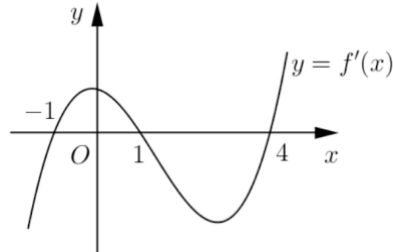


HÀM HỢP & HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty; -1)$.

B. $(2; 3)$.

C. $(4; 7)$.

D. $(-1; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } y = f(|3-x|) = \begin{cases} f(3-x), & \text{khi } x \leq 3 \\ f(x-3), & \text{khi } x > 3 \end{cases}.$$

• Xét hàm số $y = f(3-x)$ khi $x \leq 3$.

$$\text{Có } y' = (3-x)' f'(3-x) = -f'(3-x)$$

$$\bullet \text{ Khi } y' = 0 \Leftrightarrow f'(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = -1 \\ 3-x = 1 \\ 3-x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Khi } y' > 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x < -1 \\ 1 < 3-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -1 < x < 2 \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Khi } y' < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 3-x < 1 \\ 3-x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x < -1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		3
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y							

- Xét hàm số $y = f(x-3)$ khi $x > 3$.

Tương tự, ta có bảng biến thiên:

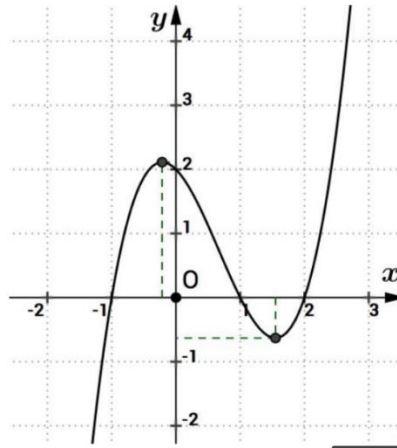
x	3		4		7		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y							

- Kết hợp cả hai trường hợp, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(|3-x|)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		2		3		4		7		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y													

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm của phương trình $f(x^2 - 3x) = 0$ là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 - 3x$, phương trình trở thành $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = \{-1; 1; 2\}$.

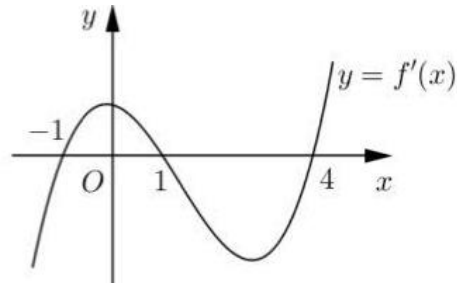
$$t = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$t = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$$t = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Vậy phương trình $f(x^2 - 3x) = 0$ có tất cả 6 nghiệm.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng:



- A. $(1;3)$. B. $(2;+\infty)$. C. $(-2;1)$. D. $(-\infty;2)$.

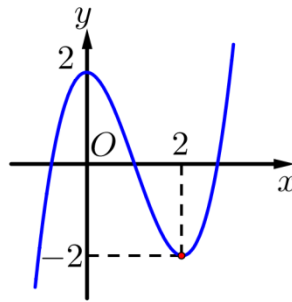
Lời giải

Chọn C.

Ta có: $(f(2-x))' = (2-x)' \cdot f'(2-x) = -f'(2-x)$

Hàm số đồng biến khi $(f(2-x))' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(1;2)$. B. $(2;3)$. C. $(-1;0)$. D. $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = (-2f(x))' = -2 \cdot f'(x)$. Hàm số đồng biến $\Rightarrow -2 \cdot f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow$ chọn đáp án **A.**

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(0; \frac{3}{2})$. B. $(-\frac{1}{2}; 1)$. C. $(-2; -\frac{1}{2})$. D. $(\frac{3}{2}; 3)$.

