^1 \frac{x^2-2x-3}{2-x}dx$ 5/ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3-1}{x^2-1}dx$ 6/ $\int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{x+3}dx$

7/ $\int_2^3 \frac{x+2}{x-1}dx$ 8/ $\int_0^2 \left(\frac{3x-1}{x+2} - x - 1\right)dx$ 9/ $\int_4^5 \frac{2x^2-x+5}{x-3}dx$

Bài 4: Tính các tích phân:

*** Dạng** $\int_a^b \frac{P(x)}{(x+a)(x+b)}dx$

Phân tích: $\frac{P(x)}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} = \frac{A(x+a)+B(x+b)}{(x+a)(x+b)}$

$\Rightarrow P(x) = A(x+a)+B(x+b)$ (*)

Cho x = nghiệm mẫu: $x=-a,\ x=-b$. Thay vào (*) tìm A, B

*** Dạng** $\int_a^b \frac{P(x)}{(x+a)^n}dx$: phân tích $\frac{P(x)}{(x+a)^n} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{(x+a)^2} + ... + \frac{C}{(x+a)^n}$

*** Dạng** $\int_a^b \frac{P(x)}{(x+a)(x+b)^2}dx$: phân tích $\frac{P(x)}{(x+a)(x+b)^2} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{(x+b)^2}$

1/ $\int_{-1}^{0} \frac{4x-3}{(x-1)(x-5)}dx$ 2/ $\int_3^4 \frac{x-3}{x^2-3x+2}dx$ 3/ $\int_1^2 \frac{5x-5}{(x+2)(x-3)}dx$

4/ $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx$ 5/ $\int_3^5 \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$ 6/ $\int_{-2}^0 \frac{4}{(x-1)(x+3)}dx$

7/ $\int_4^5 \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$ 8/ $\int_1^2 \frac{1}{x(x-4)}dx$ 9/

Bài 5: *Tính các tích phân: (hàm lượng giác: hạ bậc, tích thành tổng,...)*

1/ $\int_0^{\pi} \sin 2x\cos 3x dx$ 2/ $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2 x.\cos^2 x.dx$ 3/ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 2x.dx$

4/ $\int_{-\pi}^{\pi} (2\sin x - 3\cos x)dx$ 5/ $\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos 2x}dx$ 6/ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 7x\sin 2x dx$

7/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ 8/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}\cos x dx$ 9/ $\int_0^{\pi} \sin 2x\cos^2 x dx$

10/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\cos x dx$ 11/ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3-\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$ 12/ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x.\cos 5x dx$

13/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\cos^5 x dx$ 14/ $\int_0^{\pi} \sin x.\cos 3x dx$ 15/ $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \cos 3x\cos 5x dx$

II. DẠNG 2: Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến:

A. Đổi biến dạng 1:

* Tính: $\int_a^b f(x)dx = I$

\+ Bước 1: Đặt $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)dt$

\+ Bước 2: đổi cận: $x = a \Rightarrow u(t) = a \Rightarrow t = \alpha$
$x = b \Rightarrow u(t) = b \Rightarrow t = \beta$

\+ Bước 3: thay vào $I = \int_\alpha^\beta f[u(t)].u'(t)dt$

Chú ý: Khi gặp tích phân mà biểu thức dưới dấu tích phân có dạng:

$a^2 - x^2$ thì đặt x = asint   t$\in$ $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$a^2 + x^2$ thì đặt x = atant $t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

$x^2 - a^2$ thì đặt x = $\frac{a}{\sin t}$ $t \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$

Áp dụng: Tính các tích phân sau:

1/ $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$ 2/ $\int_0^3 \frac{1}{9+x^2}dx$ 3/ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

4/ $\int_0^2 \frac{1}{x^2+12}dx$ 5/ $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$ 6/ $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

7/ $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ 8/ $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3+x^2}dx$ 9/ $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-4x^2}dx$

B. Đổi biến dạng 2:

* Tính: $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = I$

\+ Bước 1: đổi biến: đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

\+ Bước 2: đổi cận: $x = a \Rightarrow t = \alpha$
$x = b \Rightarrow t = \beta$

\+ Bước 3: thay vào $I = \int_\alpha^\beta f(t)dt$

Bài 1: Tính các tích phân:

1/ $\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx$ 2/ $\int_0^1 e^{-x^2+2}xdx$ 3/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^2 xdx$

4/ $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}.\ln x}{x}dx$ 5/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 x+1\right)\cos xdx$ 6/ $\int_{\sqrt{e}}^e \frac{dx}{x\ln^5 x}$

7/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xdx}{1+3\cos x}$ 8/ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{\sin^3 x}$ 9/ $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$

10/ $\int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$ 11/ $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$ 12/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{1+\sin x}$

13/ $\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+3}dx$ 14/ $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ 15/ $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

16/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\sin xdx$ 17/ $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan 4xdx$ 16/ $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$

19/ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin xdx$ 20/ $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ 21/ $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx$

22/ $\int_0^1 x^3\left(x^4+1\right)^4 dx$ 23/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 xcoxdx$ 24/ $\int_0^1 x(x^2+3)^5 dx$

25/ $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$ 26/ $\int_1^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ 27/ $\int_{-1}^1 x^2(1-x^3)^4 dx$

28/ $\int_0^1 \frac{x}{x^2+8}dx$ 29/ $\int_0^1 xe^{3x}dx$ 30/ $\int_1^e \frac{e^{\ln x}dx}{x}$

31/ $\int_0^1 xe^{x^2+2}dx$ 32/ $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x+1}$ 33/ $\int_1^2 x\sqrt{x^2+3}dx$

34/ $\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+3}dx$ 35/ $\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}dx$ 36/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{1+2\sin x}\cos xdx$

37/ $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$ 38/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos xdx$ 39/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^3 xdx$

40/ $\int_{e^{-1}}^1 \frac{\sqrt{1+\ln x}dx}{x}$ 41/ $\int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x-1}$ 42/ $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$

Bài 2: Tính các tích phân:

1/ $\int_{\frac{1}{2}}^5 x\sqrt{2x-1}dx$ 2/ $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}.dx$ 3/ $\int_0^3 \frac{x^2}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}dx$

4/ $\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx$ 5/ $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$ 6/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 xdx}{1+\cos x}$

7/ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^2 xdx$ 8/ $\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$ 9/ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^3 xdx$

10/ $\int_0^1 x\sqrt[3]{1-x}dx$ 11/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx$ 12/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 xdx$

13/ $\int_0^1 x(1-x)^5 dx$ 14/ $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$ 15/ $\int_0^1 \frac{e^x(1+x)}{1+xe^x}dx$

II. DẠNG 3: Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần:

* Tính : $\int_a^b udv = I$

\+ Bước 1: đặt $\begin{array}{l} u = u(x) \Rightarrow du = u'(x)dx \\ dv = v'(x)dx \Rightarrow v = v(x) \end{array}$

\+ Bước 2: thay vào công thức: $I = uv\big|_a^b - \int_a^b vdu$

Lưu ý: *thứ tự ưu tiên khi đặt u: lốc, đa, lũy, mũ, lượng. Không đặt u là hàm lượng giác*

Áp dụng: Tính các tích phân:

1/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin xdx$ 2/ $\int_1^e x^2\ln xdx$ 3/ $\int_0^1 (x+3)e^x dx$

4/ $\int_0^1 \ln(1+x)dx$ 5/ $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$ 6/ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x)\sin 3xdx$

7/ $\int_0^1 (x^2+1)e^{2x}dx$ 8/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$ 9/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos xdx$

10/ $\int_1^e (1-x^2)\ln xdx$ 11/ $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$ 12/ $\int_2^5 2x\ln(x-1)dx$

13/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$ 14/ $\int_0^1 xe^{3x} dx$ 15/ $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$

16/ $\int_0^1 (4x+1)e^x dx$ 17/ $\int_0^1 (x^2+1).e^x dx$ 18/ $\int_0^{\pi} (2x+1)\cos x dx$

19/ $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$ 20/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x+1).\sin x.dx$ 21/

---

§3 ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

1/ <u>Daïng toaùn1:</u> Dieän tích hình phaúng giôùi haïn bôûi 1 ñöôøng cong vaø 3 ñöôøng thaúng.

<u>Coâng thöùc:</u>

Cho haøm soá y=f(x) lieân tuïc treân ñoaïn [a;b] khi ñoù dieän tích hình phaúng giôùi haïn bôûi ñöôøng cong (C) :y=f(x) vaø caùc ñöôøng thaúng x= a; x=b; y= 0 laø : $S = \int_a^b |f(x)| dx$

2/ <u>Daïng toaùn2:</u> Dieän tích hình phaúng giôùi haïn bôûi 2 ñöôøng cong vaø 2 ñöôøng thaúng.

<u>Coâng thöùc:</u>

Cho haøm soá y=f(x) coù ñoà thò (C) vaø y=g(x) coù ñoà thò (C') lieân tuïc treân ñoaïn [a;b] khi ñoù dieän tích hình phaúng giôùi haïn bôûi ñöôøng cong (C), (C') vaø caùc ñöôøng thaúng x= a; x=b laø :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

<u>Phöông phaùp giaûi toaùn:</u>

B1: Laäp phöông trình hoaønh ñoä giao ñieåm giöõa (C) vaø (C')

B2: Tính dieän tích hình phaúng caàn tìm:

<u>TH1:</u>

Neáu phöông trình hoaønh ñoä giao ñieåm voâ nghieäm trong (a;b). Khi ñoù dieän tích hình phaúng caàn tìm laø: $S = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$

<u>TH2</u>:

Neáu phöông trình hoaønh ñoä giao ñieåm coù 1 nghieäm laø $x_1 \in (a;b)$. Khi ñoù dieän tích hình phaúng caàn tìm laø:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^{x_1} [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_{x_1}^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

<u>TH3</u>:

Neáu phöông trình hoaønh ñoä giao ñieåm coù caùc nghieäm laø x_1; $x_2 \in (a;b)$. Khi ñoù dieän tích hình phaúng caàn tìm laø:

$$S = \left| \int_a^{x_1} [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_1} [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_b^{x_2} [f(x) - g(x)] dx \right|$$

<u>Chuù yù:</u> * Neáu phöông trình hoaønh ñoä giao ñieåm coù nhieàu hôn 2 nghieäm laøm töông töï tröôøng hôïp 3.

* Daïng toaùn 1 laø tröôøng hôïp ñaëc bieät cuûa daïng toaùn 2 khi ñöôøng cong g(x)=0

<u>Ví duï 1ï:</u>

Tính dieän tích hình phaúng giôùi haïn bôûi ñoà thò cuûa haøm soá y = sinx treân ñoaïn [0;2 π] vaø truïc hoaønh .

Giaûi :

Ta coù :sinx = 0 coù 1 nghieäm x= $\pi \in (0;2\pi)$ vaäy dieän tích hình phaúng caàn tìm laø:

$$S = \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = \left|\int_0^{\pi} \sin x dx\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx\right| = \left|\cos x|_0^{\pi}\right| + \left|\cos x|_{\pi}^{2\pi}\right| = 4$$

Ví duï 2:

Tính dieän tích hình phaúng giôùi haïn bôûi (P_1): y = x^2 –2 x , vaø (P_2) y= x^2 + 1 vaø caùc ñöôøng thaúng x = -1 ; x =2 .

Giaûi

phhñgñ : x^2 –2 x = x^2 + 1 Ü 2x +1= 0 Ü x = -1/2 . Do ñoù :

$$S = \int_{-1}^{2} |(x^2 - 2x) - (x^2+1)|dx = \left|\int_{-1}^{-1/2} [(x^2 - 2x) - (x^2+1)]dx\right| + \left|\int_{-1/2}^{2} [(x^2 - 2x) - (x^2+1)]dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{-1/2} (2x+1)dx\right| + \left|\int_{-1/2}^{2} (2x+1)dx\right| = \left|(x^2+x)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}}\right| + \left|(x^2+x)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{2}\right| = \frac{1}{4} + \frac{25}{4} = \frac{13}{2}$$

Ví duï 3:

Tính dieän tích hình phaúng giôùi haïn bôûi (P): y^2 = 4 x vaø ñöôøng thaúng (d): 2x+y-4 = 0.

Giaûi: Ta coù (P): y^2 = 4 x ⇔ $x = \frac{y^2}{4}$ vaø (d): 2x+y-4 = 0 ⇔ $x = \frac{4-y}{2}$.

Phöông trình tung ñoä giao ñieåm cuûa (P) vaø ñöôøng thaúng (d) laø: $\frac{y^2}{4} = \frac{4-y}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-4 \end{array}\right.$

Vaäy dieän tích hình phaúng caàn tìm laø:

$$S = \int_{-4}^{2} \left(\frac{4-y}{2} - \frac{y^2}{4}\right)dy = \int_{-4}^{2} \left(2 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}\right)dy = \left(2y - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12}\right)\Big|_{-4}^{2} = 9$$

Baøi taäp:

Bài 1:

1/ Tính dieän tích hình phaúng giôùi haïn giöõa ñöôøng cong (P): y= x^2 - 2x vaø truïc 0x.

2/ Tính dieän tích hình phaúng giôùi haïn bôûi ñöôøng cong (H): $y = \frac{x+1}{x}$ vaø caùc ñöôøng thaúng coù phöông trình x=1, x=2 vaø y=0

3/ Tính dieän tích hình phaúng giôùi haïn giöõa ñöôøng cong (C): y= x^4 - 4x^2+5 vaø ñöôøng thaúng (d): y=5.

4/ Tính dieän tích hình phaúng giôùi haïn bôûi (C): y = x^3 –3 x , vaø y = x .

Bài 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

1/ $y = x^2 - 2x,\ x = -1,\ x = 2$ **trục hoành Ox** **2/** $y = -x^2 - 4x,\ x = -1,\ x = -3$ **trục hoành Ox**

3/ $y = 1 - x^2; y = 0$ **4/** $y = x^2 - 2x, y = -x^2 + 4x$ **5/** $y = -x^2 + 2x$ và $y = -3x$

6/ $f(x) = x^2 - x - 4$ và $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2x$ **7/** $y = 2x^2 - 2x,\ y = x^2 + 3x - 6,\ x = 0,\ x = 4$

8/ $y = x^2 + 3x - 4, y = 0, x = -1, x = 3$ **9/** $y = x^3 - 5x^2 + 4x, y = 0, x = -1, x = 3$

10/ $y = x^2 + x - 5, y = -x^2 + 3x + 7$ **11/** $y = x^3 + 1,\ Ox,\ Oy,\ x = 1$

2/ Daïng toaùn 3: Theå tích cuûa moät vaät theå troøn xoay

Theå tích cuûa vaät theå troøn xoay sinh ra khi hình phaúng giôùi haïn bôûi ñöôøng cong (C) coù phöông trình y= f(x) vaø caùc ñöôøng thaúng x= a, x=b , y= 0 quay moät voøng xung quanh truïc ox laø:

$$V = \Pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Ví duï 1: Tính theå tích khoái caàu sinh ra do quay hình troøn coù taâm O baùn kính R quay xung quanh truïc ox taïo ra.

Giaûi: Ñöôøng troøn taâm O baùn kính R coù phöông trình :x^2 + y^2 = R^2 ⇒ y^2= R^2-x^2

Theå tích khoái caàu laø : $V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(2R^3 - \frac{2R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$ (ñvtt)

<u>Ví duï 2:</u> Tính theå tích cuûa vaät theå troøn xoay, sinh ra bôûi moãi hình phaúng giôùi haïn bôûi caùc ñöôøng sau khi noù quay xung quanh truïc Ox: x = –1 ; x = 2 ; y = 0 ; y = x²–2x

<u>Giaûi:</u> Theå tích cuûa vaät theå troøn xoay caàn tìm laø : $S=\pi\int_{-1}^{2}(x^2-2x)^2dx=\pi\int_{-1}^{2}(x^4-4x^3+4x^2)dx$ =

$\pi(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3)\Big|_{-1}^{2}=\frac{18\pi}{5}$ (ñvtt)

<u>Baøi taäp</u>: Tính theå tích cuûa vaät theå troøn xoay, sinh ra bôûi moãi hình phaúng giôùi haïn bôûi caùc ñöôøng sau khi noù quay xung quanh truïc Ox:

a/ y = cosx ; y = 0 ; x = 0 ; x = $\frac{\pi}{4}$

b/ y = sin²x ; y = 0 ; x = 0 ; x = π

c/ y = $xe^{\frac{x}{2}}$; y = 0 ; x = 0 ; x = 1

d/ $y=-x^2-4x,\ x=-1,\ x=-3$ **trục hoành Ox**

e/ $y=2x-x^2; y=0$

Chương IV: SỐ PHỨC

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa số phức

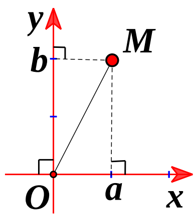
- Số phức z là một biểu thức có dạng z=a+bi, trong đó a và b là các số thực, i là một số thỏa mãn $i^2=-1$.
  - a là phần thực.
  - b là phần ảo.
  - i là đơn vị ảo.
- Tập hợp các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.
- **Đặt biệt:**
  - Số phức z = a + 0i có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết z = a.
  - Số phức z = 0 + bi có phần thực bằng 0 được gọi là số thuần ảo (số ảo) và viết z = bi.
  - Số phức z = 0 + 0i vừa là số thực vừa là số ảo.

2. Số phức bằng nhau.

- Hai số phức z = a + bi và z' = a' + b'i bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.
  - $z=z' \Leftrightarrow a+bi=a'+b'i \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$

3. Biểu diễn hình học của số phức.

- Số phức z = a + bi được biểu diễn bởi điểm M(a;b) trong mặt phẳng Oxy.



4. Mô đun số phức.

- Môđun số phức z = a+bi là số thực không âm kí hiệu $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

5. Số phức liên hợp.

- Số phức liên hợp của số phức z = a + bi là số phức $\bar{z}=a-bi$.

6. Cộng, trừ, nhân và chia số phức.

- **Cộng, trừ, nhân 2 số phức:** ***như đa thức.***

- **Chia 2 số phức:** ***nhân tử và mẫu cho số phức liên hợp của mẫu.***
- Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$.
    - Cộng hai số phức: $(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$.
    - Trừ hai số phức: $(a+bi)-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i$.
    - Nhân hai số phức: $(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$.
    - Chia hai số phức: $\dfrac{a+bi}{a'+b'i}=\dfrac{(a+bi)(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)}=\dfrac{aa'-bb'}{a'^2-b'^2}+\dfrac{ab'+a'b}{a'^2-b'^2}i$.

7. Căn bậc hai của số thực âm.

- Căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.

8. Phương trình bậc hai với hệ số thực.

- Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ với $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
- $\Delta = b^2 - 4ac$
- $\Delta < 0$: phương trình có hai nghiệm phức: $x_{1,2}=\dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm kép: $x = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm thực: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\Delta}{2a}$.

n* Bấm máy: mode 5 3 hoặc

Mode 2 $D = B^2 - 4AC : X = \dfrac{-B+\sqrt{D}}{2A}$ **CALC**

9. Phương trình trùng phương:

- Dạng: $ax^4+bx^2+c=0$; $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
- Giải: bấm: mode 5 3, nghiệm: x^2

II. Các dạng bài tập.

Bài 1: Xác định phần thực và phần ảo của số phức

1. $z = (1+\sqrt{2}) - \sqrt{3}i$ 2. $z = 1+2i-3i^2+4i^3-5i^4$

Giải

1. Số phức $z=(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}i$ có phần thực là $z = 1+\sqrt{2}$ phần vào là $\sqrt{3}$
2. $z=1+2i-3i^2+4i^3-5i^4=4+2i-4i-5=-1-2i$
  Vậy số phức z có phần thực là -1, phần ảo là -2.

Bài 2: Cho hai số phức $z = 2+3i$, $z' = 3-4i$.

1. Xác định phần thực và phần ảo của số phức z+z'.
2. Xác định phần thực và phần ảo của số phức $z-2z'$.
3. Xác định phần thực và phần ảo của số phức 2z.z'.

 Xác định phần thực và phần ảo của số phức $\dfrac{z}{z'}$.

Giải

1. Ta có: $z+z'=2+3i+3-4i=5-i$.
   Số phức z+z' có phần thực là 5, phần ảo là -1.
2. Ta có: $z-2z'=2+3i-2(3-4i)=-4+11i$.
   Số phức z+z' có phần thực là -4, phần ảo là 11.

3. Ta có $2z.z' = 2(2+3i)(3-4i) = 36+2i$

Số phức 2z.z' có phần thực là 36, phần ảo là 2.

4. Tacó $\frac{z}{z'} = \frac{2+3i}{3-4i} = \frac{(2+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-6+17i}{25} = \frac{-6}{25} + \frac{17}{25}i$

Số phức $\frac{z}{z'}$ có phần thực $-\frac{6}{25}$ và phần ảo là $\frac{17}{25}$.

Bài 3: Xác định phần ảo của số phức

1. $z = (1+2i)^2 + (1-3i)i + 2$ 2. $z = (1-i)^2(2+3i) + i(1-2i)$

Giải:

1. $z = (1+2i)^2 + (1-3i)i + 2 = -3+4i+i+3+2 = 2+5i$

Vậy số phức z có phần ảo là 5.

2. **Ta có** $z = (1-i)^2(2+3i) + i(1-2i)$

$z = (-2i)(2+3i) + 2 + i$

$z = 6 - 4i + 2 + i$

$z = 8 - 3i$

Vậy số phức z có phần ảo là -3.

Bài 4: Xác định phần thực và phần ảo của số phức z biết $\bar{z} = \frac{4+2i}{1+i}$

Ta có $\bar{z} = \frac{4+2i}{1+i} = \frac{(4+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{6-2i}{3} = 3-i$

$\Rightarrow z = 3+i$

Vậy số phức z có phần thực là 3 phần ảo -1.

Bài 5: Xác định phần ảo của số phức z biết $\bar{z} = (\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}i)$

Ta có $\bar{z} = (\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}i)$

$\bar{z} = (1+2\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)$

$\bar{z} = 5+\sqrt{2}i \Rightarrow z = 5-\sqrt{2}i$

Vậy số phức z có phần ảo là $-\sqrt{2}$.

Bài 6: Cho số phức $z = 1+(1+mi)+(1+mi)^2$. Xác định số thực m để z là số thuần ảo.

Ta có $z = 1+(1+mi)+(1+mi)^2$

$z = 1+1+mi+1+2mi+m^2i^2$

$z = (3-m^2)+3mi$

Để z là số thuần ảo $\Leftrightarrow 3-m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\sqrt{3} \\ m=-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy với $m=\sqrt{3},\ \ m=-\sqrt{3}$ thì z là số thuần ảo.

Bài 7: Xác định phần thực, phần ảo, mô đun, số phức liên hợp của các số phức:

1. $z=(8-6i)-(2-3i)$
2. $z=(1-2i)(2+4i)-(3i+1)$
3. $z-(3-4i)=(2-3i)^2$
4. $(1-i)^2 z=3-4i$
5. $z=\dfrac{2-3i}{1+i}$
6. $z=\dfrac{(2-i)^2}{1-i}$

Bài 8: Xác định phần thực và phần ảo của số phức z, biết:

1. $\bar{z}=(2-2i)^2(1-3i)$
2. $\bar{z}=\dfrac{1}{1+i}-(3i+1)$
3. $i\bar{z}-(3-4i)=2+4i$

Bài 9: Xác định môđun và tìm số phức liên hợp của số phức z, biết:

1. $z=4+3i$
2. $z=8-6i$

Giải

1. $|z|=\sqrt{4^2+3^2}=5,\ \bar{z}=4+3i$
2. $|z|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10,\ \bar{z}=8+6i$

Bài 10: Cho hai số phức $z=2+3i,\ z'=4-11i$. Xác định môđun số phức z + z'.

Ta có: $z+z'=2+3i+4-11i=6-8i$.

Số phức $z+z'=6-8i$ có môđun là $|z+z'|=|6-8i|=\sqrt{6^2+(-8)^2}=\sqrt{100}=10$.

Bài 11: Cho hai số phức $\bar{z}=\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$. Xác định môđun số phức $\bar{z}+iz$.

Ta có: $\bar{z}=\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}=\dfrac{-8}{1-i}=\dfrac{-8(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{-8-8i}{2}=-4-4i$

$\Rightarrow z=-4+4i$

$\Rightarrow \bar{z}+iz=-4-4i+i(-4+4i)=-4-4i-4i+4i^2=-8-8i$

Vậy môđun số phức $\bar{z}+iz$ là $|\bar{z}+iz|=|-8-8i|=\sqrt{(-8)^2+(-8)^2}=8\sqrt{2}$.

Bài tập luyện tập

Bài 12: Tìm phần thực, phần ảo, môđun, số phức liên hợp của các số phức:

1. $z=(1+2i)2i-3i^2+2$
2. $z=\dfrac{(2-3i)i}{1-i}$
3. $z=(1-2i)(2+i)i-(3i+1)3i$
4. $z-2i^3=(1-i)^2 2i$
5. $z=i+(2-4i)(3+2i)$
6. $z=(-1+i)^3-(2i)^3$
7. $z=\dfrac{2}{1-i}+(1+i)^2$
8. $(3-2i)^2+\dfrac{4-5i}{2+i}$

Bài 13: Giải các phương trình sau trên tập số phức

1. $iz=3-7i$
2. $iz+4+5i=i(6+3i)$
3. $(1-i)z+(2-i)=4-5i$

Bài giải

1. $iz=3-7i$

Ta có $iz=3-7i \Leftrightarrow z=\dfrac{3-7i}{i}=\dfrac{(3-7i)(-i)}{i.(-i)}=\dfrac{7-3i}{1}=7-3i$

2. $iz + 4 + 5i = i(6 + 3i)$

$\Leftrightarrow iz = -3 + 6i - 4 - 5i$

$\Leftrightarrow iz = -7 + i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-7+i}{i} = \dfrac{(-7+i)i}{i^2} = 1 + 7i$

3. $(1-i)z + (2-i) = 4 - 5i$

$\Leftrightarrow (1-i)z = -(2-i) + 4 - 5i$

$\Leftrightarrow (1-i)z = 2 - 4i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2-4i}{1-i} = \dfrac{(2-4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{6-2i}{2} = 3 - i$

Bài 14: Giải các phương trình sau $x^2 - 2x + 5 = 0$ trên tập số phức.

Ta có a = 1, b = −2, c = 5.

Tính $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.5 = 4 - 20 = -16$

Phương trình có hai nghiệm phức $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 + 2i \\ x_2 = 1 - 2i \end{array}\right.$

Bài 15: Giải các phương trình sau $z^2 - 6z + 10 = 0$ trên tập số phức.

Ta có a =1, b= −6, c =10.

Tính $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.1.10 = 36 - 40 = -4$

Phương trình có hai nghiệm phức $\left[\begin{array}{l} z_1 = 3 + i \\ z_2 = 3 - i \end{array}\right.$

Bài 16: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

Ta có a = 1, b = −2, c =10.

Tính $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.10 = 4 - 40 = -36$

Phương trình có hai nghiệm phức $\left[\begin{array}{l} z_1 = 1 + 3i \\ z_2 = 1 - 3i \end{array}\right.$

Ta có $|z_1| = \sqrt{10}$, $|z_2| = \sqrt{10}$.

Vậy $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 10 + 10 = 20$.

