

CHUYÊN ĐỀ 2

GIỚI HẠN HÀM SỐ

A – Lý thuyết cần nhớ

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0;$ $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \text{ (c: hằng số)}$ 2. Định lý: a) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ thì: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = L.M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0)$ b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ c) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L $ 3. Giới hạn một bên: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$	1. Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{ x } = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{ x } = +\infty$ 2. Định lý: Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ thì: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } L > 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ dương} \\ -\infty & \text{nếu } L < 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ dương} \\ -\infty & \text{nếu } L > 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ âm} \\ +\infty & \text{nếu } L < 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ âm} \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \\ +\infty & \text{nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ và } f(x) > 0 \\ -\infty & \text{nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ và } f(x) < 0 \end{cases}$ * Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.

DẠNG 1: TÍNH GIỚI HẠN DẠNG BẰNG ĐỊNH NGHĨA HOẶC TẠI MỘT ĐIỂM

Phương pháp:

- + Sử dụng định nghĩa chuyển giới hạn của hàm số về giới hạn của dãy số.
- + Nếu $f(x)$ là hàm số cho bởi một công thức thì giá trị giới hạn bằng $f(x_0)$
- + Nếu $f(x)$ cho bởi nhiều công thức, khi đó ta sử dụng điều kiện để hàm số có giới hạn (Giới hạn trái bằng giới hạn phải).

Câu 1. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{2x^5 + 1}$ là:

- A. -2 . B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 2 .

Câu 2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^3 - 1}{3x^2 + x + 2}$ bằng:

- A. $-\infty$. B. $-\frac{11}{4}$. C. $\frac{11}{4}$. D. $+\infty$.

Câu 3. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2}$ bằng định nghĩa.

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. -2 D. 1

Câu 4. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 1)$ bằng định nghĩa.

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 9 D. 1

Câu 5. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$ bằng định nghĩa.

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. -2 D. $\frac{1}{4}$

Câu 6. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x-2}$ bằng định nghĩa.

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. -2 D. 1

Câu 7. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x + 2}$ bằng định nghĩa.

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. -2 D. 1

Câu 8. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{2x-1}$ bằng định nghĩa.

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 5 D. 1

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 - 3x}{(2x-1)(x^3-2)}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$:

- A. $\frac{5}{9}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{9}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

Câu 10. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{2x}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** -2 **D.** 1

Câu 11. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Câu 12. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-1}{x-2}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Câu 13. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+x-3}{x-1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** 5 **C.** -2 **D.** 1

Câu 14. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(2-x)^4}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Câu 15. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^2+1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 1

Câu 16. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+x-1)$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Câu 17. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{\sqrt{(x^4+1)(2-x)}}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Câu 18. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+3x+2}{|x+1|}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** -1

Câu 19. Tìm giới hạn hàm số $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x+1}{x+1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Câu 20. Tìm giới hạn hàm số $B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \tan x + 1}{\sin x + 1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4\sqrt{3}+6}{9}$ **D.** 1

Câu 21. Tìm giới hạn hàm số $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+2}-x+1}{3x+1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\sqrt[3]{2}+1$ **D.** 1

Câu 22. Tìm giới hạn hàm số $D = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7x+1}+1}{x-2}$ bằng định nghĩa.

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** -3

Câu 23. Tìm giới hạn hàm số $A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x^2+x+4}$ bằng định nghĩa.

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 1

Câu 24. Tìm giới hạn hàm số $B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 2x - 3 \cos x}{\tan x}$ bằng định nghĩa.

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{9}{2}$ **D.** 1

Câu 25. Tìm giới hạn hàm số $C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2-x+1} - \sqrt[3]{2x+3}}{3x^2-2}$ bằng định nghĩa.

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{9}{2}$ **D.** $\sqrt{2} - \sqrt[3]{5}$

Câu 26. Tìm giới hạn hàm số $D = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt[3]{3x+1}-2}$ bằng định nghĩa.

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 0

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x - 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$:

- A.** -1 . **B.** 0 . **C.** 1 . **D.** Không tồn tại.

Câu 28. Tìm a để hàm số sau có giới hạn khi $x \rightarrow 2$ $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{khi } x > 2 \\ 2x^2 - x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$.

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Câu 29. Tìm a để hàm số sau có giới hạn tại $x = 0$ $f(x) = \begin{cases} 5ax^2 + 3x + 2a + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 + x + \sqrt{x^2 + x + 2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** 1

Câu 30. Tìm a để hàm số. $f(x) = \begin{cases} 5ax^2 + 3x + 2a + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 + x + \sqrt{x^2 + x + 2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có giới hạn tại $x \rightarrow 0$

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** 1

Câu 31. Tìm a để hàm số. $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{khi } x > 1 \\ 2x^2 - x + 3a & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$.