Lời giải

Chọn A

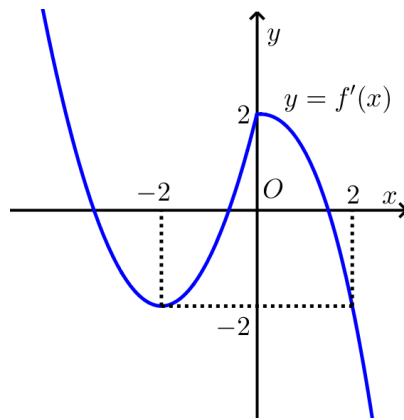
Đào Phương Thảo

Ta có: $y' = -2f'(1-2x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) \leq 0$

Từ bảng xét dấu ta có $f'(1-2x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \leq -3 \\ -2 \leq 1-2x \leq 1 \\ 1-2x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq -1 \end{cases}$

Từ đây ta suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{3}{2}\right)$

Câu 3: Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(x-1) + x^2 - 2x$ đồng biến trên khoảng



A. **(1; 2).**

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn A

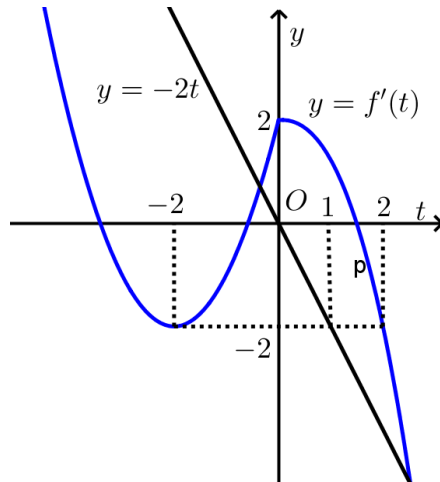
Ta có $y = f(x-1) + x^2 - 2x$

Khi đó $y' = f'(x-1) + 2x - 2$. Hàm số đồng biến khi $y' \geq 0$

$$\Leftrightarrow f'(x-1) + 2(x-1) \geq 0 \quad (1)$$

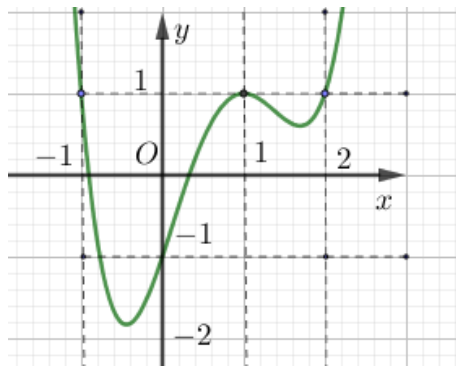
Đặt $t = x-1$ thì (1) trở thành: $f'(t) + 2t \geq 0 \Leftrightarrow f'(t) \geq -2t$.

Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -2t$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó ta thấy với $t \in (0;1)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(t)$ luôn nằm trên đường thẳng $y = -2t$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình sau



Đặt $g(x) = f(x) - x$, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; -1)$.

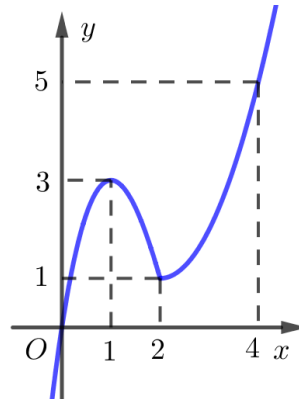
Lời giải

Chọn B.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$.

Dựa vào đồ thị đã cho ta thấy $\forall x \in (-1; 2)$ thì $f'(x) < 1 \Leftrightarrow g'(x) < 0$ và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ nên hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 2)$.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $f(4 - 2\sin^2 2x) = m$ có nghiệm.



A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 4 - 2\sin^2 2x$ $\Rightarrow t \in \left[\frac{2}{3}; 4\right]$.