Bài 17: Giải các phương trình sau $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$ trên tập số phức.

$$z^4 + 3z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 1 \\ z^2 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 1 \\ z = \pm 2i \end{array}\right.$$

Bài 18: Giải các phương trình sau $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ trên tập số phức.

$$x^4 + 10x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = -1 \\ x^2 = -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm i \\ x = \pm 3i \end{array}\right.$$

Bài 19: Giải các phương trình sau trên tập số phức:

1. $z=(1-3i)-(2-3i)(1-i)$
2. $z=(1-2i)3i-(3i+1)(1+i)$
3. $iz-(2-4i)=(4-i)^2$
4. $(1-i)^2z-(2-i)i=3-4i$
5. $(1-i)z-(2-i)=(1-i)(2-i)$
6. $(2-i)z-(1-i)=(1-i)^2(2-i)$
7. $(1+3i)z-(2+5i)=(2+i)z$
8. $\dfrac{z}{4-3i}+2-3i=5-2i$
9. $(1+3i)z-(2+5i)=(2+i)$
10. $(3-2i)z+(6-4i)=5-i$

Bài 20: Giải các phương trình sau trên tập số phức:

1. $z^2+z+10=0$
2. $-z^2+2z-5=0$
3. $-z^2+z-3=0$
4. $x^2-3x+7=0$
5. $3x^2-x+2=0$
6. $3x^2+x+2=0$

Bài 21: Giải các phương trình sau trên tập số phức:

1. $x^4+5x^2+4=0$
2. $x^4+17x^2+16=0$
3. $-z^4-3z^2+4=0$
4. $\mathbf{z^4-8z^2-9=0}$
5. $z^4-5z^2-6=0$
6. $z^4+7z^2-8=0$

Bài 22: Tìm caùc soá thöïc x vaø y bieát:

a. $(2x+3)+(y+2)i=x-(y-4)i$

b. $(2-x)-i\sqrt{2}=\sqrt{3}+(3-y)i$

c. $(3x-2)+(2y+1)i=(x+1)-(y-5)i$

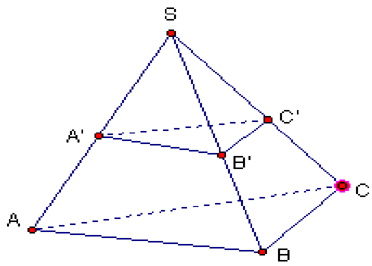
d. $(2x+y)+(y+2)i=(x+2)-(y-4)i$

Phần 2: HÌNH HỌC

Chương I, II

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC:

1. **Các công thức về khối đa diện**



a) Thể tích khối chóp $V=\dfrac{1}{3}Bh$

b) Thể tích khối lăng trụ $V=Bh$

Chú ý: có thể sử dụng công thức sau đây khi giải toán $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA'}{SA}\cdot\dfrac{SB'}{SB}\cdot\dfrac{SC'}{SC}$

c) Diện tích xung quanh: S_{xq}= tổng diện tích các mặt bên

d) Diện tích toàn phần: $S_{tpchóp}=S_{xq}+S_{đáy}$; $S_{tplgtrụ}=S_{xq}+2S_{đáy}$

2. **Các công thức về khối tròn xoay, mặt tròn xoay**.

a) Thể tích khối nón tròn xoay $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$

b) Thể tích khối trụ tròn xoay $V=\pi r^2h=\pi r^2l$

c) Thể tích khối cầu $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

d) Diện tích xung quanh của mặt nón, mặt trụ, mặt cầu lần lượt là

$$S_{nãn}=\pi rl;\quad S_{trô}=2\pi rl,\quad S_{m/c}=4\pi R^2$$

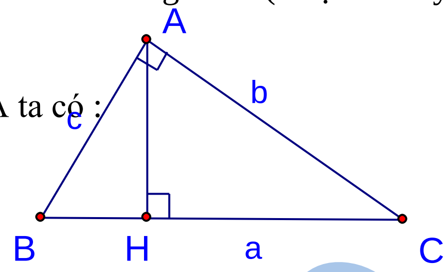
Chú ý:

1/ Đường chéo của hình vuông cạnh a là $a\sqrt{2}$. Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $a\sqrt{3}$. Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, 2/ Tam giác đều cạnh a: đường cao là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, diện tích là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

3/ Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều, các cạnh bên đều bằng nhau (hoặc có đáy là đa giác đều, hình chiếu của đỉnh trùng với tâm của đáy).

4/ Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

5/ Hệ thức lượng trong tam giác vuông : cho ΔABC vuông ở A ta có :



a) Định lý Pitago : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) $BA^2 = BH.BC;\ CA^2 = CH.CB$

c) AB. AC = BC. AH

d) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

e) $\sin B = \frac{b}{a},\ \cos B = \frac{c}{a},\ \tan B = \frac{b}{c}, \cot B = \frac{c}{b}$

f) b= a. sinB = a.cosC, c = a. sinC = a.cosB, a= $\frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos C}$, b= c. tanB = c.cot C

+Trong một tam giác vuông mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân sin góc đối hay cos góc kề. Cạnh huyền bằng cạnh góc vuông chia sin góc đối hay cos góc kề.

+Trong một tam giác vuông cạnh góc vuông này bằng cạnh góc vuông kia nhân tang góc đối hay cotang góc kề.

6/ Hệ thức lượng trong tam giác thường:

*Định lý hàm số Côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

*Định lý hàm số Sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

7/Các công thức tính diện tích.

a/ Công thức tính diện tích tam giác:

$S = \frac{1}{2} a \times h_a = \frac{1}{2} a.b \sin C = \frac{a.b.c}{4R} = p.r = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)}$ trong đó $p = \frac{a+b+c}{2}$

Đặc biệt : ΔABC vuông ở A : $S = \frac{1}{2} AB.AC$, ΔABC đều cạnh a: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b/ Diện tích hình vuông : S= cạnh x cạnh

c/ Diện tích hình chữ nhật : S= dài x rộng

d/ Diện tích hình thang : $S = \frac{1}{2}$(đáy lớn + đáy nhỏ) x chiều cao

e/ Diện tích hình bình hành : S= đáy x chiều cao

f/ Diện tích hình tròn : $S = \pi.R^2$

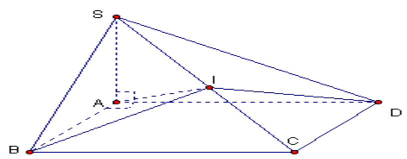
B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài tập1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = a và SA vuông góc với đáy.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD

b) Chứng minh trung điểm I của cạnh SC là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài giải:



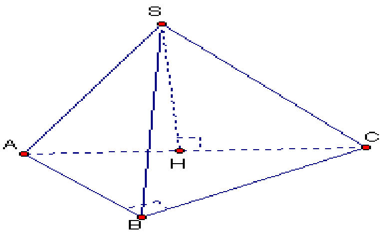
a) Áp dụng công thức $V = \frac{1}{3}Bh$ trong đó B = a^2, h = SA = a $\Rightarrow V = \frac{1}{3}a^3$ (đvtt)

b) Trong tam giác vuông SAC, có AI là trung tuyến ứng với cạnh huyền SC nên AI = IS = IC.(1)

BC ⊥ AB và BC ⊥ SA ⇒ BC ⊥ SB ⇒ Δ SBC vuông tại B, IB là trung tuyến ứng với cạnh huyền SC nên IB = IS = IC (2).

Tương tự ta cũng có ID = IS = IC(3). Từ (1), (2), (3) ta có I cách đều tất cả các đỉnh hình chóp nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Bài tập2. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại B, $AB = a,\ BC = a\sqrt{3}$. Tam giác SAC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp S.ABC.



Giải:

Trong mp(SAC), dựng SH ⊥ AC tại H ⇒ SH ⊥ (ABC).

$V = \frac{1}{3}B.h$, trong đó B là diện tích ΔABC, h = SH.

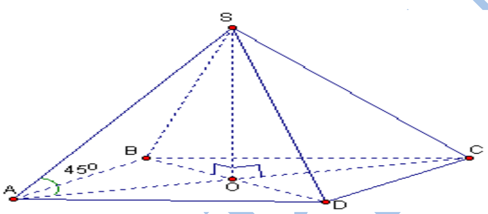
$B = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Trong tam giác đều SAC có AC = 2a ⇒ $SH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Vậy $V = \frac{a^3}{2}$ (đvtt)

Bài tập3. Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc SAC bằng 45°.

a) Tính thể tích khối chóp .

b) Tính diện tích xung quanh của mặt nón ngoại tiếp hình chóp S.ABCD



Giải:

a) Gọi O là tâm của hình vuông ABCD ⇒ SO ⊥ (ABCD).

$V = \frac{1}{3}B.h,\ B = a^2;\ h = SO = OA.\tan 45^0 = a\frac{\sqrt{2}}{2}.\ \Rightarrow\ V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ (đvtt)

b) Áp dụng công thức $S_{xq} = \pi.r.l$ trong đó r = OA, l =SA= a.

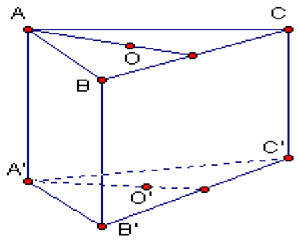
Thay vào công thức ta được: $S_{xq} = \pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}a = \pi\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ (đvdt)

Bài tập4: Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a.

a) Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

b) Tính diện tích của mặt trụ tròn xoay ngoại tiếp hình trụ

Giải:



a) Ta có $V = B.h$, trong đó B là diện tích đáy của lăng trụ, h là chiều cao lăng trụ .

Vì tam giác ABC đều, có cạnh bằng a nên $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. h = AA’ = a $\Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ (đvtt)

b) Diện tích xung quanh mặt trụ được tính theo công thức $S_{xq} = 2\pi.r.l$

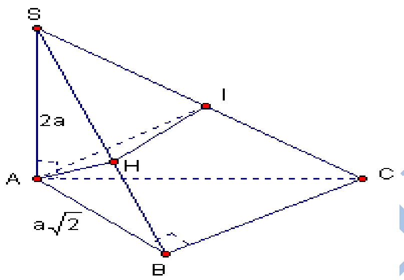
r là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC $\Rightarrow r = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, l =AA’ =a nên diện tích cần tìm là $S_{xq} = 2\pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.a = 2\pi\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ (đvdt)

__Bài tập5:__ Cho hình chóp S.ABC có SA = 2a và SA ⊥(ABC). Tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = a\sqrt{2}$

a) Tính thể tích khối chóp S.ABC

b) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

c) Gọi I và H lần lượt là trung điểm SC và SB. Tính thể tích khối chóp S.AIH



Giải:

a)
$$V = \frac{1}{3}B.h$$
$$B = S_{\#ABC} = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = a^2, h = SA = 2a \Rightarrow V = \frac{2a^3}{3}$$

b) Gọi I là trung điểm SC

SA ⊥AC nên A thuộc mặt cầu đường kính SC

BC ⊥ SA và BC ⊥ Ab nên BC ⊥ SB ⇒ B thuộc mặt cầu đường kính SC. Như vậy tâm mặt cầu là trung điểm I của SC còn bán kính mặt cầu là $R = \frac{SC}{2}$. Ta có

$$AC = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a$$
$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow R = a\sqrt{2}$$

c) Áp dụng công thức $\frac{V_{S.AIH}}{V_{S.ACB}} = \frac{SI}{SC}.\frac{SH}{SB} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AIH} = \frac{1}{4}.V_{S.ACB} = \frac{a^3}{6}$

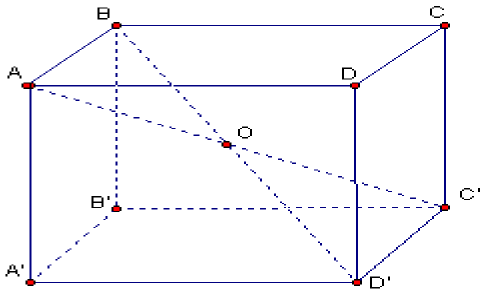
__Bài tập6:__ Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ cạnh a.

a) Tính thể tích khối lập phương

b) Tính bán kính mặt cầu qua 8 đỉnh của lập phương

c) Chứng minh hai khối chóp B’.ABD’ và D.C’D’B có bằng nhau

Giải:



a) V = a^3 (đvtt)

b) Gọi O là điểm đồng quy của 4 đường chéo AC', DB', A'C, BD' $\Rightarrow$ O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lập phương.

Bán kính mặt cầu là $R = \frac{AC'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Hai khối chóp trên là ảnh của nhau qua phép đối xứng mặt phẳng (ABC'D') $\Rightarrow$ đpcm

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI:

1) Cho hình chóp đều S.ABCD cạnh đáy bằng a, góc SAC bằng 60^0.

a) Tính thể tích khối chóp.

b) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp

2) Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh a, SA bằng a và SA vuông góc đáy.

a) Tính thể tích khối chóp.

b) Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

c) Quay tam giác vuông SAC quanh đường thẳng chứa cạnh SA, tính diện tích xung quanh của khối nón tạo ra

3) Cho hình nón có đường cao bằng 12cm, bán kính đáy bằng 16cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón đó

b) Tính thể tích của khối nón đó

4) Cho hình chóp đều S.ABC cạnh đáy a, mặt bên hợp đáy một góc 60^0 .

a) Tính thể tích khối chóp S.ABC.

b) Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

5) Cho tứ diện OABC có OA = OB = OC =a và đôi một $\perp$ nhau. Gọi H là trực tâm tam giác ABC

a) Chứng minh OH $\perp$ (ABC)

b) Tính thể tích khối tứ diện

6) Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a*, cạnh bên bằng 2*a*. Gọi *I* là trung điểm của *BC*.

a. Chứng minh *SA* vuông góc với *BC*.

b. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* và *S.ABI* theo *a*. ĐS: b. $V_{S.ABI} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{11}}{24}$

7) Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác vuông tại *B*, *SA* vuông góc với đáy. Biết *AB*=*a*, $BC = a\sqrt{3}$, *SA*=3*a*.

a. Tính thể tích khối chóp *S.ABC*.

b. Gọi *I* là trung điểm của *SC*. Tính độ dài đoạn *BI* theo *a* . ĐS : a. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$, b. $BI = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

8) Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác vuông tại *B*, *SA* vuông góc với đáy. Biết *SA*=*AB*=*BC*=*a*. Tính thể tích khối chóp *S.ABC*.

ĐS: $V_{S.ABC}=\dfrac{a^3}{6}$

9) Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a* có *SA* vuông góc với đáy và *SA*=*AC*. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD*. ĐS: $V_{S.ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

10) Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a* có *SA* vuông góc với đáy cạnh $SB=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD*. ĐS: $V_{S.ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

11) Cho hình nón tròn xoay có đường cao *h*=*a*, bán kính đáy *r*=1,5*a*. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón đã cho theo *a*. ĐS: $S_{xq}=\dfrac{3\pi a^2\sqrt{13}}{4}$, $V=\dfrac{3\pi a^3}{4}$

12) Cho hình hộp chữ nhật *ABCD.A'B'C'D'* có *AA'*=*a*, *AB*=*b*, *AD*=*c*. Gọi (*S*) là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp. Tính thể tích khối cầu. ĐS: $V=\dfrac{\pi}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

13) Cho lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A* và *AC*=*a*, góc $ACB=60^0$. Đường chéo *BC'* của mặt bên tạo với mặt phẳng (*AA'C'C*) một góc 30^0.

a. Tính độ dài đoạn *AC'*.

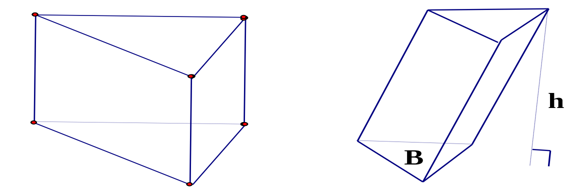
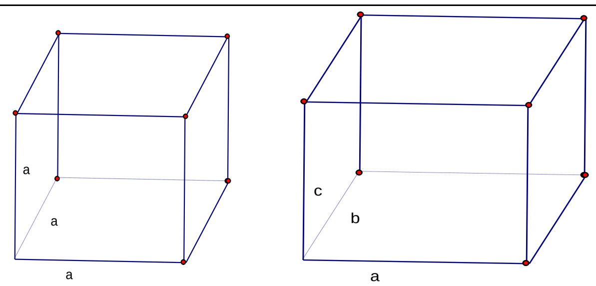
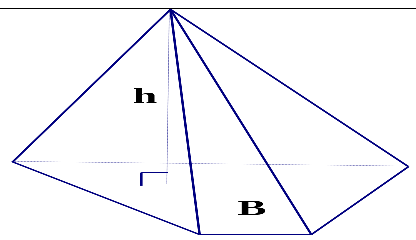
b. Tính thể tích khối lăng trụ. ĐS: a. *AC'*=3*a*; b. $V=\sqrt{6}a^3$

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

ÔN TẬP KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 12

A. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

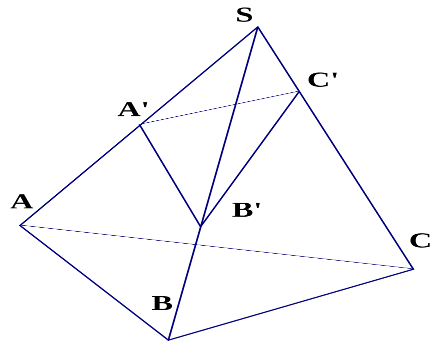
I/ Các công thức thể tích của khối đa diện:

1. ***THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ***: $\boxed{V = B.h}$ với $\begin{cases} \text{B : dieä tích ñaùy} \\ \text{h : chieà cao} \end{cases}$	
a) ***Thể tích khối hộp chữ nhật***: $\boxed{V = a.b.c}$ với a,b,c là ba kích thước b) ***Thể tích khối lập phương***: $\boxed{V = a^3}$ với a là độ dài cạnh	
2. ***THỂ TÍCH KHỐI CHÓP***: $\boxed{V=\frac{1}{3}Bh}$ với $\begin{cases} \text{B : dieä tích ñaùy} \\ \text{h : chieà cao} \end{cases}$	

3. ***TỈ SỐ THỂ TÍCH TỨ DIỆN***:

Cho khối tứ diện SABC và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có:

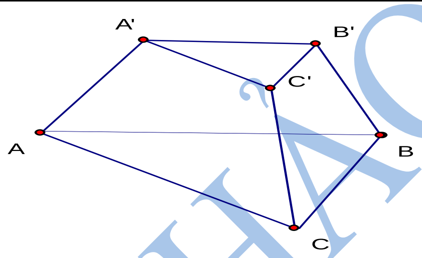
$$\boxed{\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}\frac{SB}{SB'}\frac{SC}{SC'}}$$



4. ***THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CỤT***:

$$\boxed{V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)}$$

với $\begin{cases} B,\ B' : \text{dieä tích hai ñaùy} \\ h : \text{chieà cao} \end{cases}$

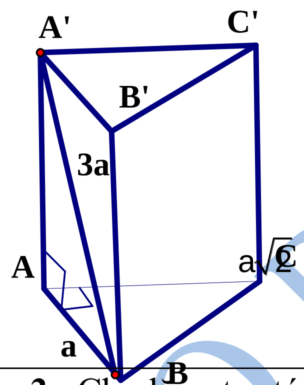


II/ Bài tập:

LOẠI 1: **THỂ TÍCH LĂNG TRỤ**

1) Dạng 1: ***Khối lăng trụ đứng có chiều cao hay cạnh đáy***

Ví dụ 1: Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh BC = $a\sqrt{2}$ và biết A'B = 3a. Tính thể tích khối lăng trụ.



Lời giải:

Ta có

$\triangle$ABC vuông cân tại A nên AB = AC = a

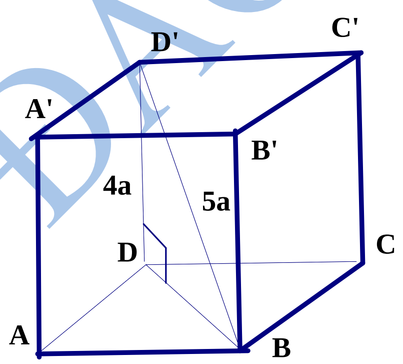
ABC A'B'C' là lăng trụ đứng $\Rightarrow AA' \perp AB$

$\triangle AA'B \Rightarrow AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 8a^2$

$\Rightarrow AA' = 2a\sqrt{2}$

Vậy V = B.h = S_{ABC} .AA' = $a^3\sqrt{2}$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có cạnh bên bằng 4a và đường chéo 5a. Tính thể tích khối lăng trụ này.



Lời giải:

ABCD A'B'C'D' là lăng trụ đứng nên

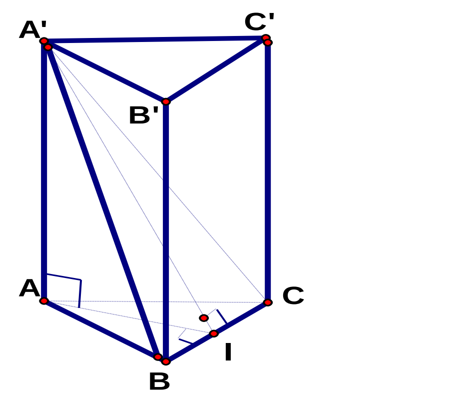
$BD^2 = BD'^2 - DD'^2 = 9a^2 \Rightarrow BD = 3a$

ABCD là hình vuông $\Rightarrow AB = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$

Suy ra B = S_{ABCD} = $\dfrac{9a^2}{4}$

Vậy V = B.h = S_{ABCD}.AA' = $18a^3$

Ví dụ 3: Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác đều cạnh a = 4 và biết diện tích tam giác A'BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.



Lời giải:

Gọi I là trung điểm BC .Ta có $\triangle$ ABC đều nên

$$AI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \;\&\; AI \perp BC$$

$$\Rightarrow A'I \perp BC\,(dl3\perp)$$

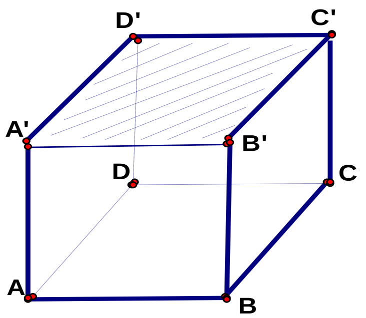
$$S_{A'BC} = \frac{1}{2}BC.A'I \Rightarrow A'I = \frac{2S_{A'BC}}{BC} = 4$$

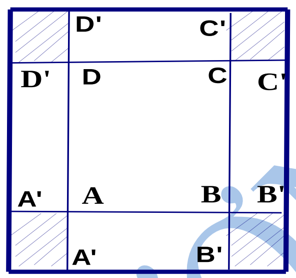
$$AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AI.$$

$$\triangle A'AI \Rightarrow AA' = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = 2$$

Vậy : $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = 8\sqrt{3}$

Ví dụ 4: Một tấm bìa hình vuông có cạnh 44 cm, người ta cắt bỏ đi ở mỗi góc tấm bìa một hình vuông cạnh 12 cm rồi gấp lại thành một cái hộp chữ nhật không có nắp. Tính thể tích cái hộp này.





Giải

Theo đề bài, ta có

AA' = BB' = CC' = DD' = 12 cm nên

ABCD là hình vuông có

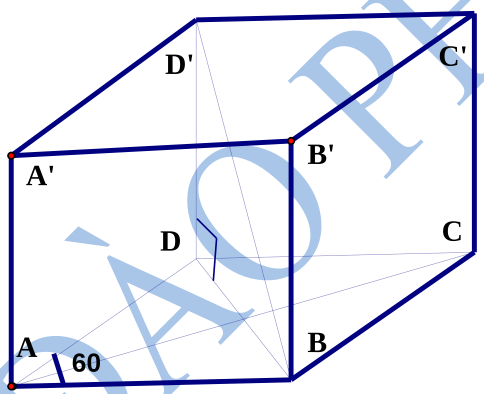
AB = 44 cm - 24 cm = 20 cm

và chiều cao hộp h = 12 cm

Vậy thể tích hộp là

$V = S_{ABCD}.h = 4800cm^3$

Ví dụ 5: Cho hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a và có góc nhọn bằng 60^0 Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của lăng trụ. Tính thể tích hình hộp .



Lời giải:

Ta có tam giác ABD đều nên : BD = a

và $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

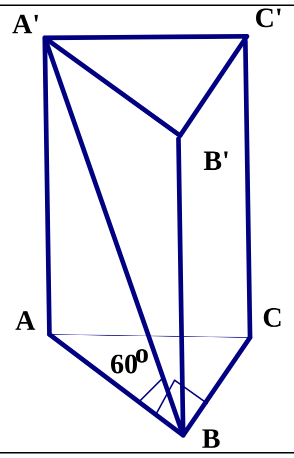
Theo đề bài $BD' = AC = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$$\triangle DD'B \Rightarrow DD' = \sqrt{BD'^2 - BD^2} = a\sqrt{2}$$

Vậy $V = S_{ABCD}.DD' = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

2)<u>Dạng 2</u>: *Lăng trụ đứng có góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.*

<u>Ví dụ 1:</u> Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với BA = BC = a ,biết A'B hợp với đáy ABC một góc 60^0 . Tính thể tích lăng trụ.



<u>Lời giải:</u>

Ta có $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp AB \,\&\, AB$ là hình chiếu của A'B trên đáy ABC .

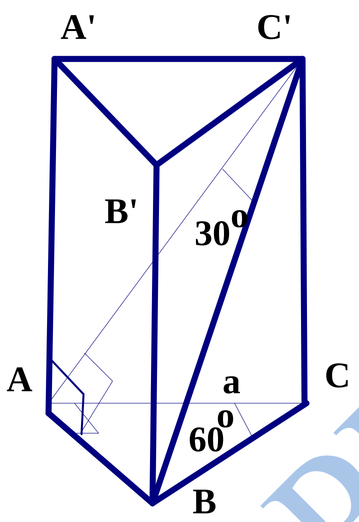
Vậy góc$[A'B,(ABC)] = ABA' = 60^o$

□$ABA' \Rightarrow AA' = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{a^2}{2}$

Vậy V = $S_{ABC}.AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

<u>Ví dụ 2:</u> Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A với AC = a , $ACB = 60^o$ biết AC' hợp với (AA'C'C) 1 góc 30^0. Tính AC' và thể tích lăng trụ.



<u>Lời giải</u>: □$ABC \Rightarrow AB = AC.\tan 60^o = a\sqrt{3}$.

Ta có:

$AB \perp AC; AB \perp AA' \Rightarrow AB \perp (AA'C'C)$

nên AC' là hình chiếu của BC' trên (AA'C'C).

Vậy góc[AC';(AA"C"C)] = $AC'B = 30^o$

□$AC'B \Rightarrow AC' = \frac{AB}{\tan 30^o} = 3a$

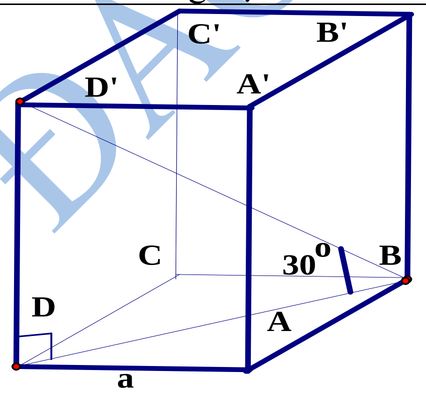
V =B.h = $S_{ABC}.AA'$

□$AA'C' \Rightarrow AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = 2a\sqrt{2}$

□ABC là nửa tam giác đều nên $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Vậy V = $a^3\sqrt{6}$

<u>Ví dụ 3:</u> Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và đường chéo BD' của lăng trụ hợp với đáy ABCD một góc 30^0. Tính thể tích và tổng diên tích của các mặt bên của lăng trụ .



<u>Giải:</u>

Ta có ABCD A'B'C'D' là lăng trụ đứng nên ta có:

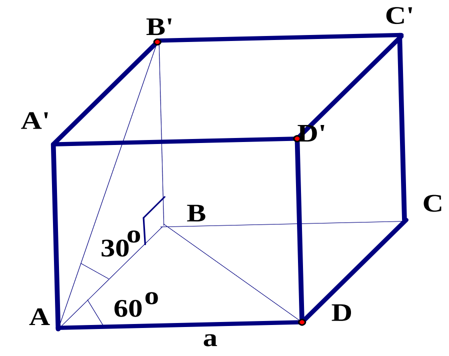
$DD' \perp (ABCD) \Rightarrow DD' \perp BD$ và BD là hình chiếu của BD' trên ABCD .

Vậy góc [BD';(ABCD)] = $DBD' = 30^0$

□$BDD' \Rightarrow DD' = BD.\tan 30^0 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy V = $S_{ABCD}.DD' = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ S = $4S_{ADD'A'} = \frac{4a^2\sqrt{6}}{3}$

<u>Ví dụ 4:</u> Cho hình hộp đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $BAD = 60^o$ biết AB' hợp với đáy (ABCD) một góc 30^o . Tính thể tích của hình hộp.



Giải

ΔABD đều cạnh a $\Rightarrow S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

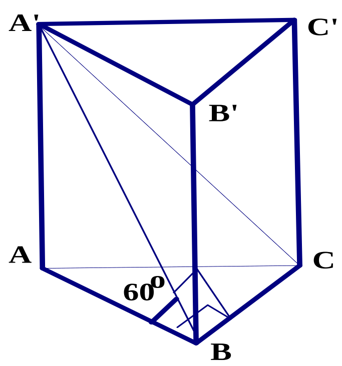
$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\Delta ABB'$ vuông tại B $\Rightarrow BB' = AB\tan 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V = B.h = S_{ABCD}.BB' = \dfrac{a^3}{2}$

3) <u>Dạng 3</u>: ***Lăng trụ đứng có góc giữa 2 mặt phẳng***

<u>Ví dụ 1:</u> Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với BA = BC = a ,biết (A'BC) hợp với đáy (ABC) một góc 60^0 .Tính thể tích lăng trụ.