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 1

DẠNG 2: TÍNH GIỚI HẠN DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{0}{0}$

1. $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x), Q(x)$ là các đa thức và $P(x_0) = Q(x_0) = 0$

Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

Chú ý:

+ Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì ta luôn có sự phân tích $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

+ $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

2. $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ và $P(x), Q(x)$ là các biểu thức chứa căn cùng bậc

Sử dụng các hằng đẳng thức để nhân lượng liên hợp ở tử và mẫu.

Các lượng liên hợp:

+ $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$

+ $(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$

+ $(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a - b$

3. $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ và $P(x)$ là biểu thức chứa căn không đồng bậc

Giả sử: $P(x) = \sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)}$ vôùi $\sqrt[n]{u(x_0)} = \sqrt[n]{v(x_0)} = a$.

Ta phân tích $P(x) = (\sqrt[n]{u(x)} - a) + (a - \sqrt[n]{v(x)})$.

Trong nhiều trường hợp việc phân tích như trên không đi đến kết quả ta phải phân tích

như sau: $\sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)} = (\sqrt[n]{u(x)} - m(x)) - (\sqrt[n]{v(x)} - m(x))$, trong đó $m(x) \rightarrow c$.

Câu 1. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^3 + 2}$ là:

- A.** $-\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Câu 2. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4x + 3}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 1

Câu 3. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 8}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 1

Câu 4. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^3 - (1-4x)^4}{x}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 25

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$. Giá trị đúng của $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ là:

- A.** $-\infty$. **B.** 0 . **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $+\infty$.

Câu 6. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 6

Câu 7. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$) :

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{n}{m}$ **D.** $m-n$

Câu 8. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*, a \neq 0$) :

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{a}{n}$ **D.** $1 - \frac{n}{a}$

Câu 8. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{\sqrt[m]{1+bx} - 1}$ với $ab \neq 0$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{am}{bn}$ **D.** $1 + \frac{am}{bn}$

Câu 9. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\alpha x} \sqrt[3]{1+\beta x} \sqrt[4]{1+\gamma x} - 1}{x}$ với $\alpha\beta\gamma \neq 0$. :

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $B = \frac{\gamma}{4} - \frac{\beta}{3} + \frac{\alpha}{2}$ **D.**

$$B = \frac{\gamma}{4} + \frac{\beta}{3} + \frac{\alpha}{2}$$

Câu 10. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 1

Câu 11. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^3 + 2x - 3}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** 1

Câu 12. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - x}{x^2 - 4x + 3}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{3}$ **D.** 1

Câu 13. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt[4]{2x+1} - 1}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 1

Câu 14. Tìm giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{4x-1} - \sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2} - 2}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{-8}{27}$ **D.** 1

Câu 15. Tìm giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2x+1)(3x+1)(4x+1)} - 1}{x}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** 1

Câu 16. Tìm giới hạn $M = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 0

Câu 17. Tìm giới hạn $N = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{a}{m} - \frac{b}{n}$ **D.** $\frac{a}{m} + \frac{b}{n}$

Câu 18. Tìm giới hạn $G = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \sqrt[n]{1+bx} - 1}{x}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{a}{m} - \frac{b}{n}$ **D.** $\frac{a}{m} + \frac{b}{n}$

Câu 19. Tìm giới hạn $V = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{mn(n-m)}{2}$ **D.**

$$\frac{mn(n+m)}{2}$$

Câu 20. Tìm giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \dots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{n!}$ **D.** 0

Câu 21. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}$:

- A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $2n$ **D.** 0

Câu 22. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 - 8}$:

GV : Đào Phương Thảo

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{1}{4}$

D. 0

Câu 23. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 3}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $-\frac{2}{5}$

D. 0

Câu 24. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-4x+3}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{1}{6}$

D. 0

Câu 25. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{2x+1}-1}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{1}{3}$

D. 0

Câu 26. Tìm giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1}{x}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{9}{n}$

D. 0

Câu 27. Tìm giới hạn $M = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt[3]{1+6x}}{1 - \cos 3x}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{9}$

D. 0

Câu 28. Tìm giới hạn $N = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{\sqrt{1+x}-1}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{2(an-bm)}{mn}$

D. 0

Câu 29. Tìm giới hạn $V = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{2(an-bm)}{mn}$

D. $mn(n-m)$

Câu 30. Tìm giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \dots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x^2)^{n-1}}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{1}{n!}$

D. 0

Câu 31. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt[3]{2x+1}}{x}$:

GV : Đào Phương Thảo

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{3}$

D. 0

Câu 32. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+5}-3}{\sqrt[3]{5x+3}-2}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{2}{5}$

Câu 33. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[4]{2x+3} + \sqrt[3]{2+3x}}{\sqrt{x+2}-1}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{3}$

D. 3

Câu 34. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x - \sqrt[3]{3x+2}}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{3}$

D. 1

Câu 35. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{1}{2}$

D. 0

Câu 36. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+4x} - \sqrt[3]{7+6x}}{x^3 + x^2 - x - 1}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{3}$

D. -1

DẠNG 3: TÍNH GIỚI HẠN DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{\infty}{\infty}$ **Phương pháp:**

$L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x), Q(x) \rightarrow \infty$, dạng này ta còn gọi là dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$.

với $P(x), Q(x)$ là các đa thức hoặc các biểu thức chứa căn.