Do đó phương trình $f(4 - 2\sin^2 2x) = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $f(t) = m$ có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{2}{3}; 4\right]$.

Dựa vào đồ thị đã cho ta thấy: phương trình $f(t) = m$ có nghiệm t với $t \in \left[\frac{2}{3}; 4\right] \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 5$.

Vậy $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2019$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

Hàm số $y = f(x+2018) + 2019x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; -2018)$.

B. $(2018; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(-2018; 0)$.

Lời giải

Chọn A

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	
$f'(x)$			3		-2019		

Đào Phương Thảo

$$y = f(x + 2018) + 2019x \Rightarrow y' = f'(x + 2018) + 2019.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(x + 2018) = -2019 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2018 = 2 \\ x + 2018 = a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2016 \\ x = a - 2018 < -2018 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$a - 2018$	-2016	$+\infty$
$f'(x + 2018) + 2019$		$-$	0	$+$
$f(x + 2018) + 2019x$			$+$	

$f(a) + 2019(a - 2018)$

Câu 38:

Phương pháp:

Bất phương trình $f(x) < m$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $m \geq \min_{[-1; 1]} f(x)$

Cách giải:

$$f'(x) = -x^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Hàm số } y = f(x) \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \min_{[-1; 1]} f(x) = f(1)$$

Bất phương trình $f(x) < m$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi

$$m \geq \min_{[-1; 1]} f(x) \Leftrightarrow m \geq f(1)$$

Đào Phương Thảo

Chọn: C

Câu 39:

Câu 39 [TH]: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(3 - x^2)$ đồng biến trong khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1; 0)$

B. $(0; 1)$

C. $(2; 3)$

D. $(-2; -1)$

Phương pháp:

Xác định khoảng mà $g'(x) \geq 0$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm trên khoảng đó.

Cách giải:

Ta có: $g(x) = f(3 - x^2) \Rightarrow g'(x) = -2x \cdot f'(3 - x^2)$

$$f'(3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x^2 = -6 \\ 3 - x^2 = -1 \\ 3 - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$-2x$	+	+	+	+	0	-	-	-	-
$f'(3 - x^2)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	+

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x) = f(3 - x^2)$ đồng biến trên các khoảng $(-3; -2), (-1; 0), (1; 2), (3; +\infty)$

Chọn: A

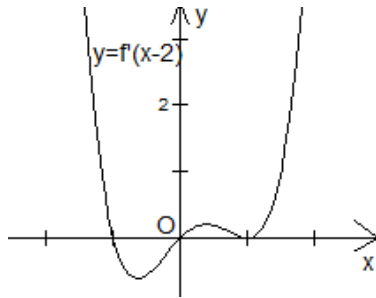
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x - 2)$ có đồ thị như hình dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.



Lời giải

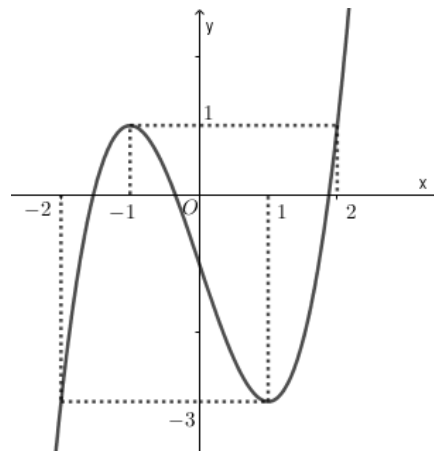
Chọn B.

Ta có: đồ thị hàm số $y = f'(x-2)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ sang phải một đơn vị. Khi đó hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ 0	$-$ 0	$+$ 0	$+$
$f(x)$		$f(-3)$			$f(-1)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là 2.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(x)-1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt?