<u>Lời giải</u>:

Ta có $A'A \perp (ABC) \& BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$

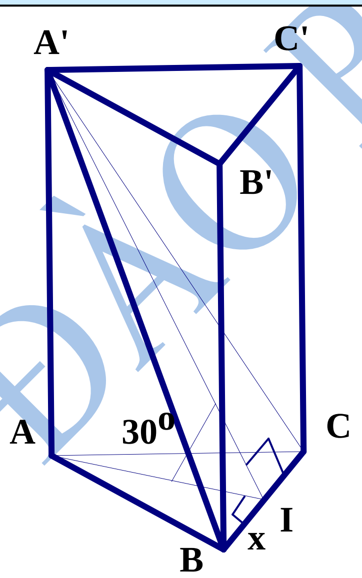
Vậy góc$[(A'BC),(ABC)] = ABA' = 60^o$

$\Delta ABA' \Rightarrow AA' = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BA.BC = \dfrac{a^2}{2}$

Vậy $V = S_{ABC}.AA' = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

<u>Ví dụ 2:</u> Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác đều . Mặt (A'BC) tạo với đáy một góc 30^0 và diện tích tam giác A'BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.



Giải: ΔABC đều $\Rightarrow AI \perp BC$ mà $AA' \perp (ABC)$ nên $A'I \perp BC$ (đl 3$\perp$).

Vậy góc$[(A'BC);)ABC)] = A'IA = 30^o$

Giả sử BI = x $\Rightarrow AI = \dfrac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$.Ta có

$\Delta A'AI : A'I = AI : \cos 30^0 = \dfrac{2AI}{\sqrt{3}} = \dfrac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2x$

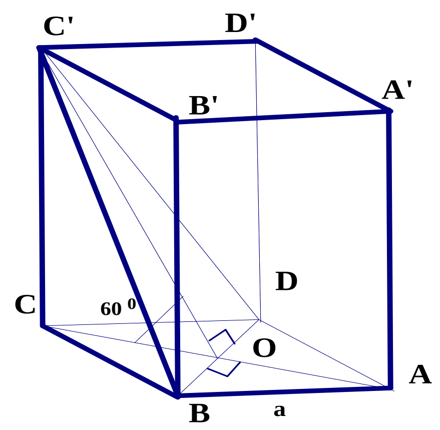
$A'A = AI.\tan 30^0 = x\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = x$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = CI.AI.A'A = x^3\sqrt{3}$

Mà $S_{A'BC} = BI.A'I = x.2x = 8 \Rightarrow x = 2$

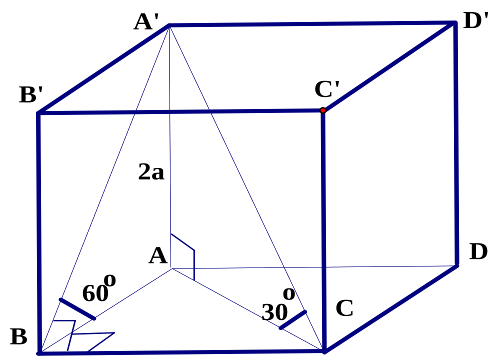
Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = 8\sqrt{3}$

<u>Ví dụ 3:</u> Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD A'B'C'D' có cạnh đáy a và mặt phẳng (BDC') hợp với đáy (ABCD) một góc 60°.Tính thể tích khối hộp chữ nhật.



Gọi O là tâm của ABCD . Ta có
ABCD là hình vuông nên $OC \perp BD$
$CC' \perp (ABCD)$ nên $OC' \perp BD$ (đl 3⊥). Vậy
góc[(BDC');(ABCD)] = $\widehat{COC'} = 60^o$
Ta có V = B.h = S_{ABCD}.CC'
ABCD là hình vuông nên $S_{ABCD} = a^2$
$\Delta OCC'$ vuông nên $CC' = OC.\tan 60^o = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$
Vậy $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$

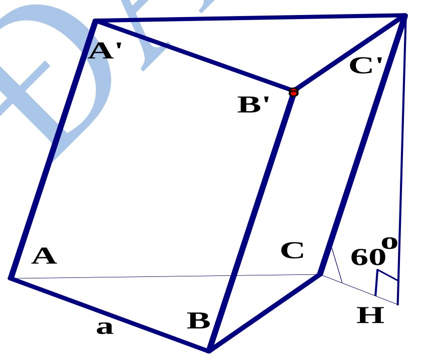
Ví dụ 4: Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có AA' = 2a ; mặt phẳng (A'BC) hợp với đáy (ABCD) một góc 60^o và A'C hợp với đáy (ABCD) một góc 30^o .Tính thể tích khối hộp chữ nhật.



Ta có $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow$ AC là hình chiếu của A'C trên (ABCD) .
Vậy góc[A'C,(ABCD)] = $\widehat{A'CA} = 30^o$
$BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$ (đl 3⊥) .
Vậy góc[(A'BC),(ABCD)] = $\widehat{A'BA} = 60^o$
$\Delta A'AC \Rightarrow AC = AA'.\cot 30^o = 2a\sqrt{3}$
$\Delta A'AB \Rightarrow AB = AA'.\cot 60^o = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$
$\Delta ABC \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$
Vậy $V = AB.BC.AA' = \dfrac{16a^3\sqrt{2}}{3}$

4) Dạng 4: ***Khối lăng trụ xiên***

Ví dụ 1: Cho lăng trụ xiên tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , biết cạnh bên là $a\sqrt{3}$ và hợp với đáy ABC một góc 60^o .
Tính thể tích lăng trụ.

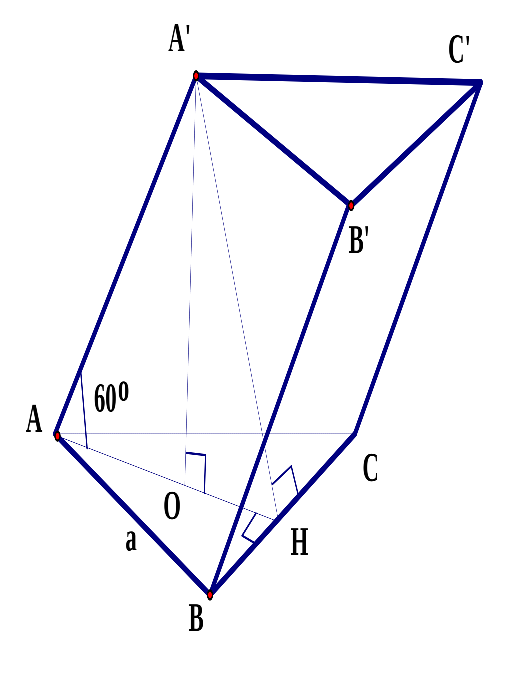


Lời giải:
Ta có $C'H \perp (ABC) \Rightarrow CH$ là hình chiếu của CC' trên (ABC)
Vậy góc$[CC',(ABC)] = \widehat{C'CH} = 60^o$
$\Delta CHC' \Rightarrow C'H = CC'.\sin 60^0 = \dfrac{3a}{2}$
$S_{ABC} = = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .Vậy $V = S_{ABC}.C'H = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ xiên tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết AA' hợp với đáy ABC một góc 60 .

1) Chứng minh rằng BB'C'C là hình chữ nhật.

2) Tính thể tích lăng trụ .



Lời giải:

1) Ta có $A'O \perp (ABC) \Rightarrow OA$ là hình chiếu của AA' trên (ABC)

Vậy góc$[AA',(ABC)] = OAA' = 60^o$

Ta có BB'CC' là hình bình hành (vì mặt bên của lăng trụ)

$AO \perp BC$ tại trung điểm H của BC nên $BC \perp A'H$(đl 3 $\perp$)

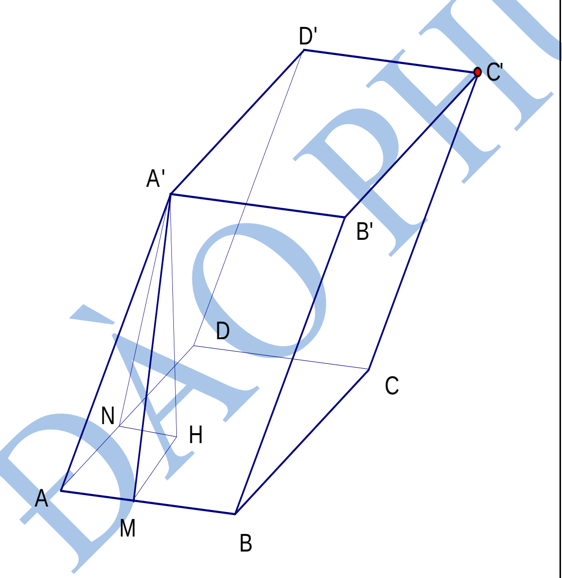
$\Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ mà AA'//BB' nên $BC \perp BB'$ .Vậy BB'CC' là hình chữ nhật.

2) □ABC đều nên $AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

□$AOA' \Rightarrow A'O = AO\tan 60^0 = a$

Vậy V = $S_{ABC}.A'O$ = $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Ví dụ 3: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình chữ nhật với AB = $\sqrt{3}$ AD = $\sqrt{7}$ .Hai mặt bên (ABB'A') và (ADD'A') lần lượt tạo với đáy những góc 45^0 và 60^0. . Tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1.



Lời giải:

Kẻ A'H $\perp (ABCD)$,HM $\perp AB$, $HN \perp AD$

$\Rightarrow A'M \perp AB$, $A'N \perp AD$ (đl 3 $\perp$)

$\Rightarrow A'MH = 45^o, A'NH = 60^o$

Đặt A'H = x . Khi đó

A'N = x : sin 60^0 = $\frac{2x}{\sqrt{3}}$

AN = $\sqrt{AA'^2 - A'N^2} = \sqrt{\frac{3-4x^2}{3}} = HM$

Mà HM = x.cot 45^0 = x

Nghĩa là x = $\sqrt{\frac{3-4x^2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}$

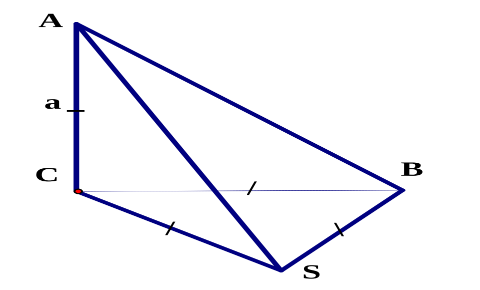
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}$ = AB.AD.x

$= \sqrt{3}.\sqrt{7}.\sqrt{\frac{3}{7}} = 3$

LOẠI 2: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

1) **Dạng 1**: ***Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy***

Ví dụ 1: Cho hình chóp SABC có SB = SC = BC = CA = a . Hai mặt (ABC) và (ASC) cùng vuông góc với (SBC). Tính thể tích hình chóp .



Lời giải:

Ta có

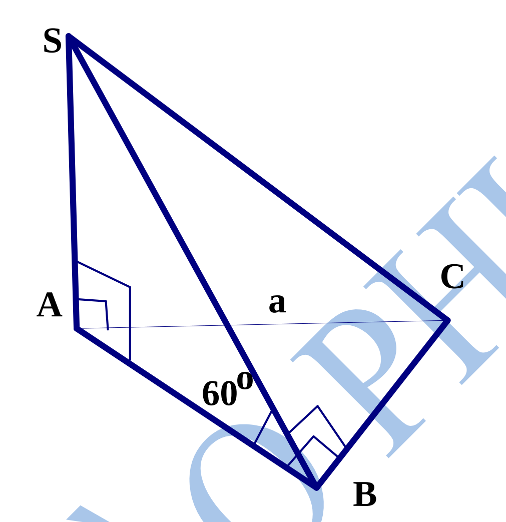
$$\begin{cases}(ABC)\perp(SBC)\\(ASC)\perp(SBC)\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SBC)$$

Do đó $V=\frac{1}{3}S_{SBC}.AC=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}a=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Ví dụ 2: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với AC = a biết SA vuông góc với đáy ABC và SB hợp với đáy một góc 60^o.

1) Chứng minh các mặt bên là tam giác vuông .

2)Tính thể tích hình chóp .



Lời giải:

1) $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp AB\ \&\ SA\perp AC$

mà $BC\perp AB\Rightarrow BC\perp SB$ (đl 3 ⊥).

Vậy các mặt bên chóp là tam giác vuông.

2) Ta có $SA\perp(ABC)\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên (ABC).

Vậy góc[SB,(ABC)] = $\widehat{SAB}=60^o$.

ΔABC vuông cân nên BA = BC = $\frac{a}{\sqrt{2}}$

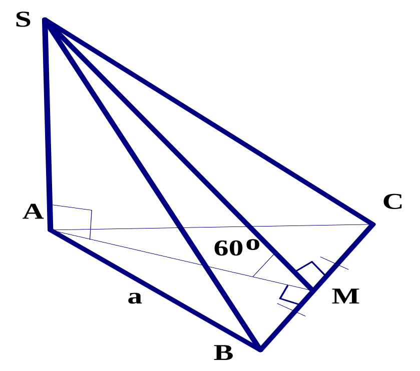
$S_{ABC}=\frac{1}{2}BA.BC=\frac{a^2}{4}$

$\Delta SAB\Rightarrow SA=AB.\tan 60^o=\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}\frac{a^2}{4}\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$

Ví dụ 3: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và (SBC) hợp với đáy (ABC) một góc 60^o.

Tính thể tích hình chóp .



Lời giải: M là trung điểm của BC, vì tam giác ABC đều nên $AM \perp BC \Rightarrow SA \perp BC$ (đl3⊥).

Vậy góc[(SBC);(ABC)] = $\widehat{SMA} = 60^o$.

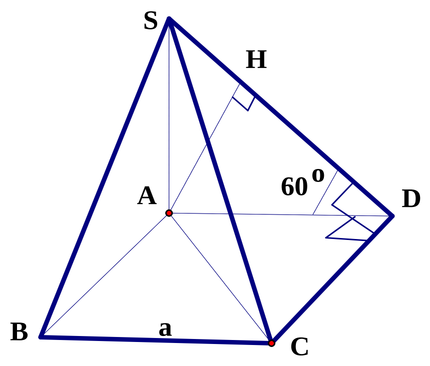
Ta có V = $\frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA$

$\Delta SAM \Rightarrow SA = AM\tan 60^o = \frac{3a}{2}$

Vậy V = $\frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Ví dụ 4: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a và SA vuông góc đáy ABCD và mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60°.

1) Tính thể tích hình chóp SABCD.
2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).



Lời giải: 1)Ta có $SA \perp (ABC)$ và $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp SD$ (đl 3 ⊥).(1)

Vậy góc[(SCD),(ABCD)] = $\widehat{SDA} = 60^o$.

ΔSAD vuông nên SA = AD.tan60° = $a\sqrt{3}$

Vậy $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}a^2a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

2) Ta dựng $AH \perp SD$, vì $CD \perp (SAD)$ (do (1)) nên $CD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SCD)$

Vậy AH là khoảng cách từ A đến (SCD).

$\Delta SAD \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}$

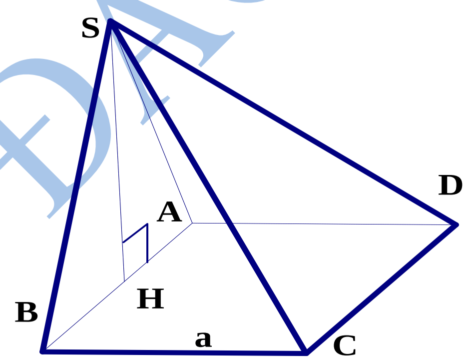
Vậy AH = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

2) **Dạng 2** : ***Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy***

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a

Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáyABCD,

1) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AB.
2) Tính thể tích khối chóp SABCD.



Lời giải:

1) Gọi H là trung điểm của AB.

ΔSAB đều $\Rightarrow SH \perp AB$

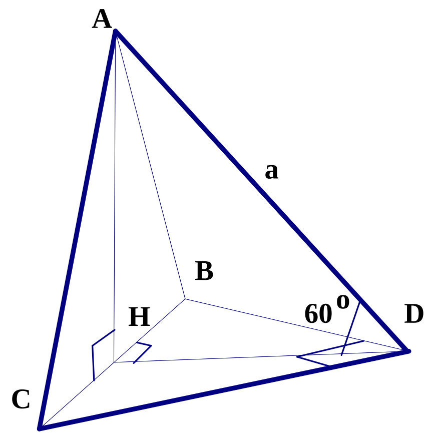
mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Vậy H là chân đường cao của khối chóp.

2) Ta có tam giác SAB đều nên SA = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

suy ra $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Ví du 2: Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác đều ,BCD là tam giác vuông cân tại D , $(ABC) \perp (BCD)$ và AD hợp với (BCD) một góc 60° .
Tính thể tích tứ diện ABCD.



Lời giải:

Gọi H là trung điểm của BC.

Ta có tam giác ABC đều nên AH ⊥ (BCD) , mà (ABC) ⊥ (BCD) ⇒ AH ⊥ (BCD).

Ta có AH ⊥ HD ⇒ AH = AD.tan60° = $a\sqrt{3}$

& HD = AD.cot60° = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

□BCD ⇒ BC = 2HD = $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ suy ra

$$V = \frac{1}{3}S_{BCD}.AH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}BC.HD.AH = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$$

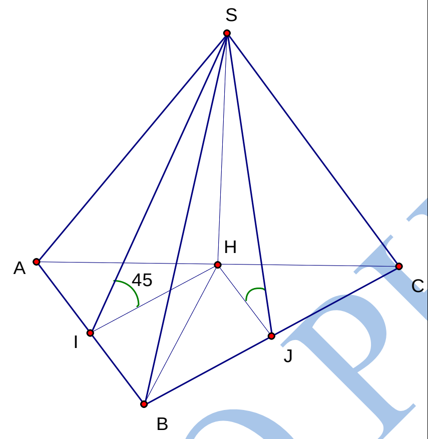
Chú ý ! đáp án ktra lại V

$$V = \frac{1}{3}DM.S_{ABC} = \frac{1}{3}\frac{a}{2}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có BC = a. Mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45^0.

a) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AC.

b) Tính thể tích khối chóp SABC**.**



Lời giải:

a) Kẽ SH ⊥ BC vì mp(SAC) ⊥ mp(ABC) nên SH ⊥ mp(ABC).

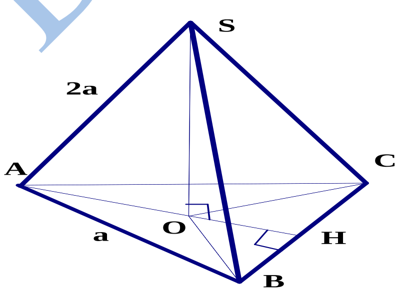
Gọi I, J là hình chiếu của H trên AB và BC ⇒ SI ⊥ AB, SJ ⊥ BC, theo giả thiết $SIH = SJH = 45^o$

Ta có: $\Delta SHI = \Delta SHJ \Rightarrow HI = HJ$ nên BH là đường phân giác của □ABC ừ đó suy ra H là trung điểm của AC.

b) HI = HJ = SH = $\frac{a}{2} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{a^3}{12}$

3) Dang 3 : *Khối chóp đều*

Ví dụ 1: Cho chóp tam giác đều SABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Chứng minh rằng chân đường cao kẻ từ S của hình chóp là tâm của tam giác đều ABC.Tính thể tích chóp đều SABC .



Lời giải:

Dựng SO ⊥ (ABC) Ta có SA = SB = SC suy ra OA = OB = OC

Vậy O là tâm của tam giác đều ABC.

Ta có tam giác ABC đều nên

$$AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

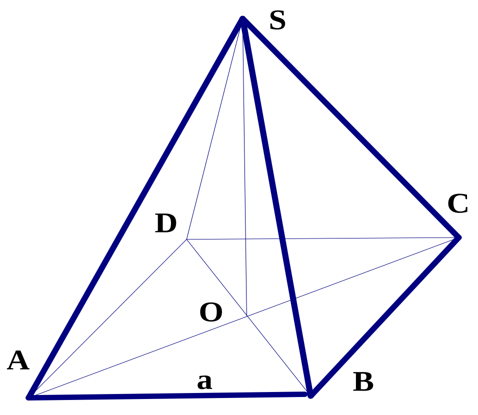
$$□SAO \Rightarrow SO^2 = SA^2 - OA^2 = \frac{11a^2}{3}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}.\text{Vậy } V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SO = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$$

Ví dụ 2: Cho khối chóp tứ giác SABCD có tất cả các cạnh có độ dài bằng a .

1) Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều.

2) Tính thể tích khối chóp SABCD.



Dựng SO $\perp$ (ABCD)

Ta có SA = SB = SC = SD nên OA = OB = OC = OD $\Rightarrow$ ABCD là hình thoi có đường tròn gnoại tiếp nên ABCD là hình vuông .

Ta có $SA^2 + SB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$

nên ΔASC vuông tại S $\Rightarrow OS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

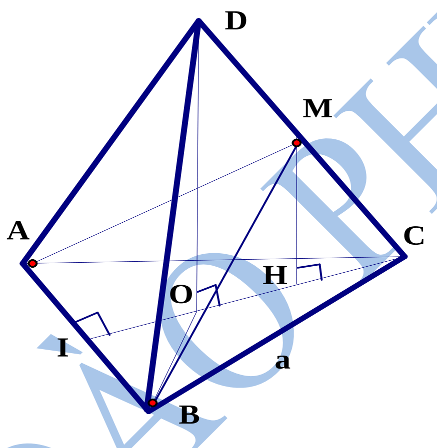
$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Vậy $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Ví dụ 3: Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng a, M là trung điểm DC.

a) Tính thể tích khối tứ diện đều ABCD.

b)Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC).Suy ra thể tích hình chóp MABC.



Lời giải:

a) Gọi O là tâm của $\Delta ABC \Rightarrow DO \perp (ABC)$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.DO$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad OC = \frac{2}{3}CI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta DOC \text{ vuông có }: DO = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

b) Kẻ MH// DO, khoảng cách từ M đến mp(ABC) là MH

$$MH = \frac{1}{2}DO = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow V_{MABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.MH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

Vậy $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho hình chóp đều SABC có cạnh bên bằng a hợp với đáy ABC một góc 60^o. Tính thể tích hình chóp. Đs: $V = \frac{3a^3}{16}$

Bài 2: Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh bên a, góc ở đáy của mặt bên là 45^o.

1) Tính độ dài chiều cao SH của chóp SABC . Đs: $SH = \frac{a}{\sqrt{3}}$

2) Tính thể tích hình chóp SABC. Đs: $V = \frac{a^3}{6}$

Bài 3: Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh đáy a và mặt bên hợp với đáy một góc 60^o. Tính thể tích hình chóp SABC. Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Bài 4 : Cho chóp tam giác đều có đường cao h hợp với một mặt bên một góc 30^o. Tính thể tích hình chóp. Đs: $V = \frac{h^3\sqrt{3}}{3}$

Bài 5 : Cho hình chóp tam giác đều có đường cao h và mặt bên có góc ở đỉnh bằng 60^o. Tính thể tích hình chóp. Đs: $V = \frac{h^3\sqrt{3}}{8}$

Bài 6 : Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy a và $\widehat{ASB} = 60^o$.

1) Tính tổng diện tích các mặt bên của hình chóp đều. Đs: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

2) Tính thể tích hình chóp. Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Bài 7 : Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có chiều cao h ,góc ở đỉnh của mặt bên bằng 60^o. Tính thể tích hình chóp. Đs: $V = \frac{2h^3}{3}$

Bài 8: Cho hình chóp tứ giác đều có mặt bên hợp với đáy một góc 45^o và khoảng cách từ chân đường cao của chóp đến mặt bên bằng a.

Tính thể tích hình chóp . Đs: $V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$

Bài 9: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng a hợp với đáy một góc 60^o.

Tính thể tích hình chóp. Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

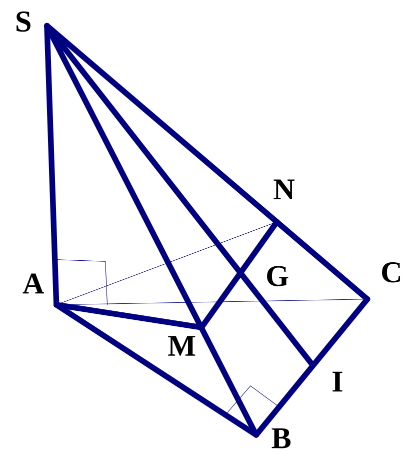
Bài 10: Cho hình chóp SABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều.Tính cạnh của hình chóp này khi thể tích của nó bằng $V = \frac{9a^3\sqrt{2}}{2}$. Đs: AB = 3a

4) Dang 4 : *Khối chóp & phương pháp tỷ số thể tích*

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy ABC , $SA = a$

1) Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

2) Gọi G là trọng tâm tam giác +SBC, mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Tính thể tích của khối chóp S.AMN



Lời giải:

a)Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.SA$ và $SA = a$

+ ΔABC cân có : $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = a$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} a^2$ Vậy: $V_{SABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} a^2.a = \frac{a^3}{6}$

b) Gọi I là trung điểm BC.

G là trọng tâm,ta có : $\frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$

α // BC $\Rightarrow$ MN// BC $\Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{4}{9}$

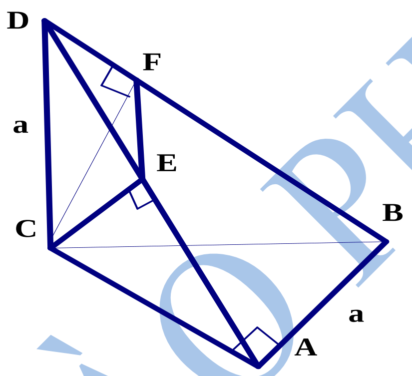
Vậy: $V_{SAMN} = \frac{4}{9} V_{SABC} = \frac{2a^3}{27}$

***Ví dụ 2*:** Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD, cắt BD tại F và cắt AD tại E.

a) Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

b) Chứng minh $CE \perp (ABD)$

c) Tính thể tích khối tứ diện CDEF**.**



Lời giải:

a)Tính V_{ABCD} : $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC}.CD = \frac{a^3}{6}$

b)Tacó:

$AB \perp AC, AB \perp CD \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp EC$

Ta có: $DB \perp EC \Rightarrow EC \perp (ABD)$

c) Tính V_{DCEF} :Ta có: $\frac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \frac{DE}{DA}.\frac{DF}{DB}$ (*)

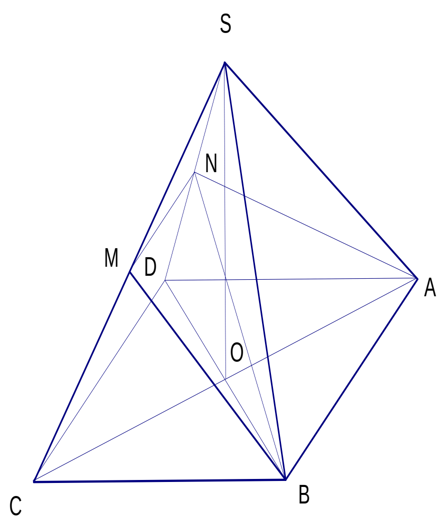
Mà $DE.DA = DC^2$, chia cho DA^2

$\Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DC^2}{DA^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$

Tương tự: $\frac{DF}{DB} = \frac{DC^2}{DB^2} = \frac{a^2}{DC^2 + CB^2} = \frac{1}{3}$

Từ(*) $\Rightarrow \frac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \frac{1}{6}$ .Vậy $V_{DCEF} = \frac{1}{6} V_{ABCD} = \frac{a^3}{36}$

Ví dụ 3: Cho khối chóp tứ giác đều SABCD. Một mặt phẳng (α) qua A, B và trung điểm M của SC . Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.



Lời giải:

Kẻ MN // CD (N $\in SD$) thì hình thang ABMN là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mặt phẳng (ABM).

$+\ \frac{V_{SAND}}{V_{SADB}} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{SANB} = \frac{1}{2}V_{SADB} = \frac{1}{4}V_{SABCD}$

$\frac{V_{SBMN}}{V_{SBCD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{SBMN} = \frac{1}{4}V_{SBCD} = \frac{1}{8}V_{SABCD}$

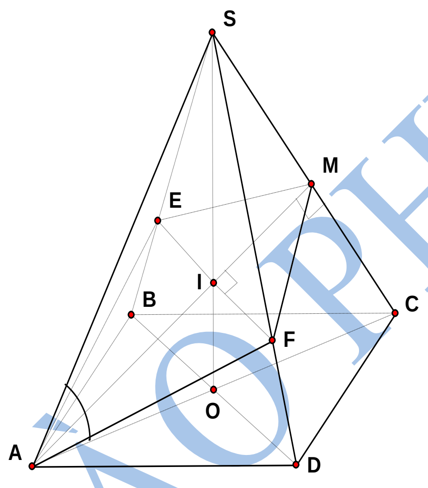
Mà $V_{SABMN} = V_{SANB} + V_{SBMN} = \frac{3}{8}V_{SABCD}$.

Suy ra $V_{ABMN.ABCD} = \frac{5}{8}V_{SABCD}$

Do đó : $\frac{V_{SABMN}}{V_{ABMN.ABCD}} = \frac{3}{5}$

Ví dụ 4: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60^o. Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F.

a) Hảy xác định mp(AEMF)
b) Tính thể tích khối chóp S.ABCD
c) Tính thể tích khối chóp S.AEMF



Lời giải:

a) Gọi $I = SO \cap AM$. Ta có (AEMF) //BD $\Rightarrow$ EF // BD

b) $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO$ với $S_{ABCD} = a^2$

$+\ \Delta SOA$ có : $SO = AO.\tan 60^o = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy : $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

c) Phân chia chóp tứ giác ta có

$V_{S.AEMF} = V_{SAMF} + V_{SAME} = 2V_{SAMF}$

$V_{S.ABCD} = 2V_{SACD} = 2\ V_{SABC}$

Xét khối chóp S.AMF và S.ACD

Ta có : $\Rightarrow \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$

ΔSAC có trọng tâm I, EF // BD nên:

$\Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{SF}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{V_{SAMF}}{V_{SACD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SF}{SD} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow V_{SAMF} = \frac{1}{3}V_{SACD} = \frac{1}{6}V_{SACD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$

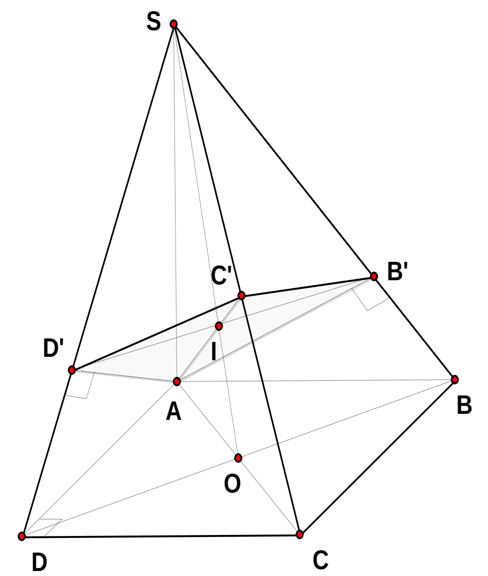
$\Rightarrow V_{S.AEMF} = 2\frac{a^3\sqrt{6}}{36} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi B', D' là hình chiếu của A lần lượt lên SB, SD. Mặt phẳng (AB'D') cắt SC tại C'.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

b) Chứng minh $SC \perp (AB'D')$

c) Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'



Lời giải:

a) Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SA = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

b) Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$

& $SB \perp AB'$ Suy ra: $AB' \perp (SBC)$

nên $AB' \perp SC$ .Tương tự $AD' \perp SC$.

Vậy $SC \perp (AB'D')$

c) Tính $V_{S.AB'C'D'}$

+Tính $V_{S.AB'C'}$: Ta có: $\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} (*)$

ΔSAC vuông cân nên $\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}$

Ta có: $\frac{SB'}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2a^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}$

Từ $(*) \Rightarrow \frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow V_{SAB'C'} = \frac{1}{3}.\frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$

+ $V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{9}$

5) **Dạng 5** : ***Ôn tập khối chóp và lăng trụ***

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA vuông góc đáy. Góc giữa SC và đáy bằng 60^o và M là trung điểm của SB.

1) Tính thể tích của khối chóp S.ABCD.

2) Tính thể tích của khối chóp MBCD.

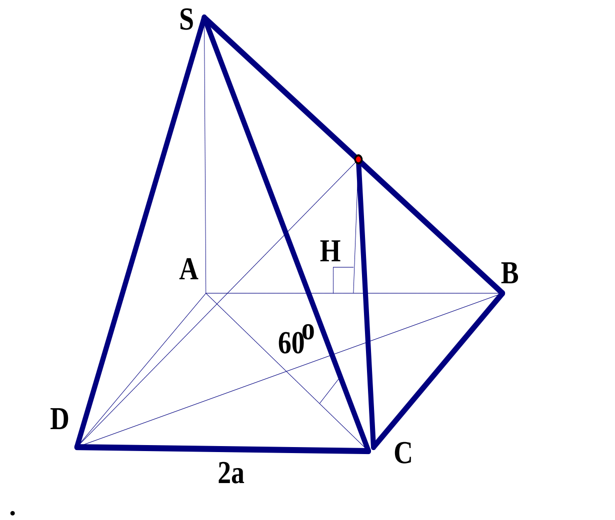
Lời giải:

a)Ta có $V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SA$

+ $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$

+ ΔSAC có : $SA = AC \tan C = 2a\sqrt{6}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} 4a^2.2a\sqrt{6} = \frac{8a^3\sqrt{6}}{3}$

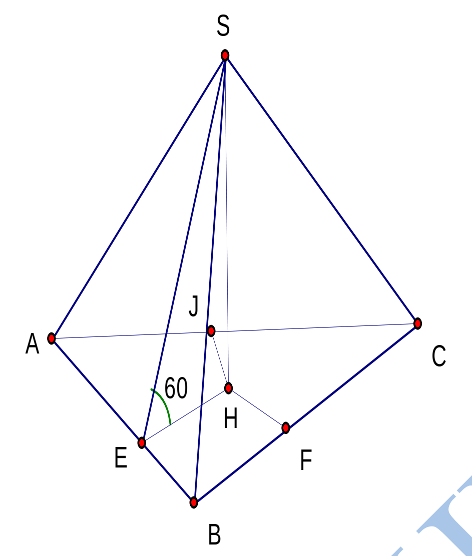


b) Kẻ $MH // SA \Rightarrow MH \perp (DBC)$

Ta có: $MH = \frac{1}{2}SA$, $S_{BCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

$\Rightarrow V_{MBCD} = \frac{1}{4}V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$

Ví dụ 2: Cho hình chóp tam giác S.ABC có AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a. Các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc 60° .Tính thể tích khối chóp.



Lời giải:

Hạ SH$\perp(ABC)$, kẽ HE$\perp$AB, HF$\perp$BC, HJ$\perp$AC suy ra SE$\perp$AB, SF$\perp$BC, SJ$\perp$AC . Ta có

$SEH = SFH = SJH = 60^O \Rightarrow$

$\Delta SAH = \Delta SFH = \Delta SJH$ nên HE =HF = HJ = r

(r là bán kính đường tròn ngọai tiếp ΔABC)

Ta có $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

với $p = \frac{a+b+c}{2} = 9a$ Nên $S_{ABC} = \sqrt{9.4.3.2}\ a^2$

Mặt khác S_{ABC} = p.r $\Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2\sqrt{6}\ a}{3}$

Tam giác vuông SHE:

SH = r.tan 60^0 = $\frac{2\sqrt{6}\ a}{3}.\sqrt{3} = 2\sqrt{2}\ a$

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}6\sqrt{6}\ a^2.2\sqrt{2}\ a = 8\sqrt{3}\ a^3$.

Ví dụ 3: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có $AB = a\sqrt{3}$, AD = a, AA’ = a, O là giao điểm của AC và BD.

a) Tính thể tích khối hộp chữ nhật, khối chóp OA’B’C’D’

b) Tính thể tích khối OBB’C’.

c) Tính độ dài đường cao đỉnh C’ của tứ diện OBB’C’.

Lời giải:

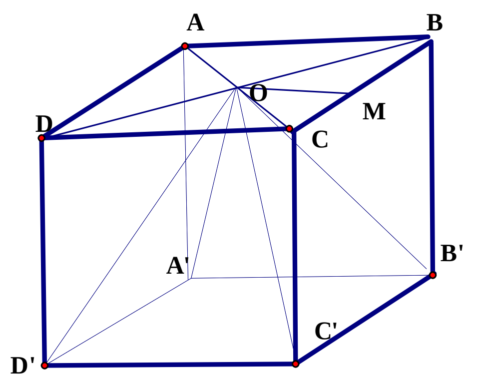
a) Gọi thể tích khối hộp chữ nhật là V.

Ta có : $V = AB.AD.AA' = a\sqrt{3}.a^2 = a^3\sqrt{3}$

ΔABD có : $DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$

* Khối OA’B’C’D’ có đáy và đường cao giống khối hộp nên: $\Rightarrow V_{OA'B'C'D'} = \frac{1}{3}V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

b) M là trung điểm BC $\Rightarrow OM \perp (BB'C')$



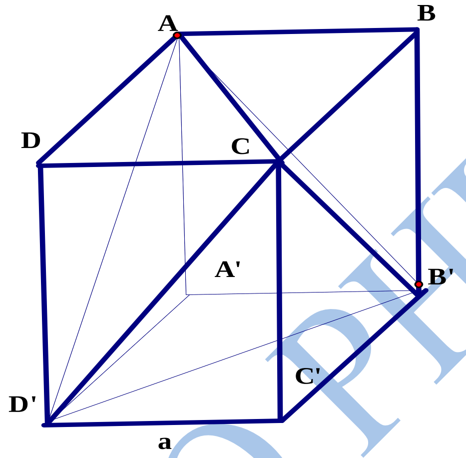
$\Rightarrow V_{OBB'C'} = \frac{1}{3}S_{BB'C'}.OM = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

c) Gọi C'H là đường cao đỉnh C' của tứ diện OBB'C'. Ta có : $C'H = \frac{3V_{OBB'C'}}{S_{OBB'}}$

ΔABD có $: DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$

$\Rightarrow S_{OBB'} = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow C'H = 2a\sqrt{3}$

***Ví dụ 4*:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'có cạnh bằng a.
Tính thể tích khối tứ diện ACB'D'.



Lời giải:

Hình lập phương được chia thành: khối ACB'D' và bốn khối CB'D'C', BB'AC, D'ACD, AB'A'D'.

+Các khối CB'D'C', BB'AC, D'ACD, AB'A'D' có diện tích đáy và chiều cao bằng nhau nên có cùng thể tích.

Khối CB'D'C' có $V_1 = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a^2.a = \frac{1}{6}a^3$

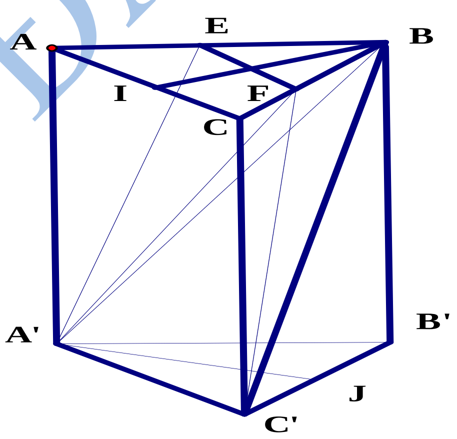
+Khối lập phương có thể tích: $V_2 = a^3$

$\Rightarrow V_{ACB'D'} = a^3 - 4.\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}a^3$

***Ví dụ 5*:** Cho hình lăng trụ đứng tam giác có các cạnh bằng a.

a) Tính thể tích khối tứ diện A'B' BC.

b) E là trung điểm cạnh AC, mp(A'B'E) cắt BC tại F. Tính thể tích khối CA'B'FE.



Lời giải:

a) Khối A'B' BC:Gọi I là trung điểm AB,

$V_{A'B'BC} = \frac{1}{3}S_{A'B'B}.CI = \frac{1}{3}\frac{a^2}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

b)Khối CA'B'FE: phân ra hai khối CEFA' và CFA'B'.

+Khối A'CEFcó đáy là CEF, đường cao A'A nên $V_{A'CEF} = \frac{1}{3}S_{CEF}.A'A$

$S_{CEF} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16} \Rightarrow V_{A'CEF} = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}$

	+Gọi J là trung điểm B'C'. Ta có khối A'B'CF có đáy là CFB', đường cao JA' nên $V_{A'B'CF} = \frac{1}{3}S_{CFB'}.A'J \quad S_{CFB'} = \frac{1}{2}S_{CBB'} = \frac{a^2}{4}$ $\Rightarrow V_{A'B'CF} = \frac{1}{3}\frac{a^2}{4}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ $+$ Vậy : $V_{CA'B'FE} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$

Chương II

CHÖÔNG II
KHOÁI TROØN XOAY

I. Maët caàu – Khoái caàu:

1. Ñònh nghóa

• **Maët caàu:** $S(O;R) = \{M | OM = R\}$ • **Khoái caàu:** $V(O;R) = \{M | OM \le R\}$

2. Vò trí töông ñoái giöõa maët caàu vaø maët phaúng

Cho maët caàu S(O; R) vaø maët phaúng (P). Goïi d = d(O; (P)).

• Neáu *d* < *R* thì (P) caét (S) theo giao tuyeán laø ñöôøng troøn naèm treân (P), coù taâm H vaø baùn kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

• Neáu *d* = *R* thì (P) tieáp xuùc vôùi (S) taïi tieáp ñieåm H. (*(P) ñgl tieáp dieän cuûa (S)*)

• Neáu *d* > *R* thì (P) vaø (S) khoâng coù ñieåm chung.

Khi d = 0 thì (P) ñi qua taâm O vaø ñgl maët phaúng kính, ñöôøng troøn giao tuyeán coù baùn kính baèng R ñgl ñöôøng troøn lôùn.

3. Vò trí töông ñoái giöõa maët caàu vaø ñöôøng thaúng

Cho maët caàu S(O; R) vaø ñöôøng thaúng Δ. Goïi d = d(O; Δ).

• Neáu *d* < *R* thì Δ caét (S) taïi hai ñieåm phaân bieät.

• Neáu *d* = *R* thì Δ tieáp xuùc vôùi (S). (*Δ ñgl tieáp tuyeán cuûa (S)*).

• Neáu *d* > *R* thì Δ vaø (S) khoâng coù ñieåm chung.

4. Maët caàu ngoaïi tieáp – noäi tieáp

	Maët caàu ngoaïi tieáp	**Maët caàu noäi tieáp**
Hình ña dieän	Taát caû caùc ñænh cuûa hình ña dieän ñeàu naèm treân maët caàu	Taát caû caùc maët cuûa hình ña dieän ñeàu tieáp xuùc vôùi maët caàu
Hình truï	Hai ñöôøng troøn ñaùy cuûa hình truï naèm treân maët caàu	Maët caàu tieáp xuùc vôùi caùc maët ñaùy vaø moïi ñöôøng sinh cuûa hình truï
Hình noùn	Maët caàu ñi qua ñænh vaø ñöôøng troøn ñaùy cuûa hình noùn	Maët caàu tieáp xuùc vôùi maët ñaùy vaø moïi ñöôøng sinh cuûa hình noùn

5. Xaùc ñònh taâm maët caàu ngoaïi tieáp khoái ña dieän

• Caùch 1: Neáu *(n – 2)* ñænh cuûa ña dieän nhìn hai ñænh coøn laïi döôùi moät goùc vuoâng thì taâm cuûa maët caàu laø trung ñieåm cuûa ñoaïn thaúng noái hai ñænh ñoù.

• Caùch 2: Ñeå xaùc ñònh taâm cuûa maët caàu ngoaïi tieáp hình choùp.

– Xaùc ñònh truïc Δ cuûa ñaùy *(Δ laø ñöôøng thaúng vuoâng goùc vôùi ñaùy taïi taâm ñöôøng troøn ngoaïi tieáp ña giaùc ñaùy).*

– Xaùc ñònh maët phaúng trung tröïc (P) cuûa moät caïnh beân.

– Giao ñieåm cuûa (P) vaø Δ laø taâm cuûa maët caàu ngoaïi tieáp hình choùp.

II. Dieän tích – Theå tích

	Caàu	Truï	Noùn
Dieän tích	$S = 4\pi R^2$	$S_{xq} = 2\pi Rh$ $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{ñaùy}$	$S_{xq} = \pi Rl$ $S_{tp} = S_{xq} + S_{ñaùy}$
Theå tích	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$	$V = \pi R^2 h$	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

VAÁN ÑEÀ 1: Maët caàu – Khoái caàu

Baøi 1. Cho hình choùp S.ABC coù ñaùy ABC laø tam giaùc vuoâng taïi B vaø $SA \perp (ABC)$.

a) Goïi O laø trung ñieåm cuûa SC. Chöùng minh: OA = OB = OC = SO. Suy ra boán ñieåm A, B, C, S cuøng naèm treân maët caàu taâm O baùn kính $R = \frac{SC}{2}$.

b) Cho SA = BC = a vaø $AB = a\sqrt{2}$. Tính baùn kính maët caàu noùi treân.

Baøi 2. Trong maët phaúng (P), cho ñöôøng thaúng d vaø moät ñieåm A ngoaøi d. Moät goùc xAy di ñoäng quanh A, caét d taïi B vaø C. Treân ñöôøng thaúng qua A vuoâng goùc vôùi (P) laáy ñieåm S. Goïi H vaø K laø caùc hình chieáu vuoâng goùc cuûa A treân SB vaø SC.

a) Chöùng minh A, B, C, H, K thuoäc cuøng moät maët caàu.

b) Tính baùn kính maët caàu treân, bieát AB = 2, AC = 3, $BAC = 60^0$.

Baøi 3. Cho hình choùp S.ABCD coù ñaùy ABCD laø hình vuoâng caïnh a, $SA \perp (ABCD)$ vaø $SA = a\sqrt{3}$. Goïi O laø taâm hình vuoâng ABCD vaø K laø hình chieáu cuûa B treân SC.

a) Chuùng minh ba ñieåm O, A, K cuøng nhìn ñoaïn SB döôùi moät goùc vuoâng. Suy ra naêm ñieåm S, D, A, K B cuøng naèm treân maët caàu ñöôøng kính SB.

b) Xaùc ñònh taâm vaø baùn kính maët caàu noùi treân.

Baøi 4. Cho maët caàu S(O; a) vaø moät ñieåm A, bieát OA = 2a. Qua A keû moät tieáp tuyeán tieáp xuùc vôùi (S) taïi B vaø cuõng qua A keû moät caùt tuyeán caét (S) taïi C vaø D, bieát $CD = a\sqrt{3}$.

a) Tính AB.

b) Tính khoaûng caùch töø O ñeán ñöôøng thaúng CD.

Baøi 5. Cho hình choùp tam giaùc ñeàu S.ABC, coù caïnh ñaùy baèng a vaø goùc hôïp bôûi maët beân vaø ñaùy baèng 60^0. Goïi O laø taâm cuûa tam giaùc ABC. Trong tam giaùc SAO döïng ñöôøng trung tröïc cuûa caïnh SA, caét SO taïi K.

a) Tính SO, SA.

b) Chöùng minh ΔSMK □ ΔSOA (vôùi M laø trung ñieåm cuûa SA). Suy ra KS.

c) Chöùng minh hình choùp K.ABC laø hình choùp ñeàu. suy ra: KA = KB +KC.

d) Xaùc ñònh taâm vaø baùn kính maët caàu ngoaïi tieáp hình choùp S.ABC.

Baøi 6. Cho hình choùp S.ABC. bieát raèng coù moät maët caàu baùn kính R tieáp xuùc vôùi caùc caïnh cuûa hình choùp vaø taâm I cuûa maët caàu naèm treân ñöôøng cao SH cuûa hình choùp.

a) Chöùng minh raèng S.ABC laø hình choùp ñeàu.

b) Tính chieàu cao cuûa hình choùp, bieát raèng $IS = R\sqrt{3}$

Baøi 7. Cho töù dieän ñeàu ABCD coù caïnh laø a.

a) Xaùc ñònh taâm vaø baùn kính maët caàu ngoaïi tieáp töù dieän.

b) Tính dieän tích maët caàu vaø theå tích khoái caàu ñoù.

Baøi 8. Cho moät hình choùp töù giaùc ñeàu coù caïnh ñaùy laø a, caïnh beân hôïp vôùi maët ñaùy moät goùc 60^0.

a) Xaùc ñònh taâm vaø baùn kính maët caàu ngoaïi tieáp hình choùp.

b) Tính dieän tích maët caàu vaø theå tích khoái caàu ñoù.

Baøi 9. Cho hình choùp töù giaùc ñeàu S.ABCD coù taát caû caùc caïnh ñeàu baèng a. Xaùc ñònh taâm vaø baùn kính cuûa maët caàu ñi qua naêm ñieåm S, A, B, C, D.

Baøi 10. Cho tam giaùc ABC coù ñoä daøi ba caïnh laø 13, 14, 15. Moät maët caàu taâm O, baùn kính R = 5 tieáp xuùc vôùi ba caïnh cuûa tam giaùc ABC taïi caùc tieáp ñieåm naèm treân ba caïnh ñoù. Tính khoaûng caùch töø taâm maët caàu tôùi maët phaúng chöùa tam giaùc.

Baøi 11. Hình choùp S.ABC coù ñöôøng cao SA = a, ñaùy ABC laø tam giaùc ñeàu caïnh a. Tính baùn kính maët caàu ngoaïi tieáp hình choùp.

Baøi 12. Cho hình choùp töø giaùc ñeàu S.ABCD coù caïnh ñaùy baèng a vaø goùc hôïp bôûi maët beân vaø ñaùy baèng 60^0. Xaùc ñònh taâm vaø baùn kính maët caàu ngoaïi tieáp hình choùp.

Baøi 13. Hình choùp töù giaùc ñeàu S.ABCD coù caïnh ñaùy a vaø ñöôøng cao h. Goïi O laø taâm cuûa ABCD vaø H laø trung ñieåm cuûa BC. Ñöôøng phaân giaùc trong cuûa goùc SHO caét SO taïi I. Chöùng minh raèng I laø taâm maët caàu noäi tieáp hình choùp. Tính baùn kính maët caàu naøy.

Baøi 14. Cho hình choùp S.ABC coù SA ⊥ (ABC) vaø tam giaùc ABC vuoâng taïi B. Goïi AH, AK laàn löôït laø caùc ñöôøng cao cuûa caùc tam giaùc SAB vaø SAC.

a) Chöùng minh raèng naêm ñieåm A, B, C, H, K cuøng ôû treân moät maët caàu.

b) Cho AB = 10, BC = 24. Xaùc ñònh taâm vaø tính baùn kính maët caàu ñoù.

Baøi 15. Cho hình choùp S.ABCD coù ABCD laø hình vuoâng caïnh baèng a, SA = $a\sqrt{7}$ vaø SA ⊥ (ABCD). Moät maët phaúng (P) qua A vaø vuoâng goùc vôùi SC, caét SB, SC, SD laàn löôït taïi H, M, K.

a) Chöùng minh raèng baûy ñieåm A, B, C, D, H, M, K cuøng ôû treân moät maët caàu.

b) Xaùc ñònh taâm vaø tính baùn kính maët caàu ñoù.

VAÁN ÑEÀ 2: Maët truï – Hình truï – Khoái truï

Baøi 1. Cho hình truï coù caùc ñaùy laø hai hình troøn taâm O vaø O′, baùn kính ñaùy baèng 2 cm. Treân ñöôøng troøn ñaùy taâm O laáy hai ñieåm A, B sao cho AB = 2 cm. Bieát raèng theå tích töù dieän OO′AB baèng 8 cm^3. Tính chieàu cao hình truï vaø theå tích khoái truï.

Baøi 2. Cho hình truï coù caùc ñaùy laø hai hình troøn taâm O vaø O′, baùn kính ñaùy baèng 2 cm. Treân ñöôøng troøn ñaùy taâm O laáy ñieåm A sao cho AO′ hôïp vôùi maët phaúng ñaùy moät goùc 60^0. Tính chieàu cao hình truï vaø theå tích khoái truï.

Baøi 3. Cho hình truï coù caùc ñaùy laø hai hình troøn taâm O vaø O′, baùn kính ñaùy baèng chieàu cao vaø baèng a. Treân ñöôøng troøn ñaùy taâm O laáy ñieåm A, treân ñöôøng troøn ñaùy taâm O′ laáy ñieåm B sao cho AB = 2a. Tính theå tích cuûa khoái töù dieän OO′AB.

Baøi 4. Moät khoái truï coù chieàu cao baèng 20 cm vaø coù baùn kính ñaùy baèng 10 cm. Ngöôøi ta keû hai baùn kính OA vaø O’B’ laàn löôït treân hai ñaùy sao cho chuùng hôïp vôùi nhau moät goùc 30^0. Caét khoái truï bôûi moät maët phaúng chöùa ñöôøng thaúng AB’ vaø song song vôùi truïc OO’ cuûa khoái truï ñoù. Haõy tính dieän tích cuûa thieát dieän.

Baøi 5. Moät hình truï coù baùn kính ñaùy R = 53 cm, khoaûng caùch giöõa hai ñaùy h = 56 cm. Moät thieát dieän song song vôùi truïc laø hình vuoâng. Tính khoaûng caùch töø truïc ñeán maët phaúng thieát dieän.

Baøi 6. Cho hình truï baùn kính ñaùy R, chieàu cao OO′ = h, A vaø B laø hai ñieåm thay ñoåi treân hai ñöôøng troøn ñaùy sao cho ñoä daøi AB = a khoâng ñoåi $\left(h > a < \sqrt{h^2 + 4R^2}\right)$.

a) Chöùng minh goùc giöõa hai ñöôøng thaúng AB vaø OO′ khoâng ñoåi.

b) Chöùng minh khoaûng caùch giöõa hai ñöôøng thaúng AB vaø OO′ khoâng ñoåi.

Baøi 7. Trong khoâng gian cho hình vuoâng ABCD caïnh a. Goïi I vaø H laàn löôït laø trung ñieåm cuûa caùc caïnh AB vaø CD. Khi quay hình vuoâng ñoù xung quanh truïc IH ta ñöôïc moät hình truï troøn xoay.

a) Tính dieän tích xung quanh cuûa hình truï troøn xoay ñöôïc taïo neân.

b) Tính theå tích cuûa khoái truï troøn xoay ñöôïc taïo neân bôûi hình truï troøn xoay ñoù.

Baøi 8. Moät hình truï coù baùn kính ñaùy R vaø coù thieát dieän qua truïc laø moät hình vuoâng.

a) Tính dieän tích xung quanh vaø dieän tích toaøn phaàn cuûa hình truï.

b) Tính theå tích cuûa khoái laêng truï töù giaùc ñeàu noäi tieáp trong khoái truï ñaõ cho.

Baøi 9. Moät hình truï coù baùn kính ñaùy R vaø ñöôøng cao baèng $R\sqrt{3}$; A vaø B laø hai ñieåm treân hai ñöôøng troøn ñaùy sao cho goùc hôïp bôûi AB vaø truïc cuûa hình truï laø 30^0.

a) Tính dieän tích xung quanh vaø dieän tích toaøn phaàn cuûa hình truï.

b) Tính khoaûng caùch giöõa AB vaø truïc cuûa hình truï.

Baøi 10. Cho hình truï baùn kính ñaùy R, chieàu cao h. Goïi A vaø B laø hai ñieåm laàn löôït naèm treân hai ñöôøng troøn ñaùy (O, R) vaø (O′, R) sao cho OA vaø O′B hôïp vôùi nhau moät goùc baèng *x* vaø vaø hai ñöôøng thaúng AB, O′O hôïp vôùi nhau moät goùc baèng *y*.

a) Tính baùn kính R theo h, x, y.

b) Tính S_{xq}, S_{tp} vaø theå tích V cuûa hình truï theo *h, x, y*.

Baøi 11. Cho hình truï baùn kính ñaùy baèng a vaø truïc OO′ = 2a. OA vaø OB′ laø hai baùn kính cuûa hai ñöôøng troøn ñaùy (O), (O′) sao cho goùc cuûa OA vaø OB′ baèng 30^0.

a) Tính ñoä daøi ñoaïn thaúng AB′.

b) Tính tang cuûa goùc giöõa AB′ vaø OO′.

c) Tính khoaûng caùch giöõa AB′ vaø OO′.