A. 4.

B. 7.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-2; -1) \\ x = x_2 \in (-1; 0) \\ x = x_3 \in (1; 2) \end{cases}$.

$$\Rightarrow f(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-1=x_1 \\ f(x)-1=x_2 \\ f(x)-1=x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=1+x_1 \in (-1;0) \\ f(x)=1+x_2 \in (0;1) \\ f(x)=1+x_3 \in (2;3) \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta có:

+ $f(x)=1+x_1 \in (-1;0)$ có 3 nghiệm phân biệt.

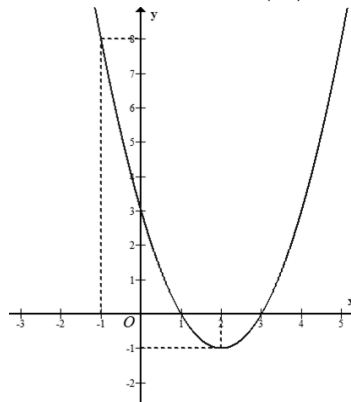
+ $f(x)=1+x_2 \in (0;1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ $f(x)=1+x_3 \in (2;3)$ có 1 nghiệm.

Và 7 nghiệm này khác nhau.

Vậy phương trình $f(f(x)-1)=0$ có 7 nghiệm phân biệt

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) (như hình vẽ):



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

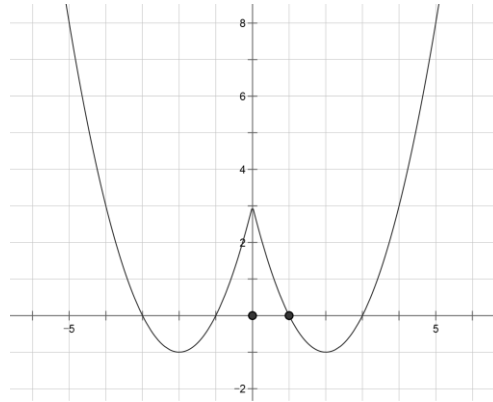
Lời giải

Chọn C

Phương trình

$$f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0 \Leftrightarrow (f(|x|)+1)(f(|x|)-m+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) = -1 & (1) \\ f(|x|) = m-3 & (2) \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ta vẽ được đồ thị hàm số $y = f(|x|)$



Từ đồ thị hàm số, suy ra phương trình (1) có 2 nghiệm. Để phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt khi đó $-1 < m < 3$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+	0	+	0	—	0	+	

Hàm số $y = 6f(x+3) - 2x^3 - 9x^2 - 6x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -2)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Tự luận

Đặt $g(x) = 6f(x+3) - 2x^3 - 9x^2 - 6x$

Ta có $g'(x) = 6f'(x+3) - 6x^2 - 18x - 6$

Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x+2)$	-	+	+	-	-	-
$-x(x-1)$	-	+	-	-	-	-
$g'(x)$	-	+	ko xác định	-	-	-

Từ bảng đó có kết quả

Cách 2: Trắc nghiệm

Xét $y = 6f(x+3) - 2x^3 - 9x^2 - 6x$.

$y' = 6[f'(x+3) - x^2 - 3x - 2]$

Đào Phương Thảo

Ta có $y'(0) = 6 \cdot [f'(3) - 2] < 0$ nên loại đáp án C.

$y'(-4) = 6 \cdot [f'(-1) - 6] < 0$ nên loại đáp án A.

$y'(1) = 6 \cdot [f'(4) - 6] < 0$ nên loại đáp án D.

Vậy ta chọn đáp án **B**.

Lời bình:

+) Ta có thể chọn $f'(x) = a(x-1)(x-2)^2(x-3)(x-4)$ (với $a > 0$) như vậy ta có thể chọn hàm $h(x) = bf(x+c) + g(x)$ sao cho $g'(x)$ có chung các nghiệm với $f'(x+c)$. Giả sử nó có nghiệm chung là $(x-m)(x-n)$ khi đó

$$\frac{bf'(x+c)}{(x-m)(x-n)} + \frac{g'(x)}{(x-m)(x-n)} = k(x) \text{ và } k(x) \text{ luôn âm hay dương trên đoạn cần}$$

tim. Như vậy, ta có thể chọn trước $k(x)$.