Baøi 12. Moät khoái truï coù caùc ñaùy laø hai hình troøn taâm O vaø O′, baùn kính R vaø coù ñöôøng cao $h = R\sqrt{2}$. Goïi A laø moät ñieåm treân ñöôøng troøn taâm O vaø B laø moät ñieåm treân ñöôøng troøn taâm O′ sao cho OA vuoâng goùc vôùi O′B.

a) Chöùng minh raèng caùc maët beân cuûa töù dieän OABO′ laø nhöõng tam giaùc vuoâng. Tính tæ soá theå tích cuûa khoái töù dieän OABO′ vaø khoái truï.

b) Goïi (α) laø maët phaúng qua AB vaø song song vôùi OO′. Tính khoaûng caùch giöõa truïc OO′ vaø maët phaúng (α).

c) Chöùng minh raèng (α) laø tieáp dieän cuûa maët truï coù truïc OO′ vaø coù baùn kính ñaùy baèng $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

VAÁN ÑEÀ 1: Maët noùn – Hình noùn – Khoái noùn

Baøi 1. Cho hình laêng truï töù giaùc ñeàu ABCD.A′B′C′D′ coù caïnh ñaùy baèng a, chieàu cao 2a. Bieát raèng O′ laø taâm cuûa A′B′C′D′ vaø (C) laø ñöôøng troøn noäi tieáp ñaùy ABCD. Tính theå tích khoái noùn coù ñænh O′ vaø ñaùy (C).

Baøi 2. Cho hình laêng truï tam giaùc ñeàu ABC.A′B′C′ coù caïnh ñaùy baèng a vaø chieàu cao 2a. Bieát raèng O′ laø taâm cuûa A′B′C′ vaø (C) laø ñöôøng troøn noäi tieáp ñaùy ABC. Tính theå tích khoái noùn coù ñænh O′ vaø ñaùy (C).

Baøi 3. Cho hình choùp töù giaùc ñeàu S.ABCD coù caïnh ñaùy baèng a, caïnh beân hôïp vôùi ñaùy moät goùc 60^0. Goïi (C) laø ñöôøng troøn ngoaïi tieáp ñaùy ABCD. Tính theå tích khoái noùn coù ñænh S vaø ñaùy (C).

Baøi 4. Trong khoâng gian cho tam giaùc OIM vuoâng taïi I, goùc IOM baèng 30^0 vaø caïnh IM = a. Khi quay tam giaùc OIM quanh caïnh goùc vuoâng OI thì ñöôøng gaáp khuùc OMI taïo thaønh moät hình noùn troøn xoay.

a) Tính dieän tích xung quanh cuûa hình noùn troøn xoay taïo thaønh.

b) Tính theå tích cuûa khoái noùn troøn xoay taïo thaønh.

Baøi 5. Thieát dieän qua truïc cuûa moät hình noùn laø moät tam giaùc vuoâng caân coù caïnh goùc vuoâng baèng a.

a) Tính dieän tích xung quanh vaø dieän tích toaøn phaàn cuûa hình noùn.

b) Tính theå tích cuûa khoái noùn töông öùng.

c) Moät thieát dieän qua ñænh vaø taïo vôùi ñaùy moät goùc 60^0. Tính dieän tích cuûa thieát dieän naøy.

Baøi 6. Cho hình noùn ñænh S, ñöôøng cao SO, A vaø B laø hai ñieåm thuoäc ñöôøng troøn ñaùy sao cho khoaûng caùch töø ñieåm O ñeán AB baèng a vaø $SAO = 30^0$, $SAB = 60^0$. Tính ñoä daøi ñöôøng sinh cuûa hình noùn theo a.

Baøi 7. Thieát dieän qua truïc cuûa moät khoái noùn laø moät tam giaùc vuoâng caân coù caïnh huyeàn baèng a. Tính theå tích khoái noùn vaø dieän tích xung quanh cuûa hình noùn ñaõ cho.

Baøi 8. Cho hình laäp phöông ABCD. A'B'C'D' caïnh a. Tính dieän tích xung quanh cuûa hình noùn coù ñænh laø taâm O cuûa hình vuoâng ABCD vaø ñaùy laø hình troøn noäi tieáp hình vuoâng A'B'C'D'.

Baøi 9. Caét moät hình noùn baèng moät maët phaúng ñi qua truïc cuûa noù, ta ñöôïc thieát dieän laø moät tam giaùc ñeàu caïnh 2a. Tính dieän tích xung quanh, dieän tích toaøn phaàn cuûa hình vaø theå tích cuûa khoái noùn.

Baøi 10. Cho hình choùp tam giaùc ñeàu S. ABC coù caïnh beân baèng a vaø goùc giöõa caùc maët beân vaø maët ñaùy laø α. Moät hình noùn ñænh S coù ñöôøng troøn ñaùy noäi tieáp tam giaùc ñeàu ABC, Haõy tính dieän tích xung quanh cuûa hình noùn naøy theo a vaø α.

Baøi 11. Cho hình choùp töù giaùc ñeàu S.ABCD coù chieàu cao SO = h vaø $SAB = \alpha$ ($\alpha > 45^0$). Tính dieän tích xung quanh cuûa hình noùn ñænh S vaø coù ñöôøng troøn ñaùy ngoaïi tieáp hình vuoâng ABCD.

Baøi 12. Moät hình noùn coù ñoä daøi ñöôøng sinh baèng 1 vaø goùc giöõa ñöôøng sinh vaø ñaùy laø α.

a) Tình dieän tích xung quanh vaø theå tích cuûa khoái noùn.

b) Goïi I laø ñieåm treân ñöôøng cao SO cuûa hình noùn sao cho $\frac{SI}{SO} = k\ (0 < k < 1)$. Tính dieän tích cuûa thieát dieän qua I vaø vuoâng goùc vôùi truïc.

Chương III:

CHÖÔNG III
PHÖÔNG PHAÙP TOAÏ ÑOÄ TRONG KHOÂNG GIAN

I. VECTÔ TRONG KHOÂNG GIAN

1. Ñònh nghóa vaø caùc pheùp toaùn

• Ñònh nghóa, tính chaát, caùc pheùp toaùn veà vectô trong khoâng gian ñöôïc xaây döïng hoaøn toaøn töông töï nhö trong maët phaúng.

• Löu yù:

+ **Qui taéc ba ñieåm:** Cho ba ñieåm A, B, C baát kyø, ta coù: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui taéc hình bình haønh:** Cho hình bình haønh ABCD, ta coù: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui taéc hình hoäp:** Cho hình hoäp ABCD.A′B′C′D′, ta coù: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

+ **Heä thöùc trung ñieåm ñoaïn thaúng:** Cho I laø trung ñieåm cuûa ñoaïn thaúng AB, O tuyø yù.

Ta coù: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$

+ **Heä thöùc troïng taâm tam giaùc:** Cho G laø troïng taâm cuûa tam giaùc ABC, O tuyø yù.

Ta coù: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

+ **Heä thöùc troïng taâm töù dieän:** Cho G laø troïng taâm cuûa töù dieän ABCD, O tuyø yù.

Ta coù: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$

+ **Ñieàu kieän hai vectô cuøng phöông:** $\vec{a}$ *vaø* $\vec{b}$ *cuøng phöông* $(\vec{a}\neq\vec{0}) \Leftrightarrow \exists!\, k\in R: \vec{b}=k\vec{a}$

+ **Ñieåm M chia ñoaïn thaúng AB theo tæ soá k** (k ≠ 1), O tuyø yù.

Ta coù: $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$

2. Söï ñoàng phaúng cuûa ba vectô

• Ba vectô ñöôïc goïi laø ñoàng phaúng neáu caùc giaù cuûa chuùng cuøng song song vôùi moät maët phaúng.

• **Ñieàu kieän ñeå ba vectô ñoàng phaúng:** Cho ba vectô $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, trong ñoù $\vec{a}$ *vaø* $\vec{b}$ khoâng cuøng phöông. Khi ñoù: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ñoàng phaúng ⇔ ∃! m, n ∈ R: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$

• Cho ba vectô $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khoâng ñoàng phaúng, $\vec{x}$ tuyø yù.

Khi ñoù: ∃! m, n, p ∈ R: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

3. Tích voâ höôùng cuûa hai vectô

• **Goùc giöõa hai vectô trong khoâng gian:**

$$\overrightarrow{AB}=\vec{u},\ \overrightarrow{AC}=\vec{v} \Rightarrow (\vec{u},\vec{v})=\widehat{BAC}\ (0^0\leq \widehat{BAC}\leq 180^0)$$

• **Tích voâ höôùng cuûa hai vectô trong khoâng gian:**

+ Cho $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$. Khi ñoù: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

+ Vôùi $\vec{u}=\vec{0}$ *hoaëc* $\vec{v}=\vec{0}$. Qui öôùc: $\vec{u}.\vec{v}=0$

+ $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$

+ $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}^2}$

II. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

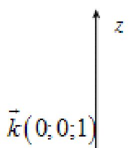
1. Heä toïa ñoä Ñeâcac vuoâng goùc trong khoâng gian:

Cho ba truïc Ox, Oy, Oz vuoâng goùc vôùi nhau töøng ñoâi moät vaø chung moät ñieåm goác O. Goïi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ laø caùc vectô ñôn vò, töông öùng treân caùc truïc Ox, Oy, Oz. Heä ba truïc nhö vaäy goïi laø heä toïa ñoä Ñeâcac vuoâng goùc Oxyz hoaëc ñôn giaûn laø heä toïa ñoä Oxyz.

Chuù yù: $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1$ vaø $\vec{i}.\vec{j}=\vec{i}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{j}=0$.

2. Toïa ñoä cuûa vectô:

a) **Ñònh nghóa:** $\vec{u}=(x;\ y;\ z)\Leftrightarrow \vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$



b) Tính chaát: Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$, $k\in R$

- $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;\ a_2\pm b_2;\ a_3\pm b_3)$
- $k\vec{a}=(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$
- $\vec{0}=(0;0;0)$, $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$, $\vec{k}=(0;0;1)$
- $\vec{a}$ cuøng phöông $\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a}=k\vec{b}$ $(k\in R)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3},\ (b_1,b_2,b_3\neq0)$$

- $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3$
- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
- $\vec{a}^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$
- $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
- $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$ *(vôùi $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$)*

3. Toïa ñoä cuûa ñieåm:

a) Ñònh nghóa: $M(x;\ y;\ z)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=(x;y;z)$ *(x : hoaønh ñoä, y : tung ñoä, z : cao ñoä)*

Chuù yù: *• $M\in(Oxy)\Leftrightarrow z=0$; $M\in(Oyz)\Leftrightarrow x=0$; $M\in(Oxz)\Leftrightarrow y=0$*
• $M\in Ox\Leftrightarrow y=z=0$; $M\in Oy\Leftrightarrow x=z=0$; $M\in Oz\Leftrightarrow x=y=0$

b) Tính chaát: Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$

- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Toaï ñoä ñieåm M chia ñoaïn AB theo tæ soá *k (k≠1)*: $M\left(\dfrac{x_A-kx_B}{1-k};\dfrac{y_A-ky_B}{1-k};\dfrac{z_A-kz_B}{1-k}\right)$
- Toaï ñoä trung ñieåm M cuûa ñoaïn thaúng AB: $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Toaï ñoä troïng taâm G cuûa tam giaùc ABC:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

- Toaï ñoä troïng taâm G cuûa töù dieän ABCD:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\frac{z_A+z_B+z_C+z_C}{4}\right)$$

4. Tích coù höôùng cuûa hai vectô: *(Chöông trình naâng cao)*

a) Ñònh nghóa: Cho $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\wedge\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$$

Chuù yù: *Tích coù höôùng cuûa hai vectô laø moät vectô, tích voâ höôùng cuûa hai vectô laø moät soá.*

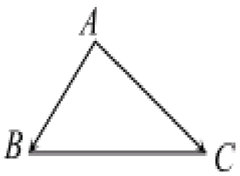
b) Tính chaát:

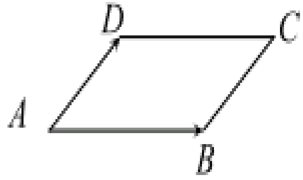
- $\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k}$; $\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}$; $\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}$
- $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{a}$; $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{b}$
- $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$
- $\vec{a},\vec{b}$ cuøng phöông $\Leftrightarrow[\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}$

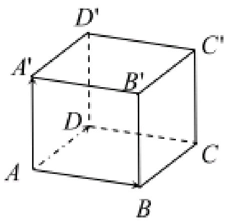
c) ÖÙng duïng cuûa tích coù höôùng:

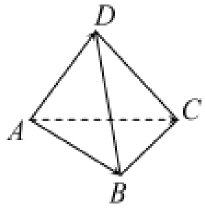
- ***Ñieàu kieän ñoàng phaúng cuûa ba vectô:*** $\vec{a},\vec{b}$ vaø $\vec{c}$ ñoàng phaúng $\Leftrightarrow[\vec{a},\vec{b}].\vec{c}=0$

- ***Dieän tích hình bình haønh ABCD:*** $S_{\square ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$
- ***Dieän tích tam giaùc ABC:*** $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$
- ***Theå tích khoái hoäp ABCD.A′B′C′D′:*** $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$
- ***Theå tích töù dieän ABCD:*** $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$









Chuù yù:

*– **Tích voâ höôùng** cuûa hai vectô thöôøng söû duïng ñeå chöùng minh hai ñöôøng thaúng vuoâng goùc, tính goùc giöõa hai ñöôøng thaúng.*

*– **Tích coù höôùng** cuûa hai vectô thöôøng söû duïng ñeå tính dieän tích tam giaùc; tính theå tích khoái töù dieän, theå tích hình hoäp; chöùng minh caùc vectô ñoàng phaúng – khoâng ñoàng phaúng, chöùng minh caùc vectô cuøng phöông.*

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \\ \vec{a} \text{ vaø } \vec{b} \text{ cuøng phöông} \Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0} \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ ñoàng phaúng} \Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0 \end{array}}$$

5. Phöông trình maët caàu:

- Phöông trình maët caàu (S) taâm *I(a; b; c)*, baùn kính *R*:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

- Phöông trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ vôùi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ laø phöông trình maët caàu taâm *I(–a; –b; –c)* vaø baùn kính *R* = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

VAÁN ÑEÀ 1: Caùc pheùp toaùn veà toaï ñoä cuûa vectô vaø cuûa ñieåm

– Söû duïng caùc coâng thöùc veà toaï ñoä cuûa vectô vaø cuûa ñieåm trong khoâng gian.

– Söû duïng caùc pheùp toaùn veà vectô trong khoâng gian.

Baøi 16. Vieát toïa ñoä cuûa caùc vectô sau ñaây:

$\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{b} = 7\vec{i} - 8\vec{k}$; $\vec{c} = -9\vec{k}$; $\vec{d} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$

Baøi 17. Vieát döôùi daïng $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ moãi vectô sau ñaây:

$\vec{a} = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)$; $\vec{b} = (4; -5; 0)$; $\vec{c} = \left(\frac{4}{3}; 0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\vec{d} = \left(\pi; \frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Baøi 18. Cho: $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$. Tìm toaï ñoä cuûa caùc vectô $\vec{u}$ vôùi:

a) $\vec{u} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 3\vec{c}$ b) $\vec{u} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$ c) $\vec{u} = -4\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$

d) $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ e) $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ f) $\vec{u} = \vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$

Baøi 19. Tìm toïa ñoä cuûa vectô $\vec{x}$, bieát raèng:

a) $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$ vôùi $\vec{a} = (1; -2; 1)$ b) $\vec{a} + \vec{x} = 4\vec{a}$ vôùi $\vec{a} = (0; -2; 1)$

c) $\vec a + 2\vec x = \vec b$ vôùi $\vec a = (5;4;-1)$, $\vec b = (2;-5;3)$

Baøi 20. Cho $\vec a = (1;-3;4)$.

a) Tìm *y* vaø *z* ñeå $\vec b = (2;y;z)$ cuøng phöông vôùi $\vec a$.

b) Tìm toaï ñoä cuûa vectô $\vec c$, bieát raèng $\vec a$ vaø $\vec c$ ngöôïc höôùng vaø $|\vec c| = 2|\vec a|$.

Baøi 21. Cho ba vectô $\vec a = (1;-1;1)$, $\vec b = (4;0;-1)$, $\vec c = (3;2;-1)$. Tìm:

a) $(\vec a.\vec b)\vec c$ b) $\vec a^2(\vec b.\vec c)$ c) $\vec a^2\vec b + \vec b^2\vec c + \vec c^2\vec a$

d) $3\vec a - 2(\vec a.\vec b)\vec b + \vec c^2\vec b$ e) $4\vec a.\vec c + \vec b^2 - 5\vec c^2$

Baøi 22. Tính goùc giöõa hai vectô $\vec a$ vaø $\vec b$:

a) $\vec a = (4;3;1)$, $\vec b = (-1;2;3)$ b) $\vec a = (2;5;4)$, $\vec b = (6;0;-3)$

c) $\vec a = (2;1;-2)$, $\vec b = (0;-\sqrt2;\sqrt2)$ d) $\vec a = (3;2;2\sqrt3)$, $\vec b = (\sqrt3;2\sqrt3;-1)$

e) $\vec a = (-4;2;4)$, $\vec b = (2\sqrt2;-2\sqrt2;0)$ f) $\vec a = (3;-2;1)$, $\vec b = (2;1;-1)$

Baøi 23. Xeùt söï ñoàng phaúng cuûa ba vectô $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ trong moãi tröôøng hôïp sau ñaây:

a) $\vec a = (1;-1;1)$, $\vec b = (0;1;2)$, $\vec c = (4;2;3)$ b) $\vec a = (4;3;4)$, $\vec b = (2;-1;2)$, $\vec c = (1;2;1)$

c) $\vec a = (-3;1;-2)$, $\vec b = (1;1;1)$, $\vec c = (-2;2;1)$ d) $\vec a = (4;2;5)$, $\vec b = (3;1;3)$, $\vec c = (2;0;1)$

e) $\vec a = (2;3;1), \vec b = (1;-2;0), \vec c = (3;-2;4)$ f) $\vec a = (5;4;-8), \vec b = (-2;3;0), \vec c = (1;7;-7)$

g) $\vec a = (2;-4;3), \vec b = (1;2;-2), \vec c = (3;-2;1)$ h) $\vec a = (2;-4;3), \vec b = (-1;3;-2), \vec c = (3;-2;1)$

Baøi 24. Chöùng toû boán vectô $\vec a, \vec b, \vec c, \vec d$ ñoàng phaúng:

a) $\vec a = (-2;-6;1)$, $\vec b = (4;-3;-2)$, $\vec c = (-4;-2;2)$, $\vec d = (-2;-11;1)$

b) $\vec a = (2;6;-1)$, $\vec b = (2;1;-1)$, $\vec c = (-4;3;2)$, $\vec d = (2;11;-1)$

VAÁN ÑEÀ 2: Xaùc ñònh ñieåm trong khoaûng gian. Chöùng minh tính chaát hình hoïc. Dieän tích – Theå tích.

– Söû duïng caùc coâng thöùc veà toaï ñoä cuûa vectô vaø cuûa ñieåm trong khoâng gian.

– Söû duïng caùc pheùp toaùn veà vectô trong khoâng gian.

– Coâng thöùc xaùc ñònh toaï ñoä cuûa caùc ñieåm ñaëc bieät.

– Tính chaát hình hoïc cuûa caùc ñieåm ñaëc bieät:

- ***A, B, C thaúng haøng*** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ***cuøng phöông*** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \vec 0$
- ***ABCD laø hình bình haønh*** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- ***Cho ΔABC coù caùc chaân E, F cuûa caùc ñöôøng phaân giaùc trong vaø ngoaøi cuûa goùc A cuûa ΔABC treân BC. Ta coù:*** $\overrightarrow{EB} = -\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FB} = \dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{FC}$
- ***A, B, C, D khoâng ñoàng phaúng*** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ***khoâng ñoàng phaúng*** $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0$

Baøi 1. Cho ñieåm M. Tìm toïa ñoä hình chieáu vuoâng goùc cuûa ñieåm M:

• Treân caùc maët phaúng toïa ñoä: Oxy, Oxz, Oyz • Treân caùc truïc toïa ñoä: Ox, Oy, Oz

a) $M(1;2;3)$ b) $M(3;-1;2)$ c) $M(-1;1;-3)$ d) $M(1;2;-1)$

e) $M(2;-5;7)$ f) $M(22;-15;7)$ g) $M(11;-9;10)$ h) $M(3;6;7)$

Baøi 2. Cho ñieåm M. Tìm toïa ñoä cuûa ñieåm M′ ñoái xöùng vôùi ñieåm M:

• Qua goác toaï ñoä • Qua mp(Oxy) • Qua truïc Oy

a) $M(1;2;3)$ b) $M(3;-1;2)$ c) $M(-1;1;-3)$ d) $M(1;2;-1)$

e) $M(2;-5;7)$ f) $M(22;-15;7)$ g) $M(11;-9;10)$ h) $M(3;6;7)$

Baøi 3. Xeùt tính thaúng haøng cuûa caùc boä ba ñieåm sau:

a) $A(1;3;1), B(0;1;2), C(0;0;1)$ b) $A(1;1;1), B(-4;3;1), C(-9;5;1)$

c) $A(10;9;12), B(-20;3;4), C(-50;-3;-4)$ d) $A(-1;5;-10), B(5;-7;8), C(2;2;-7)$

Baøi 4. Cho ba ñieåm A, B, C.

- Chöùng toû ba ñieåm A, B, C taïo thaønh moät tam giaùc.
- Tìm toaï ñoä troïng taâm G cuûa ΔABC.
- Xaùc ñònh ñieåm D sao cho ABCD laø hình bình haønh.

a) $A(1;2;-3), B(0;3;7), C(12;5;0)$ b) $A(0;13;21), B(11;-23;17), C(1;0;19)$

c) $A(3;-4;7), B(-5;3;-2), C(1;2;-3)$ d) $A(4;2;3), B(-2;1;-1), C(3;8;7)$

e) $A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3)$ f) $A(4;1;4), B(0;7;-4), C(3;1;-2)$

g) $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$ h) $A(1;-2;6), B(2;5;1), C(-1;8;4)$

Baøi 5. Treân truïc Oy *(Ox)*, tìm ñieåm caùch ñeàu hai ñieåm:

a) $A(3;1;0)$, $B(-2;4;1)$ b) $A(1;-2;1), B(11;0;7)$ c) $A(4;1;4), B(0;7;-4)$

d) $A(3;-1;2), B(1;2;-1)$ e) $A(3;-4;7), B(-5;3;-2)$ f) $A(4;2;3), B(-2;1;-1)$

Baøi 6. Treân maët phaúng Oxy *(Oxz, Oyz)*, tìm ñieåm caùch ñeàu ba ñieåm:

a) $A(1;1;1), B(-1;1;0), C(3;1;-1)$ b) $A(-3;2;4), B(0;0;7), C(-5;3;3)$

c) $A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3)$ d) $A(0;13;21), B(11;-23;17), C(1;0;19)$

e) $A(1;0;2), B(-2;1;1), C(1;-3;-2)$ f) $A(1;-2;6), B(2;5;1), C(-1;8;4)$

Baøi 7. Cho boán ñieåm A, B, C, D.

- Chöùng minh A, B, C, D laø boán ñænh cuûa moät töù dieän.
- Tìm toïa ñoä troïng taâm G cuûa töù dieän ABCD.

a) $A(2;5;-3)$, $B(1;0;0)$, $C(3;0;-2)$, $D(-3;-1;2)$ b) $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(-2;1;-1)$

c) $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$ d) $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;4;6)$

e) $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8)$ f) $A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4), D(1;5;0)$

g) $A(2;4;1), B(-1;0;1), C(-1;4;2), D(1;-2;1)$ h) $A(-3;2;4), B(2;5;-2), C(1;-2;2), D(4;2;3)$

i) $A(3;4;8), B(-1;2;1), C(5;2;6), D(-7;4;3)$ k) $A(-3;-2;6), B(-2;4;4), C(9;9;-1), D(0;0;1)$

Baøi 8. Cho hình hoäp ABCD.A'B'C'D'. Tìm toaï ñoä caùc ñænh coøn laïi.

a) $A(1;0;1), B(2;1;2), D(1;-1;1), C'(4;5;-5)$ b) $A(2;5;-3), B(1;0;0), C(3;0;-2), A'(-3;-1;2)$

c) $A(0;2;1), B(1;-1;1), D(0;0;0;), A'(-1;1;0)$ d) $A(0;2;2), B(0;1;2), C(-1;1;1), C'(1;-2;-1)$

VAÁN ÑEÀ 3: Phöông trình maët caàu

*Ñeå vieát phöông trình maët caàu (S), ta caàn xaùc ñònh **taâm I** vaø **baùn kính R** cuûa maët caàu.*

Daïng 1: *(S)* coù taâm *I(a; b; c)* vaø baùn kính *R*:

$$\textbf{(S): } (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Daïng 2: *(S)* coù taâm *I(a; b; c)* vaø ñi qua ñieåm A:

Khi ñoù baùn kính R = IA.

Daïng 3: *(S)* nhaän ñoaïn thaúng AB cho tröôùc laøm ñöôøng kính:

– *Taâm I laø trung ñieåm cuûa ñoaïn thaúng AB:* $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$; $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}$; $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

– *Baùn kính R = IA =* $\dfrac{AB}{2}$.

Daïng 4: *(S)* ñi qua boán ñieåm A, B, C, D *(maët caàu ngoaïi tieáp töù dieän ABCD)*:

– *Giaû söû phöông trình maët caàu (S) coù daïng:* $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ (*).

– *Thay laàn löôït toaï ñoä cuûa caùc ñieåm A, B, C, D vaøo (*), ta ñöôïc 4 phöông trình.*

– Giaûi heä phöông trình ñoù, ta tìm ñöôïc a, b, c, d ⇒ Phöông trình maët caàu (S).

Daïng 5: *(S)* ñi qua ba ñieåm A, B, C vaø coù taâm I naèm treân maët phaúng (P) cho tröôùc:

Giaûi töông töï nhö daïng 4.

Daïng 6: *(S)* coù taâm I vaø tieáp xuùc vôùi maët caàu *(T)* cho tröôùc:

– Xaùc ñònh taâm J vaø baùn kính R′ cuûa maët caàu (T).

– Söû duïng ñieàu kieän tieáp xuùc cuûa hai maët caàu ñeå tính baùn kính R cuûa maët caàu (S).

(Xeùt hai tröôøng hôïp tieáp xuùc trong vaø tieáp xuùc ngoaøi)

Chuù yù: *Vôùi phöông trình maët caàu (S):*

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0 \qquad \text{vôùi } a^2+b^2+c^2-d>0$$

thì (S) coù taâm $I(-a;-b;-c)$ vaø baùn kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Baøi 1. Tìm taâm vaø baùn kính cuûa caùc maët caàu sau:

a) $x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$ b) $x^2+y^2+z^2+4x+8y-2z-4=0$

c) $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$ d) $x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-86=0$

e) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0$ f) $x^2+y^2+z^2-6x-12y+12z+72=0$

g) $x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-4=0$ h) $x^2+y^2+z^2-3x+4y=0$

i) $3x^2+3y^2+3z^2+6x-3y+15z-2=0$ k) $x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+10=0$

Baøi 2. Vieát phöông trình maët caàu coù taâm I vaø baùn kính R:

a) $I(1;-3;5),\ R=\sqrt{3}$ b) $I(5;-3;7),\ R=2$ c) $I(1;-3;2),\ R=5$ d) $I(2;4;-3),\ R=3$

Baøi 3. Vieát phöông trình maët caàu coù taâm I vaø ñi qua ñieåm A:

a) $I(2;4;-1),\ A(5;2;3)$ b) $I(0;3;-2),\ A(0;0;0)$ c) $I(3;-2;1),\ A(2;1;-3)$

d) $I(4;-4;-2),\ A(0;0;0)$ e) $I(4;-1;2),\ A(1;-2;-4)$

Baøi 4. Vieát phöông trình maët caàu coù ñöôøng kính AB, vôùi:

a) $A(2;4;-1),\ B(5;2;3)$ b) $A(0;3;-2),\ B(2;4;-1)$ c) $A(3;-2;1),\ B(2;1;-3)$

d) $A(4;-3;-3),\ B(2;1;5)$ e) $A(2;-3;5),\ B(4;1;-3)$ f) $A(6;2;-5),\ B(-4;0;7)$

Baøi 5. Vieát phöông trình maët caàu ngoaïi tieáp töù dieän ABCD, vôùi:

a) $A(1;1;0),\ B(0;2;1),\ C(1;0;2),\ D(1;1;1)$ b) $A(2;0;0),\ B(0;4;0),\ C(0;0;6),\ D(2;4;6)$

c) $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8)$ d) $A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4), D(1;5;0)$

e) $A(6;-2;3), B(0;1;6), C(2;0;-1), D(4;1;0)$ f) $A(0;1;0), B(2;3;1), C(-2;2;2), D(1;-1;2)$

Baøi 6. Vieát phöông trình maët caàu ñi qua ba ñieåm A, B, C vaø coù taâm naèm trong maët phaúng (P) cho tröôùc, vôùi: a) $\begin{cases} A(1;2;0), B(-1;1;3), C(2;0;-1) \\ (P)\equiv(Oxz) \end{cases}$ b) $\begin{cases} A(2;0;1), B(1;3;2), C(3;2;0) \\ (P)\equiv(Oxy) \end{cases}$

Baøi 7. Vieát phöông trình maët caàu (S) coù taâm I vaø tieáp xuùc vôùi maët caàu (T), vôùi:

a) $\begin{cases} I(-5;1;1) \\ (T): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} I(-3;2;2) \\ (T): x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z+5=0 \end{cases}$

III. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1. Vectô phaùp tuyeán – Caëp vectô chæ phöông cuûa maët phaúng

• Vectô $\vec{n}\neq\vec{0}$ laø VTPT cuûa (α) neáu giaù cuûa $\vec{n}$ vuoâng goùc vôùi (α).

• Hai vectô $\vec{a},\vec{b}$ khoâng cuøng phöông laø caëp VTCP cuûa (α) neáu caùc giaù cuûa chuùng song song hoaëc naèm treân (α).

Chuù yù: • *Neáu $\vec{n}$ laø moät VTPT cuûa (α) thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cuõng laø VTPT cuûa (α).*

• *Neáu $\vec{a},\vec{b}$ laø moät caëp VTCP cuûa (α) thì $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$ laø moät VTPT cuûa (α).*

2. Phöông trình toång quaùt cuûa maët phaúng

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0 \text{ vôùi } A^2+B^2+C^2>0}$$

• Neáu (α) coù phöông trình $Ax+By+Cz+D=0$ thì $\vec{n}=(A;B;C)$ laø moät VTPT cuûa (α).

• Phöông trình maët phaúng ñi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ vaø coù moät VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$ laø:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

3. Caùc tröôøng hôïp rieâng

Caùc heä soá	Phöông trình maët phaúng (α)	Tính chaát maët phaúng (α)
D = 0	$Ax+By+Cz=0$	(α) ñi qua goác toaï ñoä O
A = 0	$By+Cz+D=0$	(α) // Ox hoaëc (α) ⊃ Ox
B = 0	$Ax+Cz+D=0$	(α) // Oy hoaëc (α) ⊃ Oy
C = 0	$Ax+By+D=0$	(α) // Oz hoaëc (α) ⊃ Oz
A = B = 0	$Cz+D=0$	(α) // (Oxy) hoaëc (α) ≡ (Oxy)
A = C = 0	$By+D=0$	(α) // (Oxz) hoaëc (α) ≡ (Oxz)
B = C = 0	$Ax+D=0$	(α) // (Oyz) hoaëc (α) ≡ (Oyz)

Chuù yù: • *Neáu trong phöông trình cuûa (α) khoâng chöùa aån naøo thì (α) song song hoaëc chöùa truïc töông öùng.*

• *Phöông trình maët phaúng theo ñoaïn chaén:* $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

(α) caét caùc truïc toaï ñoä taïi caùc ñieåm (a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c)

4. Vò trí töông ñoái cuûa hai maët phaúng

Cho hai maët phaúng (α), (β) coù phöông trình: (α): $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

(β): $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

• *(α), (β) caét nhau* $\Leftrightarrow A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$

• $(\alpha)\,//\,(\beta) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$ • $(\alpha)\equiv(\beta) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$

• $(\alpha)\perp(\beta) \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

5. Khoaûng caùch töø ñieåm *$M_0(x_0; y_0; z_0)$* ñeán maët phaúng *(α): Ax + By + Cz + D = 0*

$$\boxed{d\left(M_0,(\alpha)\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

VAÁN ÑEÀ 1: Vieát phöông trình maët phaúng

Ñeå laäp phöông trình maët phaúng (α) ta caàn xaùc ñònh moät** ñieåm **thuoäc (α) vaø moät** VTPT **cuûa noù.

Daïng 1: ***(α)* ñi qua ñieåm** $M(x_0;y_0;z_0)$ **coù VTPT** $\vec{n}=(A;B;C)$**:**

(α): $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

Daïng 2: ***(α)* ñi qua ñieåm** $M(x_0;y_0;z_0)$ **coù caëp VTCP** $\vec{a},\vec{b}$**:**

Khi ñoù moät VTPT cuûa (α) laø $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$**.**

Daïng 3: ***(α)* ñi qua ñieåm** $M(x_0;y_0;z_0)$ **vaø song song vôùi maët phaúng *(β)*: *Ax + By + Cz + D = 0*:**

(α): $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

Daïng 4: **(α) ñi qua 3 ñieåm khoâng thaúng haøng A, B, C:**

Khi ñoù ta coù theå xaùc ñònh moät VTPT cuûa (α) laø: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$

Daïng 5: **(α) ñi qua moät ñieåm M vaø moät ñöôøng thaúng (d) khoâng chöùa M:**

– Treân (d) laáy ñieåm A vaø VTCP $\vec{u}$.

– Moät VTPT cuûa (α) laø: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]$

Daïng 6: **(α) ñi qua moät ñieåm M vaø vuoâng goùc vôùi moät ñöôøng thaúng (d):**

VTCP $\vec{u}$ cuûa ñöôøng thaúng (d) laø moät VTPT cuûa (α).

Daïng 7: **(α) ñi qua 2 ñöôøng thaúng caét nhau d_1, d_2:**

– Xaùc ñònh caùc VTCP $\vec{a},\vec{b}$ cuûa caùc ñöôøng thaúng d_1, d_2.

– Moät VTPT cuûa (α) laø: $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

– Laáy moät ñieåm M thuoäc d_1 hoaëc d_2 $\Rightarrow$ M $\in(\alpha)$.

Daïng 8: **(α) chöùa ñöôøng thaúng d_1 vaø song song vôùi ñöôøng thaúng d_2 *(d_1, d_2 cheùo nhau)*:**

– Xaùc ñònh caùc VTCP $\vec{a},\vec{b}$ cuûa caùc ñöôøng thaúng d_1, d_2.

– Moät VTPT cuûa (α) laø: $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

– Laáy moät ñieåm M thuoäc d_1 $\Rightarrow$ M $\in(\alpha)$.

Daïng 9: **(α) ñi qua ñieåm M vaø song song vôùi hai ñöôøng thaúng cheùo nhau d_1, d_2:**

– Xaùc ñònh caùc VTCP $\vec{a},\vec{b}$ cuûa caùc ñöôøng thaúng d_1, d_2.

– Moät VTPT cuûa (α) laø: $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Daïng 10: **(α) ñi qua moät ñöôøng thaúng (d) vaø vuoâng goùc vôùi moät maët phaúng (β):**

– Xaùc ñònh VTCP $\vec{u}$ cuûa (d) vaø VTPT $\vec{n}_\beta$ cuûa (β).

– Moät VTPT cuûa (α) laø: $\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{n}_\beta\right]$.

– Laáy moät ñieåm M thuoäc d $\Rightarrow$ M $\in(\alpha)$.

Daïng 11: **(α) ñi qua ñieåm M vaø vuoâng goùc vôùi hai maët phaúng caét nhau (β), (γ):**

– Xaùc ñònh caùc VTPT $\vec{n}_\beta,\vec{n}_\gamma$ cuûa (β) vaø (γ).

– Moät VTPT cuûa (α) laø: $\vec{n}=\left[\vec{u}_\beta,\vec{n}_\gamma\right]$.

Daïng 12: **(α) ñi qua ñöôøng thaúng (d) cho tröôùc vaø caùch ñieåm M cho tröôùc moät khoaûng k cho tröôùc:**

– Giaû söû (α) coù phöông trình: $Ax+By+Cz+D=0\left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$.

– Laáy 2 ñieåm A, B $\in$ (d) $\Rightarrow$ A, B $\in(\alpha)$ (ta ñöôïc hai phöông trình (1), (2)).

– Töø ñieàu kieän khoaûng caùch $d(M,(\alpha))=k$, ta ñöôïc phöông trình (3).

– Giaûi heä phöông trình (1), (2), (3) (baèng caùch cho giaù trò moät aån, tìm caùc aån coøn laïi).

Daïng 13: **(α) laø tieáp xuùc vôùi maët caàu (S) taïi ñieåm H:**

– Giaû söû maët caåu (S) coù taâm I vaø baùn kính R.

– Moät VTPT cuûa (α) laø: $\vec{n}=\overrightarrow{IH}$

Chuù yù: ***Ñeå vieát phöông trình maët phaúng caàn naém vöõng caùc caùch***

xaùc ñònh maët phaúng ñaõ hoïc ô û lôùp 11.

Baøi 25. Vieát phöông trình maët phaúng (P) ñi qua ñieåm M vaø coù VTPT $\vec{n}$ cho tröôùc:

a) $M(3;1;1)$, $\vec{n}=(-1;1;2)$ b) $M(-2;7;0)$, $\vec{n}=(3;0;1)$ c) $M(4;-1;-2)$, $\vec{n}=(0;1;3)$

d) $M(2;1;-2)$, $\vec{n}=(1;0;0)$ e) $M(3;4;5)$, $\vec{n}=(1;-3;-7)$ f) $M(10;1;9)$, $\vec{n}=(-7;10;1)$

Baøi 26. Vieát phöông trình maët phaúng trung tröïc cuûa ñoaïn thaúng AB cho tröôùc, vôùi:

a) $A(2;1;1)$, $B(2;-1;-1)$ b) $A(1;-1;-4)$, $B(2;0;5)$ c) $A(2;3;-4)$, $B(4;-1;0)$

d) $A\left(\frac{1}{2};-1;0\right)$, $B\left(1;-\frac{1}{2};5\right)$ e) $A\left(1;\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-3;\frac{1}{3};1\right)$ f) $A(2;-5;6)$, $B(-1;-3;2)$

Baøi 27. Vieát phöông trình maët phaúng ñi qua ñieåm M vaø coù caëp VTCP $\vec{a},\vec{b}$ cho tröôùc, vôùi:

a) $M(1;2;-3)$, $\vec{a}=(2;1;2)$, $\vec{b}=(3;2;-1)$ b) $M(1;-2;3)$, $\vec{a}=3;-1;-2)$, $\vec{b}=(0;3;4)$

c) $M(-1;3;4)$, $\vec{a}=(2;7;2)$, $\vec{b}=(3;2;4)$ d) $M(-4;0;5)$, $\vec{a}=(6;-1;3)$; $\vec{b}=(3;2;1)$

Baøi 28. Vieát phöông trình maët phaúng (α) ñi qua ñieåm M vaø song song vôùi maët phaúng (β) cho tröôùc, vôùi:

a) $M(2;1;5)$, $(\beta)=(Oxy)$ b) $M(1;-2;1)$, $(\beta): 2x-y+3=0$

c) $M(-1;1;0)$, $(\beta): x-2y+z-10=0$ d) $M(3;6;-5)$, $(\beta): -x+z-1=0$

e) $M(2;-3;5)$, $(\beta): x+2y-z+5=0$ f) $M(1;1;1)$, $(\beta): 10x-10y+20z-40=0$

Baøi 29. Vieát phöông trình maët phaúng (α) ñi qua ñieåm M vaø laàn löôït song song vôùi caùc maët phaúng toaï ñoä, vôùi:

a) $M(2;1;5)$ b) $M(1;-2;1)$ c) $M(-1;1;0)$ d) $M(3;6;-5)$

e) $M(2;-3;5)$ f) $M(1;1;1)$ g) $M(-1;1;0)$ h) $M(3;6;-5)$

Baøi 30. Vieát phöông trình maët phaúng (α) ñi qua ba ñieåm A, B, C khoâng thaúng haøng cho tröôùc, vôùi:

a) $A(1;-2;4)$, $B(3;2;-1)$, $C(-2;1;-3)$ b) $A(0;0;0)$, $B(-2;-1;3)$, $C(4;-2;1)$

c) $A(-1;2;3)$, $B(2;-4;3)$, $C(4;5;6)$ d) $A(3;-5;2)$, $B(1;-2;0)$, $C(0;-3;7)$

e) $A(2;-4;0)$, $B(5;1;7)$, $C(-1;-1;-1)$ f) $A(3;0;0)$, $B(0;-5;0)$, $C(0;0;-7)$

Baøi 31. Vieát phöông trình maët phaúng (α) ñi qua ñieåm A vaø vuoâng goùc vôùi ñöôøng thaúng ñi qua hai ñieåm B, C cho tröôùc, vôùi:

a) $A(1;-2;4)$, $B(3;2;-1)$, $C(-2;1;-3)$ b) $A(0;0;0)$, $B(-2;-1;3)$, $C(4;-2;1)$

c) $A(-1;2;3)$, $B(2;-4;3)$, $C(4;5;6)$ d) $A(3;-5;2)$, $B(1;-2;0)$, $C(0;-3;7)$

e) $A(2;-4;0)$, $B(5;1;7)$, $C(-1;-1;-1)$ f) $A(3;0;0)$, $B(0;-5;0)$, $C(0;0;-7)$

Baøi 32. Vieát phöông trình maët phaúng (α) ñi qua hai ñieåm A, B vaø vuoâng goùc vôùi maët phaúng (β) cho tröôùc, vôùi:

a) $\begin{cases} A(3;1;-1),\ B(2;-1;4) \\ (\beta): 2x-y+3z-1=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} A(-2;-1;3),\ B(4;-2;1) \\ (\beta): 2x+3y-2z+5=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} A(2;-1;3),\ B(-4;7;-9) \\ (\beta): 3x+4y-8z-5=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} A(3;-1;-2),\ B(-3;1;2) \\ (\beta): 2x-2y-2z+5=0 \end{cases}$

Baøi 33. Vieát phöông trình maët phaúng (α) ñi qua ñieåm M vaø vuoâng goùc vôùi hai maët phaúng (β), (γ) cho tröôùc, vôùi:

a) $M(-1;-2;5)$, $(\beta): x+2y-3z+1=0$, $(\gamma): 2x-3y+z+1=0$

b) $M(1;0;-2)$, $(\beta): 2x+y-z-2=0$, $(\gamma): x-y-z-3=0$

c) $M(2;-4;0)$, $(\beta): 2x+3y-2z+5=0$, $(\gamma): 3x+4y-8z-5=0$

d) $M(5;1;7)$, $(\beta): 3x-4y+3z+6=0$, $(\gamma): 3x-2y+5z-3=0$

Baøi 34. Vieát phöông trình maët phaúng (α) ñi qua ñieåm M vaø giao tuyeán cuûa hai maët phaúng (P), (Q) cho tröôùc, vôùi:

a) $M(1;2;-3)$, $(P): 2x-3y+z-5=0$, $(Q):\ 3x-2y+5z-1=0$

b) $M(2;1;-1)$, $(P): x-y+z-4=0$, $(Q):\ 3x-y+z-1=0$

c) $M(3;4;1)$, $(P): 19x-6y-4z+27=0$, $(Q): 42x-8y+3z+11=0$

d) $M(0;0;1)$, $(P): 5x-3y+2z-5=0$, $(Q): 2x-y-z-1=0$

VAÁN ÑEÀ 2: Vò trí töông ñoái cuûa hai maët phaúng

Baøi 1. Xeùt vò trí töông ñoái cuûa caùc caëp maët phaúng sau:

a) $\begin{cases}2x+3y-2z+5=0\\3x+4y-8z-5=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x-4y+3z+6=0\\3x-2y+5z-3=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}5x+5y-5z-1=0\\3x+3y-3z+7=0\end{cases}$

d) $\begin{cases}6x-4y-6z+5=0\\12x-8y-12z-5=0\end{cases}$ e) $\begin{cases}2x-2y-4z+5=0\\5x-5y-10z+\dfrac{25}{2}=0\end{cases}$ f) $\begin{cases}3x-2y-6z-23=0\\3x-2y-6z+33=0\end{cases}$

Baøi 2. Xaùc ñònh *m, n* ñeå caùc caëp maët phaúng sau: • song song • caét nhau • truøng nhau

a) $\begin{cases}3x+my-2z-7=0\\nx+7y-6z+4=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}5x-2y+mz-11=0\\3x+ny+z-5=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x+my+3z-5=0\\nx-6y-6z+2=0\end{cases}$

d) $\begin{cases}3x-y+mz-9=0\\2x+ny+2z-3=0\end{cases}$ e) $\begin{cases}2x+y+3z-5=0\\mx-6y-6z-2=0\end{cases}$ f) $\begin{cases}3x-5y+mz-3=0\\2x+y-3z+1=0\end{cases}$

g) $\begin{cases}x+my-z+2=0\\2x+y+4nz-3=0\end{cases}$ h) $\begin{cases}2x-ny+2z-1=0\\3x-y+mz-2=0\end{cases}$ i) $\begin{cases}3x-(m-3)y+2z-5=0\\(m+2)x-2y+mz-10=0\end{cases}$

Baøi 3. Xaùc ñònh *m* ñeå caùc caëp maët phaúng sau vuoâng goùc vôùi nhau

a) $\begin{cases}2x-7y+mz+2=0\\3x+y-2z+15=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}(2m-1)x-3my+2z+3=0\\mx+(m-1)y+4z-5=0\end{cases}$

c) $\begin{cases}mx+2y+mz-12=0\\x+my+z+7=0\end{cases}$ d) $\begin{cases}3x-(m-3)y+2z-5=0\\(m+2)x-2y+mz-10=0\end{cases}$

e) $\begin{cases}4x-3y-3z=0\\mx+2y-7z-1=0\end{cases}$ f) $\begin{cases}3x-5y+mz-3=0\\x+3y+2z+5=0\end{cases}$

VAÁN ÑEÀ 3: Khoaûng caùch töø moät ñieåm ñeán moät maët phaúng. Khoaûng caùch giöõa hai maët phaúng song song. Hình chieáu cuûa moät ñieåm treân maët phaúng . Ñieåm ñoái xöùng cuûa moät ñieåm qua maët phaúng.

• *Khoaûng caùch töø ñieåm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ñeán maët phaúng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$*

$$\boxed{d\left(M_0,(\alpha)\right)=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

• *Khoaûng caùch giöõa hai maët phaúng song song baèng khoaûng caùch töø moät ñieåm baát kì treân maët phaúng naøy ñeán maët phaúng kia.*

Chuù yù: *Neáu hai maët phaúng khoâng song song thì khoaûng caùch giöõa chuùng baèng 0.*

• *Ñieåm H laø hình chieáu cuûa ñieåm M treân (P)* $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MH}, \vec{n} \text{ cuøng phöông}\\H\in(P)\end{cases}$

• *Ñieåm M′ ñoái xöùng vôùi ñieåm M qua (P)* $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MH}$

Baøi 1. Cho maët phaúng (P) vaø ñieåm M.

• Tính khoaûng caùch töø M ñeán (P). • Tìm toaï ñoä hình chieáu H cuûa M treân (P).

• Tìm toaï ñoä ñieåm M′ ñoái xöùng vôùi M qua (P).

a) $(P): 2x-y+2z-6=0$, $M(2;-3;5)$ b) $(P): x+y+5z-14=0$, $M(1;-4;-2)$

c) $(P): 6x-2y+3z+12=0, \quad M(3;1;-2)$ d) $(P): 2x-4y+4z+3=0, \quad M(2;-3;4)$

e) $(P): x-y+z-4=0, \quad M(2;1;-1)$ f) $(P): 3x-y+z-2=0, \quad M(1;2;4)$

Baøi 2. Tìm khoaûng caùch giöõa hai maët phaúng:

a) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x-y+3z+5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x-2y+z+1=0 \\ 6x-2y+z-3=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y+4z+5=0 \\ 3x+5y-z-1=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x-y+8z+1=0 \\ 4x-y+8z+5=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-y+4z+5=0 \\ 3x+5y-z-1=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x+6y-3z+7=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$

Baøi 3. Tìm phöông trình toång quaùt cuûa maët phaúng (P) ñi qua ñieåm A vaø song song vôùi maët phaúng (Q) cho tröôùc. Tính khoaûng caùch giöõa (P) vaø (Q):

a) $A(1;2;-3)$, $(Q): 2x-4y-z+4=0$. b) $A(3;\ 1;-2)$, $(Q): 6x-2y+3z+12=0$.

VAÁN ÑEÀ 4: Goùc giöõa hai maët phaúng

Cho hai maët phaúng (α), (β) coù phöông trình: (α): $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

(β): $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

Goùc giöõa (α), (β) ***baèng*** *hoaëc* ***buø*** *vôùi goùc giöõa hai VTPT* $\vec{n}_1, \vec{n}_2$.

$$\boxed{\cos\left((\alpha),(\beta)\right)=\frac{\left|\vec{n}_1.\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}$$

Chuù yù: • $0^0 \le \left((\alpha),(\beta)\right) \le 90^0$. • $(\alpha)\perp(\beta) \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

Baøi 1. Tính goùc giöõa hai maët phaúng:

a) $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x-y+z-5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-2z+1=0 \\ 2x+2y+z-5=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y+4z+5=0 \\ 4x+2y-z-1=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x+4y-2z+7=0 \\ 2x+4z-5=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-y-2z+3=0 \\ \sqrt{2}y+\sqrt{2}z+12=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \sqrt{3}x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}z+2=0 \\ 4x+2y+4z-9=0 \end{cases}$

Baøi 2. Tìm *m* ñeå goùc giöõa hai maët phaúng sau baèng α cho tröôùc:

a) $\begin{cases} (2m-1)x-3my+2z+3=0 \\ mx+(m-1)y+4z-5=0 \\ \alpha=90^0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx+2y+mz-12=0 \\ x+my+z+7=0 \\ \alpha=45^0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (m+2)x+2my-mz+5=0 \\ mx+(m-3)y+2z-3=0 \\ \alpha=90^0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx-y+mz+3=0 \\ (2m+1)x+(m-1)y+(m-1)z-6=0 \\ \alpha=30^0 \end{cases}$

VAÁN ÑEÀ 5: Vò trí töông ñoái giöõa maët phaúng vaø maët caàu. Phöông trình maët phaúng tieáp xuùc vôùi maët caàu

Cho maët phaúng (α): $Ax+By+Cz+D=0$ *vaø maët caàu (S):* $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

• *(α) vaø (S) khoâng coù ñieåm chung* $\Leftrightarrow d(I,(\alpha))>R$

• *(α) tieáp xuùc vôùi (S)* $\Leftrightarrow d(I,(\alpha))=R$ *(α) laø tieáp dieän*

Ñeå tìm toaï ñoä tieáp ñieåm ta coù theå thöïc hieän nhö sau:

– Vieát phöông trình ñöôøng thaúng d ñi qua taâm I cuûa (S) vaø vuoâng goùc vôùi (α).

– Tìm toaï ñoä giao ñieåm H cuûa d vaø (α).

H laø tieáp ñieåm cuûa (S) vôùi (α).

• *(α) caét (S) theo moät ñöôøng troøn* $\Leftrightarrow d(I,(\alpha))<R$

Ñeå xaùc ñònh taâm H vaø baùn kính r cuûa ñöôøng troøn giao tuyeán ta coù theå thöïc hieän nhö sau:

– Vieát phöông trình ñöôøng thaúng d ñi qua taâm I cuûa (S) vaø vuoâng goùc vôùi (α).

– Tìm toaï ñoä giao ñieåm H cuûa d vaø (α).

H laø taâm cuûa ñöôøng troøn giao tuyeán cuûa (S) vôùi (α).

Baùn kính r cuûa ñöôøng troøn giao tuyeán: $r=\sqrt{R^2-IH^2}$

Baøi 1. Xeùt vò trí töông ñoái giöõa maët phaúng (P) vaø maët caàu (S):

a) $\begin{cases}(P): 2x+2y+z-1=0\\(S): x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+5=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}(P): 2x-3y+6z-9=0\\(S): (x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=16\end{cases}$

c) $\begin{cases}(P): x+y-2z-11=0\\(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+2=0\end{cases}$ d) $\begin{cases}(P): x-2y+2z+5=0\\(S): x^2+y^2+z^2-6x-4y-8z+13=0\end{cases}$

e) $\begin{cases}(P): x+2y+2z=0\\(S): x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+10=0\end{cases}$ f) $\begin{cases}(P): z-3=0\\(S): x^2+y^2+z^2-6x+2y-16z+22=0\end{cases}$

Baøi 2. Vieát phöông trình maët caàu (S) coù taâm I vaø tieáp xuùc vôùi maët phaúng (P) cho tröôùc:

a) $I(3;-5;-2)$, $(P): 2x-y-3z+1=0$ b) $I(1;4;7)$, $(P): 6x+6y-7z+42=0$

c) $I(1;1;2)$, $(P): x+2y+2z+3=0$ d) $I(-2;1;1)$, $(P): x+2y-2z+5=0$

Baøi 3. Vieát phöông trình maët phaúng (P) tieáp xuùc vôùi maët caàu (S) cho tröôùc:

a) $(S): (x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$ taïi $M(-1;3;0)$

b) $(S): x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+5=0$ taïi $M(4;3;0)$

c) $(S): (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$ taïi $M(7;-1;5)$

d) $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$ vaø song song vôùi maët phaúng $3x-2y+6z+14=0$.

e) $(S): x^2+y^2+z^2-6x+4y+2z-11=0$ vaø song song vôùi maët phaúng $4x+3z-17=0$.

f) $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$ vaø song song vôùi maët phaúng $x+2y+2z+5=0$.

g) $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z+8=0$ vaø chöùa ñöôøng thaúng $d: x=4t+4,\ y=3t+1,\ z=t+1$

h) Tieáp xuùc vôùi maët caàu ngoaïi tieáp töù dieän ABCD taïi A vôùi A(6; –2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; –1), D(4; 1; 0).

i) Tieáp xuùc vôùi maët caàu: $x^2+y^2+z^2-10x+2y+26z-113=0$ vaø song song vôùi 2 ñöôøng thaúng: $d_1: \dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+13}{2}$, $d_1: \dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-8}{0}$.

Baøi taäp oân: Phöông trình maët phaúng

Baøi 1. Cho töù dieän ABCD.

- Vieát phöông trình caùc maët cuûa töù dieän.
- Vieát phöông trình maët phaúng chöùa moät caïnh vaø song song vôùi caïnh ñoái dieän.
- Vieát phöông trình maët phaúng ñi qua moät ñænh vaø song song vôùi maët ñoái dieän.
- Vieát phöông trình maët phaúng ñi qua caïnh AB vaø vuoâng goùc vôùi (BCD).
- Vieát phöông trình maët phaúng trung tröïc cuûa caùc caïnh töù dieän.
- Tìm toaï ñoä caùc ñieåm A′, B′, C′, D′ laàn löôït laø caùc ñieåm ñoái xöùng vôùi caùc ñieåm A, B, C, D qua caùc maët ñoái dieän.
- Tính khoaûng caùch töø moät ñænh cuûa töù dieän ñeán maët ñoái dieän.
- Vieát phöông trình maët caàu (S) ngoaïi tieáp töù dieän ABCD. Xaùc ñònh taâm I vaø baùn kính R cuûa (S).
- Vieát phöông trình caùc tieáp dieän cuûa (S) taïi caùc ñænh A, B, C, D cuûa töù dieän.
- Vieát phöông trình caùc tieáp dieän cuûa (S) song song vôùi caùc maët cuûa töù dieän.

a) $A(5;1;3)$, $B(1;6;2)$, $C(5;0;4)$, $D(4;0;6)$ b) $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$

c) $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;4;6)$ d) $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8)$

e) $A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4), D(1;5;0)$ f) $A(0;1;0), B(2;3;1), C(-2;2;2), D(1;-1;2)$

Baøi 2. Cho 2 mp(P), (Q) laàn löôït caét 3 truïc toaï ñoä taïi ñieåm: A(1; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; –3) vaø E(–2; 0; 0), F(0; 1; 0), G(0; 0; 1).

a) Tìm phöông trình toång quaùt cuûa (P) vaø (Q).
b) Tính ñoä daøi ñöôøng cao cuûa hình choùp O.ABC.
c) Tính goùc giöõa hai maët phaúng (P), (Q).

Baøi 3. Cho boán ñieåm: A(1; 1; 1), B(3; 3; 1), C(3; 1; 3) vaø D(1; 3; 3).
a) Chöùng minh ABCD laø moät töù dieän ñeàu.
b) Tìm phöông trình toång quaùt cuûa caùc maët phaúng (ABC), (ABD), (ACD), (BCD).
c) Tính goùc giöõa caùc caëp maët phaúng: (ABC) vaø (ABD), (BCD) vaø (ACD).