+) Ví dụ cụ thể:

Nếu ta $c=2$; $b=1$ thì $y = a(x+1)x^2(x-1)(x-2) + g'(x)$. Chọn $g'(x)$ và $f'(x+2)$ có nghiệm chung là $x=1$; Xét hàm còn lại là $q(x) = a(x+1)x^2(x-2) + \frac{g'(x)}{x-1}$. Nhận

thấy $a(x+1)x^2(x-2) < 0$ với mọi $x \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$. Do vậy ta chỉ cần chọn một hàm

$$\frac{g'(x)}{x-1} < 0 \text{ với } \forall x \in \left(1; \frac{3}{2}\right). \text{ Có vô số hàm như vậy. Ví dụ } \frac{g'(x)}{x-1} = -x \text{ chẳng hạn. Khi}$$

đó ta có một bài toán khác như sau:

$$h'(x) = f'(x+2) - x(x-1) \Rightarrow h(x) = f(x+2) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x+2)$	-	+	+	-	-	
$-x(x-1)$	-	-	+	-	-	
$g'(x)$	-	ko xác định	+	-	-	

+) Đến đây các bạn có thể sáng tạo ra vô số bài toán dạng như thế này?

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$		$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	-4	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(\sqrt{2x-3})+4=0$ là

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $f(\sqrt{2x-3})+4=0$ (*).

Điều kiện: $2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$.

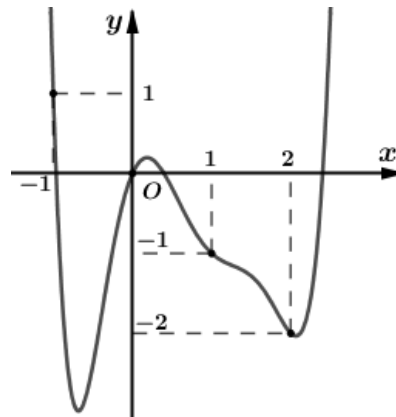
Đặt $t = \sqrt{2x-3} \geq 0$. Khi đó (*) $\Rightarrow f(t)+4=0 \Leftrightarrow f(t)=-4$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $f(t)=-4 \Leftrightarrow t=3$.

Suy ra $\sqrt{2x-3}=3 \Leftrightarrow 2x-3=9 \Leftrightarrow x=6$.

Vậy số nghiệm của phương trình $f(\sqrt{2x-3})+4=0$ là 1.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

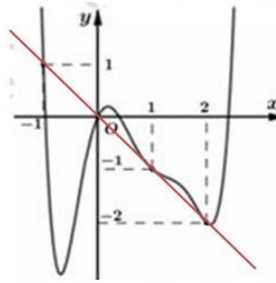
Ta có $g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2)$.

Đặt $t = x+2$ ta được $f'(t) = -t$. (1)

Đào Phương Thảo

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng $d : y = -t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y = -t$ ta có

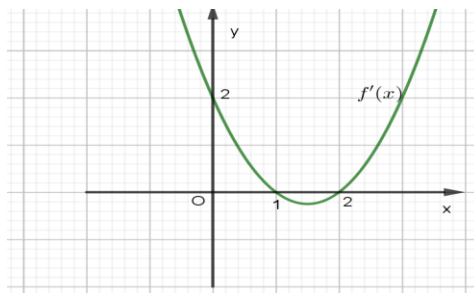
$$\text{ta có } f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$							

Vậy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 46. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y = f(2 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