IV. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Phöông trình tham soá cuûa ñöôøng thaúng

- **Phöông trình tham soá** cuûa ñöôøng thaúng d ñi qua ñieåm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ vaø coù VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$:

$$\boxed{(d):\begin{cases}x=x_o+a_1t\\y=y_o+a_2t\\z=z_o+a_3t\end{cases}\quad (t\in R)}$$

- Neáu $a_1a_2a_3\neq 0$ thì $\boxed{(d):\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}}$ *ñgl **phöông trình chính taéc** cuûa d.*

2. Vò trí töông ñoái giöõa hai ñöôøng thaúng

Cho hai ñöôøng thaúng d, d' coù phöông trình tham soá laàn löôït laø:

$$d:\begin{cases}x=x_0+ta_1\\y=y_0+ta_2\\z=z_0+ta_3\end{cases}\quad \text{vaø}\quad d':\begin{cases}x=x'_0+t'a'_1\\y=y'_0+t'a'_2\\z=z'_0+t'a'_3\end{cases}$$

$$\bullet\ d\,//\,d'\ \Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a},\vec{a}'\ \text{cuøng phöông}\\ \text{heä}\begin{cases}x_0+ta_1=x'_0+t'a'_1\\y_0+ta_2=y'_0+t'a'_2\\z_0+ta_3=z'_0+t'a'_3\end{cases}\ (\text{aån } t,t')\ \text{voâ nghieäm}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a},\vec{a}'\ \text{cuøng phöông}\\M_0(x_0;y_0;z_0)\notin d'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a},\vec{a}'\ \text{cuøng phöông}\\\vec{a},\overrightarrow{M_0M'_0}\ \text{khoâng cuøng phöông}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{a},\vec{a}']=\vec{0}\\\left[\vec{a},\overrightarrow{M_0M'_0}\right]\neq\vec{0}\end{cases}$$

$$\bullet\ d\equiv d'\ \Leftrightarrow \text{heä}\begin{cases}x_0+ta_1=x'_0+t'a'_1\\y_0+ta_2=y'_0+t'a'_2\\z_0+ta_3=z'_0+t'a'_3\end{cases}\ (\text{aån } t,t')\ \text{coù voâ soá nghieäm}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a},\vec{a}'\ \text{cuøng phöông}\\M_0(x_0;y_0;z_0)\in d'\end{cases}\quad\Leftrightarrow\ \vec{a},\vec{a}',\overrightarrow{M_0M'_0}\ \text{ñoâi moät cuøng phöông}$$

$$\Leftrightarrow\ [\vec{a},\vec{a}']=\left[\vec{a},\overrightarrow{M_0M'_0}\right]=\vec{0}$$

$$\bullet\ d,\ d'\ \text{caét nhau}\ \Leftrightarrow\ \text{heä}\begin{cases}x_0+ta_1=x'_0+t'a'_1\\y_0+ta_2=y'_0+t'a'_2\\z_0+ta_3=z'_0+t'a'_3\end{cases}\ (\text{aån } t,\ t')\ \text{coù ñuùng moät nghieäm}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a},\vec{a}'\ \text{khoâng cuøng phöông}\\\vec{a},\vec{a}',\overrightarrow{M_0M'_0}\ \text{ñoàng phaúng}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{a},\vec{a}']\neq\vec{0}\\ [\vec{a},\vec{a}'].\overrightarrow{M_0M'_0}=0\end{cases}$$

• d, d′ cheùo nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a},\vec{a}' \text{ khoâng cuøng phöông} \\ \text{heä } \begin{cases} x_0 + ta_1 = x_0' + t'a_1' \\ y_0 + ta_2 = y_0' + t'a_2' \\ z_0 + ta_3 = z_0' + t'a_3' \end{cases} \text{ (aån } t, t'\text{) voâ nghieäm} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \vec{a},\vec{a}',\overrightarrow{M_0M_0'}$ khoâng ñoàng phaúng $\Leftrightarrow [\vec{a},\vec{a}'].\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0$

• $d \perp d'$ $\Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{a}'$ $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{a}' = 0$

3. Vò trí töông ñoái giöõa moät ñöôøng thaúng vaø moät maët phaúng

Cho maët phaúng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ vaø ñöôøng thaúng *d*: $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$

Xeùt phöông trình: $A(x_0 + ta_1) + B(y_0 + ta_2) + C(z_0 + ta_3) + D = 0$ (aån *t*) (*)

- *d // (α) ⇔ (*) voâ nghieäm*
- *d caét (α) ⇔ (*) coù ñuùng moät nghieäm*
- *d ⊂ (α) ⇔ (*) coù voâ soá nghieäm*

4. Vò trí töông ñoái giöõa moät ñöôøng thaúng vaø moät maët caàu

Cho ñöôøng thaúng *d*: $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$ (1) vaø maët caàu *(S)*: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ (2)

Ñeå xeùt VTTÑ cuûa *d* vaø *(S)* ta thay (1) vaøo (2), ñöôïc moät phöông trình (*).

• *d vaø (S) khoâng coù ñieåm chung ⇔ (*) voâ nghieäm* ⇔ *d(I, d) > R*

• *d tieáp xuùc vôùi (S) ⇔ (*) coù ñuùng moät nghieäm* ⇔ *d(I, d) = R*

• *d caét (S) taïi hai ñieåm phaân bieät ⇔ (*) coù hai nghieäm phaân bieät* ⇔ *d(I, d) < R*

5. Khoaûng caùch töø moät ñieåm ñeán moät ñöôøng thaúng *(chöông trình naâng cao)*

Cho ñöôøng thaúng *d* ñi qua M_0 vaø coù VTCP $\vec{a}$ vaø ñieåm M.

$$\boxed{d(M,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}}$$

6. Khoaûng caùch giöõa hai ñöôøng thaúng cheùo nhau *(chöông trình naâng cao)*

Cho hai ñöôøng thaúng cheùo nhau d_1 vaø d_2.

d_1 ñi qua ñieåm M_1 vaø coù VTCP $\vec{a}_1$, d_2 ñi qua ñieåm M_2 vaø coù VTCP $\vec{a}_2$

$$\boxed{d(d_1,d_2) = \frac{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]\right|}}$$

Chuù yù: *Khoaûng caùch giöõa hai ñöôøng thaúng cheùo nhau d_1, d_2 baèng khoaûng caùch giöõa d_1 vôùi maët phaúng (α) chöùa d_2 vaø song song vôùi d_1.*

7. Khoaûng caùch giöõa moät ñöôøng thaúng vaø moät maët phaúng song song

Khoaûng caùch giöõa ñöôøng thaúng d vôùi maët phaúng (α) song song vôùi noù baèng khoaûng caùch töø moät ñieåm M baát kì treân d ñeán maët phaúng (α).

8. Goùc giöõa hai ñöôøng thaúng

Cho hai ñöôøng thaúng d_1, d_2 laàn löôït coù caùc VTCP $\vec{a}_1,\vec{a}_2$.

*Goùc giöõa d_1, d_2 **baèng** hoaëc **buø** vôùi goùc giöõa* $\vec{a}_1,\vec{a}_2$.

$$\cos\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2\right) = \frac{\left|\vec{a}_1.\vec{a}_2\right|}{\left|\vec{a}_1\right|.\left|\vec{a}_2\right|}$$

9. Goùc giöõa moät ñöôøng thaúng vaø moät maët phaúng

Cho ñöôøng thaúng d coù VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ *vaø maët phaúng (α) coù VTPT* $\vec{n} = (A; B; C)$.

Goùc giöõa ñöôøng thaúng d vaø maët phaúng (α) baèng goùc giöõa ñöôøng thaúng d vôùi hình chieáu d′ cuûa noù treân (α).

$$\sin\left(d,(\alpha)\right)=\frac{\left|Aa_1+Ba_2+Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

VAÁN ÑEÀ 1: Laäp phöông trình ñöôøng thaúng

Ñeå laäp phöông trình ñöôøng thaúng d ta caàn xaùc ñònh moät *ñieåm* ***thuoäc d vaø moät*** *VTCP* ***cuûa noù.***

Daïng 1: ***d* ñi qua ñieåm** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ **vaø coù VTCP** $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$**:**

$$(d):\begin{cases}x=x_o+a_1t\\ y=y_o+a_2t\\ z=z_o+a_3t\end{cases}\quad (t\in R)$$

Daïng 2: ***d* ñi qua hai ñieåm *A, B*:**

Moät VTCP cuûa d laø $\overrightarrow{AB}$**.**

Daïng 3: ***d* ñi qua ñieåm** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ **vaø song song vôùi ñöôøng thaúng** Δ **cho tröôùc:**

Vì d // Δ neân VTCP cuûa Δ cuõng laø VTCP cuûa d.

Daïng 4: ***d* ñi qua ñieåm** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ **vaø vuoâng goùc vôùi maët phaúng (P) cho tröôùc:**

Vì d ⊥ (P) neân VTPT cuûa (P) cuõng laø VTCP cuûa d.

Daïng 5: ***d* laø giao tuyeán cuûa hai maët phaúng (P), (Q):**

• Caùch 1: Tìm moät ñieåm vaø moät VTCP.

– Tìm toaï ñoä moät ñieåm A ∈ d: baèng caùch giaûi heä phöông trình $\begin{cases}(P)\\ (Q)\end{cases}$ ***(vôùi vieäc choïn giaù trò cho moät aån)***

– Tìm moät VTCP cuûa d: $\vec{a}=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]$

• Caùch 2: Tìm hai ñieåm A, B thuoäc d, roài vieát phöông trình ñöôøng thaúng ñi qua hai ñieåm ñoù.

Daïng 6: ***d* ñi qua ñieåm** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ **vaø vuoâng goùc vôùi hai ñöôøng thaúng *d₁, d₂*:**

Vì d ⊥ d₁, d ⊥ d₂ neân moät VTCP cuûa d laø: $\vec{a}=\left[\vec{a}_{d_1},\vec{a}_{d_2}\right]$

Daïng 7: ***d* ñi qua ñieåm** $M_0(x_0;y_0;z_0)$**, vuoâng goùc vaø caét ñöôøng thaúng *Δ*.**

• Caùch 1: Goïi H laø hình chieáu vuoâng goùc cuûa M₀ treân ñöôøng thaúng Δ.

$$\begin{cases}H\in\Delta\\ \overrightarrow{M_0H}\perp\vec{u}_{\Delta}\end{cases}$$

Khi ñoù ñöôøng thaúng d laø ñöôøng thaúng ñi qua M₀, H.

• Caùch 2: Goïi (P) laø maët phaúng ñi qua A vaø vuoâng goùc vôùi d; (Q) laø maët phaúng ñi qua A vaø chöùa d. Khi ñoù d = (P) ∩ (Q)

Daïng 8: ***d* ñi qua ñieåm** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ **vaø caét hai ñöôøng thaúng *d₁, d₂*:**

• Caùch 1: Goïi M₁ ∈ d₁, M₂ ∈ d₂. Töø ñieàu kieän M, M₁, M₂ thaúng haøng ta tìm ñöôïc M₁, M₂. Töø ñoù suy ra phöông trình ñöôøng thaúng d.

• Caùch 2: Goïi (P) = (M_0,d_1)***, (Q) =*** (M_0,d_2)***. Khi ñoù d = (P) ∩ (Q). Do ñoù, moät VTCP cuûa d coù theå choïn laø*** $\vec{a}=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]$**.**

Daïng 9: ***d* naèm trong maët phaúng (P) vaø caét caû hai ñöôøng thaúng *d₁, d₂*:**

Tìm caùc giao ñieåm A = $d_1 \cap (P)$, B = $d_2 \cap (P)$. Khi ñoù d chính laø ñöôøng thaúng AB.

Daïng 10: **d song song vôùi Δ vaø caét caû hai ñöôøng thaúng d_1, d_2:**

Vieát phöông trình maët phaúng (P) chöùa Δ vaø d_1, maët phaúng (Q) chöùa Δ vaø d_2.

Khi ñoù d = (P) $\cap$ (Q).

Daïng 11: **d laø ñöôøng vuoâng goùc chung cuûa hai ñöôøng thaúng d_1, d_2 cheùo nhau:**

• Caùch 1: Goïi M $\in d_1$, N $\in d_2$. Töø ñieàu kieän $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$, ta tìm ñöôïc M, N.

Khi ñoù, d laø ñöôøng thaúng MN.

• Caùch 2:

– Vì d $\perp d_1$ vaø d $\perp d_2$ neân moät VTCP cuûa d coù theå laø: $\vec{a} = \left[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}\right]$.

– Laäp phöông trình maët phaúng (P) chöùa d vaø d_1, baèng caùch:

+ Laáy moät ñieåm A treân d_1.

+ Moät VTPT cuûa (P) coù theå laø: $\vec{n}_P = \left[\vec{a}, \vec{a}_{d_1}\right]$.

– Töông töï laäp phöông trình maët phaúng (Q) chöùa d vaø d_2.

Khi ñoù d = (P) $\cap$ (Q).

Daïng 12: **d laø hình chieáu cuûa ñöôøng thaúng Δ leân maët phaúng (P):**

• Laäp phöông trình maët phaúng (Q) chöùa Δ vaø vuoâng goùc vôùi maët phaúng (P) baèng caùch:

– Laáy M $\in \Delta$.

– Vì (Q) chöùa Δ vaø vuoâng goùc vôùi (P) neân $\vec{n}_Q = \left[\vec{a}_\Delta, \vec{n}_P\right]$.

Khi ñoù d = (P) $\cap$ (Q).

Daïng 13: **d ñi qua ñieåm M, vuoâng goùc vôùi d_1 vaø caét d_2:**

• Caùch 1: Goïi N laø giao ñieåm cuûa d vaø d_2. Töø ñieàu kieän MN $\perp d_1$, ta tìm ñöôïc N.

Khi ñoù, d laø ñöôøng thaúng MN.

• Caùch 2:

– Vieát phöông trình maët phaúng (P) qua M vaø vuoâng goùc vôùi d_1.

– Vieát phöông trình maët phaúng (Q) chöùa M vaø d_2.

Khi ñoù d = (P) $\cap$ (Q).

Baøi 35. Vieát phöông trình tham soá cuûa ñöôøng thaúng ñi qua ñieåm M vaø coù VTCP $\vec{a}$ cho tröôùc:

a) $M(1;2;-3)$, $\vec{a} = (-1;3;5)$ b) $M(0;-2;5)$, $\vec{a} = (0;1;4)$ c) $M(1;3;-1)$, $\vec{a} = (1;2;-1)$

d) $M(3;-1;-3)$, $\vec{a} = (1;-2;0)$ e) $M(3;-2;5)$, $\vec{a} = (-2;0;4)$ f) $M(4;3;-2)$, $\vec{a} = (-3;0;0)$

Baøi 36. Vieát phöông trình tham soá cuûa ñöôøng thaúng ñi qua hai ñieåm A, B cho tröôùc:

a) $A(2;3;-1)$, $B(1;2;4)$ b) $A(1;-1;0)$, $B(0;1;2)$ c) $A(3;1;-5)$, $B(2;1;-1)$

d) $A(2;1;0)$, $B(0;1;2)$ e) $A(1;2;-7)$, $B(1;2;4)$ f) $A(-2;1;3)$, $B(4;2;-2)$

Baøi 37. Vieát phöông trình tham soá cuûa ñöôøng thaúng ñi qua ñieåm A vaø song song vôùi ñöôøng thaúng Δ cho tröôùc:

a) $A(3;2;-4)$, $\Delta \equiv Ox$ b) $A(2;-5;3)$, Δ *ñi qua* $M(5;3;2), N(2;1;-2)$

c) $A(2;-5;3),\ \Delta:\begin{cases}x=2-3t\\y=3+4t\\z=5-2t\end{cases}$ d) $A(4;-2;2),\ \Delta:\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-2}{3}$

e) $A(1;-3;2),\ \Delta:\begin{cases}x=3+4t\\y=2-2t\\z=3t-1\end{cases}$ f) $A(5;2;-3),\ \Delta:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{4}$

Baøi 38. Vieát phöông trình tham soá cuûa ñöôøng thaúng ñi qua ñieåm A vaø vuoâng goùc vôùi maët phaúng (P) cho tröôùc:

a) $A(-2;4;3),\ (P):2x-3y+6z+19=0$ b) $A(1;-1;0),\ (P):$ *caù mp toaï ño*

c) $A(3;2;1),\ (P):2x-5y+4=0$ d) $A(2;-3;6),\ (P):2x-3y+6z+19=0$

Baøi 39. Vieát phöông trình tham soá cuûa ñöôøng thaúng laø giao tuyeán cuûa hai maët phaúng (P), (Q) cho tröôùc:

a) $\begin{cases}(P):6x+2y+2z+3=0\\(Q):3x-5y-2z-1=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}(P):2x-3y+3z-4=0\\(Q):x+2y-z+3=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}(P):3x+3y-4z+7=0\\(Q):x+6y+2z-6=0\end{cases}$

d) $\begin{cases}(P):2x+y-z+3=0\\(Q):x+y+z-1=0\end{cases}$ e) $\begin{cases}(P):x+z-1=0\\(Q):y-2=0\end{cases}$ f) $\begin{cases}(P):2x+y+z-1=0\\(Q):x+z-1=0\end{cases}$

Baøi 40. Vieát phöông trình tham soá cuûa ñöôøng thaúng ñi qua ñieåm A vaø vuoâng goùc vôùi hai ñöôøng thaúng *d_1, d_2* cho tröôùc:

a) $A(1;0;5),\ d_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-2t\\z=1+t\end{cases},\ d_2:\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=1-3t\end{cases}$ b) $A(2;-1;1),\ d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=3\end{cases},\ d_2:\begin{cases}x=1+3t\\y=-2+t\\z=3+t\end{cases}$

c) $A(1;-2;3),\ d_1:\begin{cases}x=1-t\\y=-2-2t\\z=3-3t\end{cases},\ d_2:\begin{cases}x=1\\y=-2+t\\z=3+t\end{cases}$ d) $A(4;1;4),\ d_1:\begin{cases}x=-7+3t\\y=4-2t\\z=4+3t\end{cases},\ d_2:\begin{cases}x=1+t\\y=-9+2t\\z=-12-t\end{cases}$

e) $A(2;-1;-3),\ d_1:\begin{cases}x=1+3t\\y=1+t\\z=-2+2t\end{cases},\ d_2:\begin{cases}x=2t\\y=-3+4t\\z=2-t\end{cases}$ f) $A(3;1;-4),d_1:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=-2t\end{cases},d_2:\begin{cases}x=t\\y=1-2t\\z=0\end{cases}$

Baøi 41. Vieát phöông trình tham soá cuûa ñöôøng thaúng ñi qua ñieåm A, vuoâng goùc vaø caét ñöôøng thaúng Δ cho tröôùc:

a) $A(1;2;-2),\ \Delta:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ b) $A(-4;-2;4),\ d:\begin{cases}x=-3+2t\\y=1-t\\z=-1+4t\end{cases}$

c) $A(2;-1;-3),\ \Delta:\begin{cases}x=1+3t\\y=1+t\\z=-2+2t\end{cases}$ d) $A(3;1;-4),\Delta:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=-2t\end{cases}$

e) $A(1;-2;3),\ \Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=-2-2t\\z=3-3t\end{cases}$ f) $A(2;-1;1),\ \Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=3\end{cases}$

Baøi 42. Vieát phöông trình tham soá cuûa ñöôøng thaúng ñi qua ñieåm A vaø caét caû hai ñöôøng thaúng *d_1, d_2* cho tröôùc:

a) $A(1;0;5),\ d_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-2t\\z=1+t\end{cases},\ d_2:\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=1-3t\end{cases}$ b) $A(2;-1;1),\ d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=3\end{cases},\ d_2:\begin{cases}x=1+3t\\y=-2+t\\z=3+t\end{cases}$

c) $A(-4;-5;3),d_1:\begin{cases}x=-1+3t\\y=-3-2t\\z=2-t\end{cases},d_2:\begin{cases}x=2+2t\\y=-1+3t\\z=1-5t\end{cases}$ d) $A(2;1;-1),\ d_1:\begin{cases}x=1+3t\\y=-2+4t\\z=-3+5t\end{cases},\ d_2:\begin{cases}x=-t\\y=t\\z=2t\end{cases}$

e) $A(2;3;-1),\ d_1:\begin{cases}x=2+t\\y=1-2t\\z=1+3t\end{cases},\ d_2:\begin{cases}x=-4+3t\\y=1+t\\z=-2+3t\end{cases}$ f) $A(3;-2;5), d_1:\begin{cases}x=-3+3t\\y=1+4t\\z=2+2t\end{cases},d_2:\begin{cases}x=3+2t\\y=1-t\\z=2-3t\end{cases}$

Baøi 43. Vieát phöông trình tham soá cuûa ñöôøng thaúng naèm trong maët phaúng *(P)* vaø caét caû hai ñöôøng thaúng d_1, d_2 cho tröôùc:

a) $\begin{cases}(P): y+2z=0\\ d_1:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{4},\ d_2:\begin{cases}x=2-t\\y=4+2t\\z=1\end{cases}\end{cases}$ b) $\begin{cases}(P): 6x+2y+2z+3=0\\ d_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-2t\\z=1+t\end{cases},\ d_2:\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=1-3t\end{cases}\end{cases}$

c) $\begin{cases}(P): 2x-3y+3z-4=0\\ d_1:\begin{cases}x=-7+3t\\y=4-2t\\z=4+3t\end{cases},\ d_2:\begin{cases}x=1+t\\y=-9+2t\\z=-12-t\end{cases}\end{cases}$ d) $\begin{cases}(P): 3x+3y-4z+7=0\\ d_1:\begin{cases}x=1-t\\y=-2-2t\\z=3-3t\end{cases},\ d_2:\begin{cases}x=1\\y=-2+t\\z=3+t\end{cases}\end{cases}$

Baøi 44. Vieát phöông trình tham soá cuûa ñöôøng thaúng song song vôùi ñöôøng thaúng Δ vaø caét caû hai ñöôøng thaúng d_1, d_2 cho tröôùc:

a) $\begin{cases}\Delta:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}\\ d_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}\\ d_2:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+3}{1}\end{cases}$ b) $\begin{cases}\Delta:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{1}\\ d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-2}{3}\\ d_2:\dfrac{x+4}{5}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z}{1}\end{cases}$

c) $\begin{cases}\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-2}{3}\\ d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-2}{3}\\ d_2:\dfrac{x+4}{5}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z}{1}\end{cases}$ d) $\begin{cases}\Delta:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}\\ d_1:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{1}\\ d_2:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-9}{-1}\end{cases}$

Baøi 45. Vieát phöông trình tham soá cuûa ñöôøng thaúng vuoâng goùc chung cuûa hai ñöôøng thaúng cheùo nhau d_1, d_2 cho tröôùc:

a) $d_1:\begin{cases}x=3-2t\\y=1+4t\\z=-2+4t\end{cases},d_2:\begin{cases}x=2+3t\\y=4-t\\z=1-2t\end{cases}$ b) $d_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=-3+t\\z=2+3t\end{cases},d_2:\begin{cases}x=-2+3t\\y=1+2t\\z=-4+4t\end{cases}$

c) $d_1:\begin{cases}x=2+2t\\y=1+t\\z=3-t\end{cases},d_2:\begin{cases}x=1+t\\y=3+t\\z=1+2t\end{cases}$ d) $d_1:\begin{cases}x=2+3t\\y=-3-t\\z=1+2t\end{cases},d_2:\begin{cases}x=-1+2t\\y=1-2t\\z=2+t\end{cases}$

Baøi 46. Vieát phöông trình tham soá cuûa ñöôøng thaúng *d* laø hình chieáu cuûa ñöôøng thaúng Δ treân maët phaúng (P) cho tröôùc:

a) $\begin{cases}\Delta:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}\\ (P): 2x-y+2z+3=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}\Delta:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{3}\\ (P): 3x+4y-2z+3=0\end{cases}$

c) $\begin{cases}\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}\\ (P): 2x-2y+z-3=0\end{cases}$ d) $\begin{cases}\Delta:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}\\ (P): x+y-z+1=0\end{cases}$

e) $\begin{cases}\Delta:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{1}\\ (P): x+2y+3z+4=0\end{cases}$ f) $\begin{cases}\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z}{-1}\\ (P): 2x-y-3z+5=0\end{cases}$

g) $\begin{cases}\Delta:\begin{cases}5x-4y-2z-5=0\\x+2z-2=0\end{cases}\\ (P): 2x-y+z-1=0\end{cases}$ h) $\begin{cases}\Delta:\begin{cases}x-y-z-1=0\\x+2z-2=0\end{cases}\\ (P): x+2y-z-1=0\end{cases}$

Baøi 47. Vieát phöông trình tham soá cuûa ñöôøng thaúng ñi qua ñieåm A, vuoâng goùc vôùi ñöôøng thaúng *d_1* vaø caét ñöôøng thaúng *d_2* cho tröôùc:

a) $A(0;1;1),\ d_1:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1},\ d_2:\begin{cases}x=-1\\ y=t\\ z=1+t\end{cases}$

b) $A(1;1;1),\ d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1},\ d_2:\begin{cases}x=2\\ y=1+2t\\ z=-1-t\end{cases}$

c) $A(-1;2;-3),\ d_1:\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z}{-3},\ d_2:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$

Baøi 48. Cho töù dieän ABCD coù A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1); D(1; 1; 1). Vieát phöông trình tham soá cuûa caùc ñöôøng thaúng sau:

a) Chöùa caùc caïnh cuûa töù dieän töù dieän ABCD.

b) Ñöôøng thaúng qua C vaø vuoâng goùc vôùi mp(ABD).

c) Ñöôøng thaúng qua A vaø qua troïng taâm cuûa tam giaùc BCD.

Baøi 49. Cho tam giaùc ABC coù A(1; 2; 5) vaø hai trung tuyeán: $(d_1):\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z-3}{1}$, $(d_2):\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$. Vieát phöông trình tham soá cuûa caùc ñöôøng thaúng sau:

a) Chöùa caùc caïnh cuûa tam giaùc ABC.

b) Ñöôøng phaân giaùc trong cuûa goùc A.

Baøi 50. Cho tam giaùc ABC coù $A(3;-1;-1), B(1;2;-7), C(-5;14;-3)$. Vieát phöông trình tham soá cuûa caùc ñöôøng thaúng sau:

a) Trung tuyeán AM.

b) Ñöôøng cao BH.

c) Ñöôøng phaân giaùc trong BK.

d) Ñöôøng trung tröïc cuûa BC trong ΔABC.

Baøi 51. Cho boán ñieåm $S(1;2;-1),\ A(3;4;-1), B(1;4;1), C(3;2;1)$.

a) Chöùng minh S.ABC laø moät hình choùp.

b) Vieát phöông trình tham soá cuûa caùc ñöôøng thaúng chöùa caùc caïnh cuûa hình choùp.

c) Vieát phöông trình ñöôøng vuoâng goùc chung cuûa SA vaø BC.

Baøi 52. Cho boán ñieåm $S(1;-2;3),\ A(2;-2;3), B(1;-1;3), C(1;-2;5)$.

a) Chöùng minh S.ABC laø moät töù dieän.

b) Vieát phöông trình caùc hình chieáu cuûa SA, SB treân maët phaúng (ABC).

VAÁN ÑEÀ 2: Vò trí töông ñoái giöõa hai ñöôøng thaúng

Ñeå xeùt VTTÑ giöõa hai ñöôøng thaúng, ta coù theå söû duïng moät trong caùc phöông phaùp sau:

• Phöông phaùp hình hoïc: Döïa vaøo moái quan heä giöõa caùc VTCP vaø caùc ñieåm thuoäc caùc ñöôøng thaúng.

• Phöông phaùp ñaïi soá: Döïa vaøo soá nghieäm cuûa heä phöông trình caùc ñöôøng thaúng.