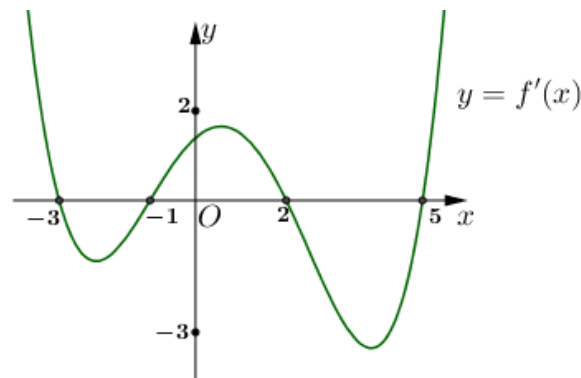
Chọn B

Hàm số $y = f(2 - x^2)$ có $y' = -2x \cdot f'(2 - x^2)$

$$y' = -2x \cdot f'(2 - x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 < 2 - x^2 < 2 \\ x < 0 \\ 2 - x^2 < 1 \\ 2 - x^2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x < 1 \\ x < 0 \\ x < -1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < -1 \end{cases}$$

Do đó hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Câu 49: [2D1-2.6-4] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x) = f(|x| + m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng 7 điểm cực trị.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Cách 1.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là hàm bậc 4 và có các nghiệm $-3; -1; 2; 5$.

Hàm số $y = g(x) = f(|x| + m)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số $y = g(x) = f(|x| + m)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x + m)$ có 3 điểm cực trị dương.

$$\text{Xét hàm số } y = f'(x+m) \Rightarrow y' = f''(x+m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+m=-3 \\ x+m=-1 \\ x+m=2 \\ x+m=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-m-3 \\ x=-m-1 \\ x=-m+2 \\ x=-m+5 \end{cases}.$$

Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, để hàm số $y = f(x+m)$ có 3 điểm cực trị dương thì $\begin{cases} -m-1 > 0 \\ -m-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < 1.$

Cách 2.

Đặt $g(x) = f(x+m) \Rightarrow g(|x|) = f(|x|+m)$. Xét phương trình

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3-m \\ x_2 = -1-m \\ x_3 = 2-m \\ x_4 = 5-m \end{cases}$$

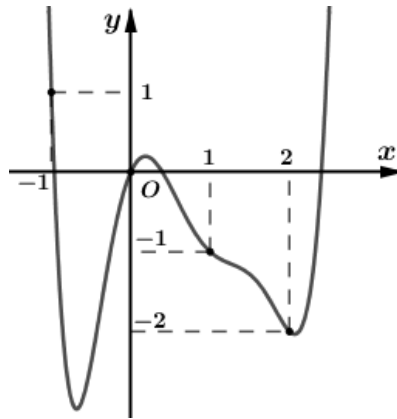
Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	$+\infty$			
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$									

Như vậy để hàm số $g(|x|) = f(|x|+m)$ có 7 điểm cực trị thì ta có

$$x_1 \leq 0 < x_2 < x_3 < x_4 \Leftrightarrow -3 \leq m < -1 \Leftrightarrow m \in \{-3; -2\}$$

Câu 50: [2D1-2.6-4] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

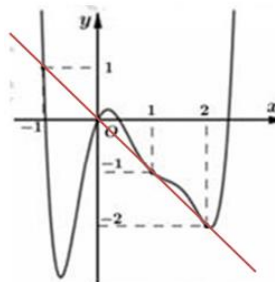
Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2)$.

Đặt $t = x+2$ ta được $f'(t) = -t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng $d : y = -t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y = -t$ ta có

$$\text{ta có } f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$		$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(2-x^2)$.

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

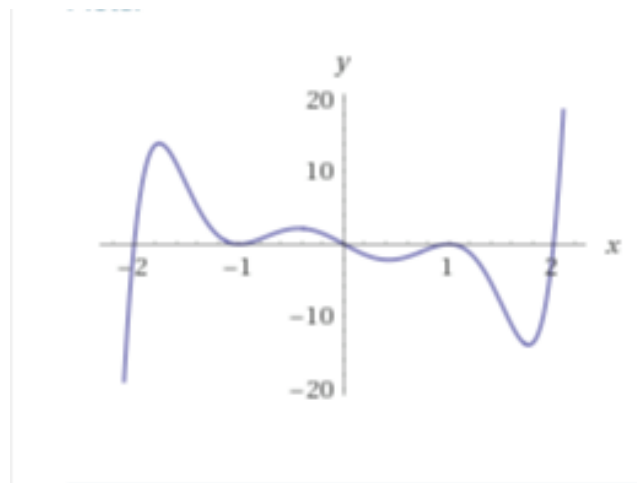
$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu khi qua $x=1$.