Baøi 53. Xeùt vò trí töông ñoái giöõa hai ñöôøng thaúng *d_1, d_2* cho tröôùc:

a) $d_1:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$; $\quad d_2:\{x=-1+t; y=-t; z=-2+3t$

b) $d_1:\{x=5+2t; y=1-t; z=5-t$; $\quad d_2:\{x=3+2t'; y=-3-t'; z=1-t'$

c) $d_1:\{x=2+2t;\ y=-1+t;\ z=1$; $\quad d_2:\{x=1;\ y=1+t;\ z=3-t$

d) $d_1: \frac{x-1}{9} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{3}$; $d_2: \frac{x-7}{6} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-5}{2}$

e) $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{4}$; $d_2: \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{1}$

f) $d_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8}$; $d_2: \frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12}$

g) $d_1: \begin{cases} x-2y+2z-2=0 \\ 2x+y-2z+4=0 \end{cases}$; $d_2: \begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$

h) $d_1: \{x=9t; y=5t; z=t-3$; $d_2: \begin{cases} 2x-3y-3z-9=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$

Baøi 54. Chöùng toû raèng caùc caëp ñöôøng thaúng sau ñaây cheùo nhau. Vieát phöông trình ñöôøng vuoâng goùc chung cuûa chuùng:

a) $d_1: \{x=1-2t; y=3+t; z=-2-3t$; $d_2: \{x=2t'; y=1+t'; z=3-2t'$

b) $d_1: \{x=1+2t; y=2-2t; z=-t$; $d_2: \{x=2t'; y=5-3t'; z=4$

c) $d_1: \{x=3-2t; y=1+4t; z=4t-2$; $d_2: \{x=2+3t'; y=4-t'; z=1-2t'$

d) $d_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$; $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4}$

e) $d_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$; $d_2: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

f) $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-2}$; $d_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$

g) $d_1: \begin{cases} x-2y+2z-2=0 \\ 2x+y-2z+4=0 \end{cases}$; $d_2: \begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$

Baøi 55. Tìm giao ñieåm cuûa hai ñöôøng thaúng *d₁ vaø d₂*:

a) $d_1: \{x=3t; y=1-2t; z=3+t$; $d_2: \{x=1+t'; y=2t'; z=4+t'$

b) $d_1: \begin{cases} x+y+z+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$; $d_2: \{x=1+t; y=-2+t; z=3-t$

c) $d_1: \begin{cases} x-2y-z-4=0 \\ 2x+y+z+6=0 \end{cases}$; $d_2: \begin{cases} x-z-2=0 \\ y+2z+7=0 \end{cases}$

d) $d_1: \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$; $d_2: \begin{cases} 3x+y-z+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$

Baøi 56. Tìm *m* ñeå hai ñöôøng thaúng d_1 *vaø* d_2 caét nhau. Khi ñoù tìm toaï ñoä giao ñieåm cuûa chuùng:

a) $d_1: \{x=1+mt; y=t; z=-1+2t$; $d_2: \{x=1-t'; y=2+2t'; z=3-t'$

b) $d_1: \{x=1-t; y=3+2t; z=m+t$; $d_2: \{x=2+t'; y=1+t'; z=2-3t'$

c) $d_1: \begin{cases} 2x+y-z-4=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$; $d_2: \begin{cases} x+2y+mz-3=0 \\ 2x+y+z-6=0 \end{cases}$

VAÁN ÑEÀ 3: Vò trí töông ñoái giöõa ñöôøng thaúng vaø maët phaúng

Ñeå xeùt VTTÑ giöõa ñöôøng thaúng vaø maët phaúng, ta coù theå söû duïng moät trong caùc phöông phaùp sau:

• Phöông phaùp hình hoïc: Döïa vaøo moái quan heä giöõa VTCP cuûa ñöôøng thaúng vaø VTPT cuûa maët phaúng.

• Phöông phaùp ñaïi soá: Döïa vaøo soá nghieäm cuûa heä phöông trình

ñöôøng thaúng vaø maët phaúng.

Baøi 1. Xeùt vò trí töông ñoái giöõa ñöôøng thaúng *d vaø* maët phaúng *(P)*. Tìm giao ñieåm (neáu coù) cuûa chuùng:

a) $d:\{x=2t;y=1-t;z=3+t;$ $(P):x+y+z-10=0$

b) $d:\{x=3t-2;y=1-4t;z=4t-5;$ $(P):4x-3y-6z-5=0$

c) $d:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1};$ $(P):3x+5y-z-2=0$

d) $d:\dfrac{x+11}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3};$ $(P):3x-3y+2z-5=0$

e) $d:\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3};$ $(P):x+2y-4z+1=0$

f) $d:\begin{cases}3x+5y+7z+16=0\\2x-y+z-6=0\end{cases};$ $(P):5x-z-4=0$

g) $d:\begin{cases}2x+3y+6z-10=0\\x+y+z+5=0\end{cases};$ $(P):y+4z+17=0$

Baøi 2. Cho ñöôøng thaúng *d vaø* maët phaúng *(P)*. Tìm *m, n* ñeå:

i) *d* caét *(P)*. ii) *d // (P)*. iii) $d\perp(P)$. iv) $d\subset(P)$.

a) $d:\dfrac{x-1}{m}=\dfrac{y+2}{2m-1}=\dfrac{z+3}{2};$ $(P):x+3y-2z-5=0$

b) $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{m}=\dfrac{z-1}{m-2};$ $(P):x+3y+2z-5=0$

c) $d:\begin{cases}3x-2y+z+3=0\\4x-3y+4z+2=0\end{cases};$ $(P):2x-y+(m+3)z-2=0$

d) $d:\{x=3+4t;\ y=1-4t;\ z=-3+t;$ $(P):(m-1)x+2y-4z+n-9=0$

e) $d:\{x=3+2t;y=5-3t;z=2-2t;$ $(P):(m+2)x+(n+3)y+3z-5=0$

Baøi 3. Cho ñöôøng thaúng *d vaø* maët phaúng *(P)*. Tìm *m, n* ñeå:

a) $d:\{x=m+t;y=2-t;z=3t$ cắt $(P):2x-y+z-5=0$ taïi ñieåm coù tung ñoä baèng 3.

b) $d:\begin{cases}x-2y-3=0\\y+2z+5=0\end{cases}$ caét $(P):2x+y+2z-2m=0$ taïi ñieåm coù cao ñoä baèng –1.

c) $d:\begin{cases}x+2y-3=0\\3x-2z-7=0\end{cases}$ cắt $(P):x+y+z+m=0$

VAÁN ÑEÀ 4: Vò trí töông ñoái giöõa ñöôøng thaúng vaø maët caàu

Ñeå xeùt VTTÑ giöõa ñöôøng thaúng vaø maët caàu ta coù theå söû duïng caùc phöông phaùp sau:

• Phöông phaùp hình hoïc: Döïa vaøo khoaûng caùch töø taâm maët caàu ñeán ñöôøng thaúng vaø baùn kính.

• Phöông phaùp ñaïi soá: Döïa vaøo soá nghieäm cuûa heä phöông trình ñöôøng thaúng vaø maët caàu.

Baøi 1. Xeùt vò trí töông ñoái giöõa ñöôøng thaúng *d vaø* maët caàu *(S)*. Tìm giao ñieåm (neáu coù) cuûa chuùng:

a) $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1};$ $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$

b) $d:\begin{cases}2x+y-z-1=0\\x-2z-3=0\end{cases};$ $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=16$

c) $d:\begin{cases}x-2y-z-1=0\\x+y+2=0\end{cases}$; $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y-14=0$

d) $d:\begin{cases}x-2y-z-1=0\\x+y+2=0\end{cases}$; $(S): x^2+y^2+z^2+4x-2y-10z-8=0$

e) $d:\{x=-2-t; y=t; z=3-t$; $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-2=0$

f) $d:\{x=1-2t; y=2+t; z=3+t$; $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-2=0$

g) $d:\{x=1-t; y=2-t; z=4$; $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-2=0$

Baøi 2. Vieát phöông trình maët caàu *(S)* coù taâm *I* vaø tieáp xuùc vôùi ñöôøng thaúng *d*:

a) $I(1;-2;1)$; $d:\{x=1+4t; y=3-2t; z=4t-2$

b) $I(1;2;-1)$; $d:\{x=1-t; y=2; z=2t$

c) $I(4;2;-1)$; $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$

d) $I(1;2;-1)$; $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$

e) $I(1;2;-1)$; $d:\begin{cases}x-2y-1=0\\z-1=0\end{cases}$

Baøi 3. Cho töù dieän ABCD. Vieát phöông trình maët caàu tieáp xuùc vôùi caùc caïnh cuûa töù dieän, vôùi:

a) A(1; 1; 1), B(3; 3; 1), C(3; 1; 3), D(1; 3; 3).
b) A(1; 0; 2), B(2; –1; 1), C(0; 2; 1), D(–1; 3; 0).
c) A(3; 2; 1), B(1; –2; 1), C(–2; 2; –2), D(1; 1; –1).
d) A(1; 0; 11), B(0; 1; 10), C(1; 1; 8), D(–3; 1; 2).

VAÁN ÑEÀ 5: Khoaûng caùch

1. ***Khoaûng caùch töø ñieåm M ñeán ñöôøng thaúng d***

• *Caùch 1: Cho ñöôøng thaúng d ñi qua M_0 vaø coù VTCP $\vec{a}$.*

$$\boxed{d(M,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{a}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|}}$$

• *Caùch 2: – Tìm hình chieáu vuoâng goùc H cuûa M treân ñöôøng thaúng d.*
– d(M,d) = MH.

• *Caùch 3: – Goïi N(x; y; z) $\in$ d. Tính MN^2 theo t (t tham soá trong phöông trình ñöôøng thaúng d).*
– Tìm t ñeå MN^2 nhoû nhaát.
– Khi ñoù N $\equiv$ H. Do ñoù d(M,d) = MH.

2. ***Khoaûng caùch giöõa hai ñöôøng thaúng cheùo nhau***

Cho hai ñöôøng thaúng cheùo nhau d_1 vaø d_2.

d_1 ñi qua ñieåm M_1 vaø coù VTCP $\vec{a}_1$, d_2 ñi qua ñieåm M_2 vaø coù VTCP $\vec{a}_2$

$$\boxed{d(d_1,d_2)=\frac{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]\right|}}$$

Chuù yù: *Khoaûng caùch giöõa hai ñöôøng thaúng cheùo nhau d_1, d_2 baèng khoaûng caùch giöõa d_1 vôùi maët phaúng (α) chöùa d_2 vaø song song vôùi d_1.*

3. ***Khoaûng caùch giöõa hai ñöôøng thaúng song song*** *baèng khoaûng caùch töø moät ñieåm thuoäc ñöôøng thaúng naøy ñeán ñöôøng thaúng kia.*

4. ***Khoaûng caùch giöõa moät ñöôøng thaúng vaø moät maët phaúng song song***

Khoaûng caùch giöõa ñöôøng thaúng d vôùi maët phaúng (α) song song vôùi noù baèng khoaûng caùch töø moät ñieåm M baát kì treân d ñeán maët phaúng (α).

Baøi 1. Tính khoaûng caùch töø ñieåm A ñeán ñöôøng thaúng *d*:

a) $A(2;3;1),\ d:\begin{cases}x=1-4t\\ y=2+2t\\ z=4t-1\end{cases}$ b) $A(1;2;-6),\ d:\begin{cases}x=2+2t\\ y=1-t\\ z=t-3\end{cases}$

c) $A(1;0;0),\ d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$ d) $A(2;3;1),\ d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$

e) $A(1;-1;1),\ d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$ f) $A(2;3;-1),\ d:\begin{cases}x+y-2z-1=0\\ x+3y+2z+2=0\end{cases}$

Baøi 2. Chöùng minh hai ñöôøng thaúng *d₁, d₂* cheùo nhau. Tính khoaûng caùch giöõa chuùng:

a) $d_1:\{x=1-2t;y=3+t;z=-2-3t;$ $d_2:\{x=2t';y=1+t';z=3-2t'$

b) $d_1:\{x=1+2t;y=2-2t;z=-t;$ $d_2:\{x=2t';y=5-3t';z=4$

c) $d_1:\{x=3-2t;y=1+4t;z=4t-2;$ $d_2:\{x=2+3t';y=4-t';z=1-2t'$

d) $d_1:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2};$ $d_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{4}$

e) $d_1:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-9}{-1};$ $d_2:\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$

f) $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-2};$ $d_2:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$

g) $d_1:\begin{cases}x-2y+2z-2=0\\ 2x+y-2z+4=0\end{cases};$ $d_2:\begin{cases}2x+y-z+2=0\\ x-y+2z-1=0\end{cases}$

Baøi 3. Chöùng minh hai ñöôøng thaúng *d₁, d₂* song song vôùi nhau. Tính khoaûng caùch giöõa chuùng:

a) $d_1:\{x=3+2t,\ y=4+3t,\ z=2+t;$ $d_2:\{x=4+4t,\ y=5+6t,\ z=3+2t$

b) $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z-3}{8};$ $d_2:\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-3}{9}=\dfrac{z+1}{-12}$

c) $d_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3};$ $d_1:\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-1}{6}$

d) $d_1:\begin{cases}2x+2y-z-10=0\\ x-y-z-22=0\end{cases};$ $d_2:\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$

Baøi 4. Chöùng minh ñöôøng thaúng *d* song song vôùi maët phaúng (P). Tính khoaûng caùch giöõa chuùng:

a) $d:\{x=3t-2;y=1-4t;z=4t-5;$ $(P):4x-3y-6z-5=0$

b) $d:\{x=1-2t;y=t;z=2+2t;$ $(P):x+z+8=0$

c) $d:\begin{cases}x-y+2z+1=0\\ 2x+y-z-3=0\end{cases};$ $(P):2x-2y+4z+5=0$

d) $d:\begin{cases}3x-2y+z+3=0\\ 4x-3y+4z+2=0\end{cases};$ $(P):2x-y-2z-2=0$

VAÁN ÑEÀ 6: Moät soá vaán ñeà khaùc

1. Vieát phöông trình maët phaúng

• ***Daïng 1:*** *Maët phaúng (P) ñi qua ñieåm A vaø ñöôøng thaúng d:*

– *Treân ñöôøng thaúng d laáy hai ñieåm B, C.*

– *Moät VTPT cuûa (P) laø:* $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

• ***Daïng 2:*** *Maët phaúng (P) chöùa hai ñöôøng thaúng song song d₁, d₂:*

– *Xaùc ñònh VTCP* $\vec{a}$ *cuûa d₁ (hoaëc d₂).*

– *Treân d₁ laáy ñieåm A, treân d₂ laáy ñieåm B. Suy ra A, B* $\in$ *(P).*

– *Moät VTPT cuûa (P) laø:* $\vec{n}=\left[\vec{a},\overrightarrow{AB}\right]$.

- ***Daïng 3: M**aët phaúng (P) chöùa hai ñöôøng thaúng caét nhau d_1, d_2:*
  - *– Laáy ñieåm A $\in d_1$ (hoaëc A $\in d_2$) $\Rightarrow$ A $\in$ (P).*
  - *– Xaùc ñònh VTCP $\vec{a}$ cuûa d_1, $\vec{b}$ cuûa d_2.*
  - *– Moät VTPT cuûa (P) laø: $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.*

- *Daïng 4:* ***Maët phaúng (P) chöùa ñöôøng thaúng d_1 vaø song song vôùi ñöôøng thaúng d_2 (d_1, d_2 cheùo nhau):***
  - ***– Xaùc ñònh caùc VTCP $\vec{a}, \vec{b}$ cuûa caùc ñöôøng thaúng d_1, d_2.***
  - ***– Moät VTPT cuûa (P) laø: $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.***
  - ***– Laáy moät ñieåm M thuoäc d_1 $\Rightarrow$ M $\in$ (P).***

- *Daïng 5:* ***Maët phaúng (P) ñi qua ñieåm M vaø song song vôùi hai ñöôøng thaúng cheùo nhau d_1, d_2:***
  - ***– Xaùc ñònh caùc VTCP $\vec{a}, \vec{b}$ cuûa caùc ñöôøng thaúng d_1, d_2.***
  - *– Moät VTPT cuûa (P) laø: $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.*

2. Xaùc ñònh hình chieáu H cuûa moät ñieåm M leân ñöôøng thaúng d

- *Caùch 1: – Vieát phöông trình maët phaúng (P) qua M vaø vuoâng goùc vôùi d.*
  – Khi ñoù: H = d $\cap$ (P)
- *Caùch 2: Ñieåm H ñöôïc xaùc ñònh bôûi: $\begin{cases} H \in d \\ \overrightarrow{MH} \perp \vec{a}_d \end{cases}$*

3. Ñieåm ñoái xöùng M' cuûa moät ñieåm M qua ñöôøng thaúng d

- *Caùch 1: – Tìm ñieåm H laø hình chieáu cuûa M treân d.*
  – Xaùc ñònh ñieåm M′ sao cho H laø trung ñieåm cuûa ñoaïn MM′.
- *Caùch 2: – Goïi H laø trung ñieåm cuûa ñoaïn MM′. Tính toaï ñoä ñieåm H theo toaï ñoä cuûa M, M′.*
  – Khi ñoù toaï ñoä cuûa ñieåm M′ ñöôïc xaùc ñònh bôûi: $\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \perp \vec{a}_d \\ H \in d \end{cases}$.

4. Xác định hình chieáu H cuûa moät ñieåm M leân maët phaúng (P)

- *Caùch 1: – Vieát phöông trình ñöôøng thaúng d qua M vaø vuoâng goùc vôùi (P).*
  – Khi ñoù: H = d $\cap$ (P)
- *Caùch 2: Ñieåm H ñöôïc xaùc ñònh bôûi: $\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH}, \vec{n}_P \text{ cuøng phöông} \end{cases}$*

5. Ñieåm ñoái xöùng M' cuûa moät ñieåm M qua maët phaúng (P)

- *Caùch 1: – Tìm ñieåm H laø hình chieáu cuûa M treân (P).*
  – Xaùc ñònh ñieåm M′ sao cho H laø trung ñieåm cuûa ñoaïn MM′.
- *Caùch 2: – Goïi H laø trung ñieåm cuûa ñoaïn MM′. Tính toaï ñoä ñieåm H theo toaï ñoä cuûa M, M′.*
  – Khi ñoù toaï ñoä cuûa ñieåm M′ ñöôïc xaùc ñònh bôûi: $\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH}, \vec{n}_P \text{ cuøng phöông} \end{cases}$.

Baøi 1. Vieát phöông trình cuûa maët phaúng *(P)* ñi qua ñieåm A vaø ñöôøng thaúng *d*:

a) $A(2;-3;1)$, $d: \begin{cases} x = 4+2t \\ y = 2-3t \\ z = 3+t \end{cases}$ b) $A(1;4;-3)$, $d: \begin{cases} x = 2-t \\ y = -1+2t \\ z = 1-3t \end{cases}$

c) $A(4;-2;3)$, $d: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-5}{2}$ d) $A(2;-1;5)$, $d: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{3}$

e) $A(-2;1;4)$, $d: \begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x+2y+2z+5=0 \end{cases}$ f) $A(3;-2;4)$, $d: \begin{cases} x+3y-2z+1=0 \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases}$

Baøi 2. Vieát phöông trình cuûa maët phaúng *(P)* ñi qua hai ñöôøng thaúng song song *d_1, d_2:*

a) $d_1:\{x=2+3t; y=4+2t; z=t-1;$ $\quad d_2:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$

b) $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-2}{4},$ $\quad d_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-4}{4}$

c) $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z-3}{8};$ $\quad d_2:\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-3}{9}=\dfrac{z+1}{-12}$

d) $d_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3};$ $\quad d_2:\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-1}{6}$

Baøi 3. Vieát phöông trình cuûa maët phaúng *(P)* ñi qua hai ñöôøng thaúng caét nhau *d_1, d_2:*

a) $d_1:\{x=3t; y=1-2t; z=3+t;$ $\quad d_2:\{x=1+t'; y=2t'; z=4+t'$

b) $d_1:\begin{cases}x+y+z+3=0\\2x-y+1=0\end{cases};$ $\quad d_2:\{x=1+t; y=-2+t; z=3-t$

c) $d_1:\begin{cases}x-2y-z-4=0\\2x+y+z+6=0\end{cases};$ $\quad d_2:\begin{cases}x-z-2=0\\y+2z+7=0\end{cases}$

d) $d_1:\begin{cases}2x+y+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases};$ $\quad d_2:\begin{cases}3x+y-z+3=0\\2x-y+1=0\end{cases}$

Baøi 4. Cho hai ñöôøng thaúng cheùo nhau *d_1, d_2*. Vieát phöông trình maët phaúng (P) chöùa *d_1* vaø song song vôùi *d_2*:

a) $d_1:\{x=1-2t; y=3+t; z=-2-3t;\ d_2:\{x=2t'; y=1+t'; z=3-2t'$

b) $d_1:\{x=1+2t; y=2-2t; z=-t;\ d_2:\{x=2t'; y=5-3t'; z=4$

c) $d_1:\{x=3-2t; y=1+4t; z=4t-2;\ d_2:\{x=2+3t'; y=4-t'; z=1-2t'$

d) $d_1:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2};\ d_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{4}$

e) $d_1:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-9}{-1};\ d_2:\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$

f) $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-2};\ d_2:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$

g) $d_1:\begin{cases}x-2y+2z-2=0\\2x+y-2z+4=0\end{cases};$ $\quad d_2:\begin{cases}2x+y-z+2=0\\x-y+2z-1=0\end{cases}$

Baøi 5. Tìm toaï ñoä hình chieáu H cuûa ñieåm M treân ñöôøng thaúng *d* vaø ñieåm M′ ñoái xöùng vôùi M qua ñöôøng thaúng *d*:

a) $M(1;2;-6),$ $\quad d:\begin{cases}x=2+2t\\y=1-t\\z=t-3\end{cases}$ $\qquad$ b) $M(2;3;1),$ $\quad d:\begin{cases}x=1-4t\\y=2+2t\\z=4t-1\end{cases}$

c) $M(2;1;-3),$ $\quad d:\begin{cases}x=2t\\y=1-t\\z=-1+2t\end{cases}$ $\qquad$ d) $M(1;2;-1),$ $\quad d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3t\end{cases}$

e) $M(1;2;-1),$ $\quad d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ $\qquad$ f) $M(2;5;2),$ $\quad d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$

g) $M(2;1;-3),$ $\quad d:\begin{cases}x-2y-z=0\\2x+y-z-5=0\end{cases}$ $\qquad$ h) $M(2;1;-3),$ $\quad d:\begin{cases}y+z-4=0\\2x-y-z+2=0\end{cases}$

Baøi 6. Tìm toaï ñoä hình chieáu H cuûa ñieåm M treân maët phaúng *(P)* vaø ñieåm M′ ñoái xöùng vôùi M qua maët phaúng *(P)*:

a) $(P): 2x-y+2z-6=0,$ $\quad M(2;-3;5)$ $\qquad$ b) $(P): x+y+5z-14=0,$ $\quad M(1;-4;-2)$

c) $(P): 6x-2y+3z+12=0,$ $\quad M(3;1;-2)$ $\qquad$ d) $(P): 2x-4y+4z+3=0,$ $\quad M(2;-3;4)$

e) $(P): x-y+z-4=0,$ $\quad M(2;1;-1)$ $\qquad$ f) $(P): 3x-y+z-2=0,$ $\quad M(1;2;4)$

BAØI TAÄP OÂN PHÖÔNG TRÌNH ÑÖÔØNG THAÚNG

Baøi 1. Tìm treân truïc Ox ñieåm M caùch ñeàu ñöôøng thaúng $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$ vaø maët phaúng $(\alpha): 2x - y - 2z = 0$.

Baøi 2. Cho 2 ñieåm A(1; 0; 0) vaø B(0; 2; 0). Vieát phöông trình cuûa mp (α) qua AB vaø taïo vôùi mp(Oxy) moät goùc 60^0.

Baøi 3. Vieát phöông trình cuûa ñöôøng thaúng (d) qua A(3; –1; 1) naèm trong mp (α): x – y + z – 5 = 0 vaø hôïp vôùi ñöôøng thaúng $\Delta : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$ moät goùc 45^0.

Baøi 4. Goïi (α) laø maët phaúng qua A(2; 0; 1) vaø B(–2; 0; 5) vaø hôïp vôùi mp(*Oxz*) moät goùc 45^0. Tính khoaûng caùch töø O ñeán mp (α).

Baøi 5. Chöùng minh raèng 2 ñöôøng thaúng $\Delta_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ vaø $\Delta_2 : \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$ cuøng naèm trong moät maët phaúng. Vieát phöông trình maët phaúng aáy.

Baøi 6. Cho hai ñieåm A(1; 2; –1), B(7; –2; 3) vaø ñöôøng thaúng $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$

a) Chöùng minh raèng ñöôøng thaúng *d* vaø ñöôøng thaúng AB cuøng thuoäc moät maët phaúng.

b) Tìm ñieåm I thuoäc *d* sao cho IA + IB nhoû nhaát.

Baøi 7. Trong khoâng gian *Oxyz* cho 4 ñieåm A(1; 2; 3), B(–2; 1; 0), C(–1; 0; 2), D(0; 2; 3).

1) Chöùng minh ABCD laø moät töù dieän. Tính theå tích töù dieän ñoù.

2) Tìm ñieåm M sao cho : $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

3) Xaùc ñònh toaï ñoä troïng taâm töù dieän ABCD.

4) Vieát phöông trình maët phaúng trung tröïc cuûa caùc ñoaïn thaúng AB, AC, BC.

5) Vieát phöông trình maët phaúng ñi qua A vaø vuoâng goùc vôùi truïc *Oz*.

6) Vieát phöông trình maët phaúng ñi qua A vaø B vaø vuoâng goùc vôùi maët phaúng $2x + 3y - z = 0$.

7) Vieát phöông trình maët phaúng ñi qua A vaø vuoâng goùc vôùi 2 maët phaúng 2x + 3y – z = 0,
x + 2y – 3z = 0.

8) Vieát phöông trình maët phaúng ñi qua A vaø chaén caùc nöûa truïc döông Ox, Oy, Oz laàn löôït taïi caùc ñieåm I , J, K sao cho theå tích töù dieän OIJK nhoû nhaát.

9) Vieát phöông trình maët phaúng ñi qua A vaø chaén caùc nöûa truïc döông Ox, Oy, Oz laàn löôït taïi caùc ñieåm I , J, K sao cho OI + OJ + OK nhoû nhaát.

10) Vieát phöông trình maët phaúng ñi qua C, song song vôùi truïc Oy vaø vuoâng goùc vôùi maët phaúng x + 2y – 3z = 0.

11) Vieát phöông trình maët phaúng ñi qua A vaø qua giao tuyeán cuûa hai maët phaúng :
(P): x + y + z – 4 =0, (Q):3x – y + z – 1 = 0.

12) Vieát phöông trình maët phaúng ñi qua A vaø chöùa ñöôøng thaúng : $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+1}{-2}$.

13) Tìm ñieåm A' ñoái xöùng vôùi ñieåm A qua ñöôøng thaúng $d: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ vaø tính khoaûng caùch töø A ñeán ñöôøng thaúng $d: \begin{cases} x + y - 3z + 3 = 0 \\ 2x - y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$

14) Tìm treân truïc Oz ñieåm M caùch ñeàu ñieåm A vaø maët phaúng (P): x + 3y + 2 = 0.

15) Vieát phöông trình ñöôøng thaúng qua A, song song vôùi maët phaúng (P): x – y – z – 4 = 0

vaø vuoâng goùc vôùi ñöôøng thaúng $\Delta: \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{3}$.

16) Vieát phöông trình ñöôøng thaúng qua A vuoâng goùc vaø caét ñöôøng thaúng: $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=z+3$.

17) Tìm ñieåm P thuoäc maët phaúng (P): 2x – 3y – z +2 = 0 sao cho PA+PB nhoû nhaát.

18) Chöùng minh raèng ñöôøng thaúng AB vaø ñöôøng thaúng $d: \frac{x}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{3}$ cuøng thuoäc moät maët phaúng. Tìm ñieåm N thuoäc *d* sao cho NA + NB nhoû nhaát.

19) Vieát phöông trình ñöôøng thaúng qua A, vuoâng goùc vôùi ñöôøng thaúng: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$ vaø caét ñöôøng thaúng: $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$.

20) Vieát phöông trình hình chieáu cuûa ñöôøng thaúng AB leân maët phaúng (P): x + 3y – z = 0.

21) Tính goùc taïo bôûi ñöôøng thaúng AB vôùi maët phaúng (BCD).

22) G laø troïng taâm ΔABC, G’ laø moät ñieåm baát kyø thuoäc maët phaúng (P): 2x – 3y + z +3 = 0. Chöùng minh raèng: $G'A^2+G'B^2+G'C^2$ nhoû nhaát khi vaø chæ khi G' laø hình chieáu cuûa G leân (P). Tìm toaï ñoä ñieåm G’.

23) Laäp phöông trình maët caàu ñi qua A, B, C vaø coù taâm thuoäc mp(Oxy)

24) Laäp phöông trình tieáp dieän cuûa maët caàu *(S)*: $x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+5=0$ taïi B.

25) Laäp phöông trình maët phaúng qua A vaø tieáp xuùc vôùi maët caàu *(S)* coù phöông trình:

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0.$$

26) Laäp phöông trình maët caàu ngoaïi tieáp töù dieän ABCD.