$$\text{Khi đó: } g'(x) = -2x \cdot f'(2-x^2) = -2x \cdot (1-x^2)^2(4-x^2) = -2x \cdot (1-x)^2(1+x)^2(4-x^2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x \cdot (1-x)^2(1+x)^2(4-x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x=\pm 2 \end{cases}$$

Đồ thị hàm $g'(x)$ như sau



$\Rightarrow g'(x)$ không đổi dấu khi qua $x=\pm 1$.

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	—	0	+	0	+	0	—	0	+

Hàm số $y = 6f(x+3) - 2x^3 - 9x^2 - 6x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -2)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Tự luận

Đặt $g(x) = 6f(x+3) - 2x^3 - 9x^2 - 6x$

Ta có $g'(x) = 6f'(x+3) - 6x^2 - 18x - 6$

Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x+2)$	-	+	+	-	-	
$-x(x-1)$	-	+	-	-	-	
$g'(x)$	-	+	ko xác định	-	-	

Từ bảng đó có kết quả

Cách 2: Trắc nghiệm

Xét $y = 6f(x+3) - 2x^3 - 9x^2 - 6x$.

$$y' = 6[f'(x+3) - x^2 - 3x - 2]$$

Ta có $y'(0) = 6[f'(3) - 2] < 0$ nên loại đáp án C.

$y'(-4) = 6[f'(-1) - 6] < 0$ nên loại đáp án A.

$y'(1) = 6[f'(4) - 6] < 0$ nên loại đáp án D.

Vậy ta chọn đáp án **B**.

Một số lưu ý:

+) Ta có thể chọn $f'(x) = a(x-1)(x-2)^2(x-3)(x-4)$ (với $a > 0$) như vậy ta có thể chọn hàm $h(x) = bf(x+c) + g(x)$ sao cho $g'(x)$ có chung các nghiệm với $f'(x+c)$. Giả sử nó có nghiệm chung là $(x-m)(x-n)$ khi đó

$$\frac{bf'(x+c)}{(x-m)(x-n)} + \frac{g'(x)}{(x-m)(x-n)} = k(x) \text{ và } k(x) \text{ luôn âm hay dương trên đoạn cần}$$

tim. Như vậy, ta có thể chọn trước $k(x)$.

+) Ví dụ cụ thể:

Đào Phương Thảo

Nếu ta $c=2$; $b=1$ thì $y=a(x+1)x^2(x-1)(x-2)+g'(x)$. Chọn $g'(x)$ và $f'(x+2)$ có nghiệm chung là $x=1$; Xét hàm còn lại là $q(x)=a(x+1)x^2(x-2)+\frac{g'(x)}{x-1}$. Nhận

thấy $a(x+1)x^2(x-2)<0$ với mọi $x\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$. Do vậy ta chỉ cần chọn một hàm

$\frac{g'(x)}{x-1}<0$ với $\forall x\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$. Có vô số hàm như vậy. Ví dụ $\frac{g'(x)}{x-1}=-x$ chẳng hạn. Khi

đó ta có một bài toán khác như sau:

$$h'(x)=f'(x+2)-x(x-1)\Rightarrow h(x)=f(x+2)-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x+2)$	-	+	+	-	-	
$-x(x-1)$	-	-	+	-	-	
$g'(x)$	-	ko xác định	+	-	-	

+) Đến đây các bạn có thể sáng tạo ra vô số bài toán dạng như thế này