- Nếu $P(x), Q(x)$ là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x .
- Nếu $P(x), Q(x)$ có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x hoặc nhân lượng liên hợp.

Tương tự như cách khử dạng vô định ở dãy số. Ta cần tìm cách đưa về các giới hạn:

$$+ \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} x^{2k} = +\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} x^{2k+1} = +\infty \quad (-\infty).$$

$$+ \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{k}{x^n} = 0 \quad (n > 0; k \neq 0).$$

$$+ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad (-\infty) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k}{f(x)} = 0 \quad (k \neq 0).$$

Câu 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3x+2}$ bằng:

A. 0.

B. 1.

C. $\frac{5}{3}$.D. $+\infty$.

Câu 2. Giá trị đúng của $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4+7}{x^4+1}$ là:

A. -1.

B. 1..

C. 7..

D. $+\infty$.

Câu 3. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{3x^2+2}}{5x + \sqrt{x^2+1}}$:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{2-\sqrt{3}}{6}$

D. 0

Câu 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{3-x^2}$ bằng:

A. -2.

B. $-\frac{1}{3}$.C. $\frac{1}{3}$.

D. 2.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

A. $\frac{1}{2}$.B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. 0.

D. $+\infty$.

Câu 6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}$ bằng:

A. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{3}$

D. 1

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = (x+2)\sqrt{\frac{x-1}{x^4+x^2+1}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

A. 0.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. Không tồn

tại.

Câu 9. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-x+3}}{2|x|-1}$ bằng:

A. 3.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. $+\infty$.

Câu 10. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4+8x}{x^3+2x^2+x+2}$ là:

A. $-\frac{21}{5}$.

B. $\frac{21}{5}$.

C. $-\frac{24}{5}$.

D. $\frac{24}{5}$.

Câu 12. Tìm giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x+1}-x)$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $-\frac{1}{2}$

D. 0

Câu 13. Tìm giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{4x^2+1}-x)$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{3}$

D. 0

Câu 14. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^5-3x^3+x+1)$ là:

A. $-\infty$.

B. 0.

C. 4.

D. $+\infty$.

Câu 15. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^4-x^3+x^2-x}$ là:

A. $-\infty$.

B. 0.

C. 1.

D. $+\infty$.

Câu 16. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2+x+1})$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{3}$

D. 0

Câu 17. Tìm giới hạn $M = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2+3x+1} - \sqrt{x^2-x+1})$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{3}$

D. Đáp án

khác

Câu 18. Tìm giới hạn $N = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3+2x} - 2x)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 0

Câu 19. Tìm giới hạn $H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{16x^4 + 3x + 1} - \sqrt{4x^2 + 2} \right) :$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 0

Câu 20. Tìm giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x - 2x} \right) :$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 0

Câu 21. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x + 1}{2x^2 + x + 1} :$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 0

Câu 22. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + \dots + b_{m-1}x + b_m} \ (a_0b_0 \neq 0) :$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** Đáp án

khác

Câu 23. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^3 + 1} - \sqrt{2x^2 + x + 1}}{\sqrt[4]{4x^4 + 2}} :$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ **D.** 0

Câu 24. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x^2 + 1} - 2x + 1}{\sqrt[3]{2x^3 - 2} + 1} :$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 0

Câu 25. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + 1)^3(x + 2)^4}{(3 - 2x)^7} :$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{16}$ **D.** 0

Câu 26. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 4} - 2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} :$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** 0

Câu 27. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{3x^2 + 2}}{5x - \sqrt{x^2 + 1}} :$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ **D.** 0

Câu 28. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{3}$

D. -1

Câu 29. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{2x^3+x-1} \right)$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{3}$

D. 0

Câu 30. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2+x+1} - 2x \right)$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{1}{2}$

D. 0

Câu 31. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} + \sqrt{x^2+x+1} \right)$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $-\frac{1}{6}$

D. 0

Câu 32. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - 2\sqrt{x^2-x+x} \right)$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{3}{2}$

D. 0

Câu 33. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x+x})$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $-\frac{1}{4}$

D. 0

Câu 34. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + \dots + b_{m-1}x + b_m}, (a_0b_0 \neq 0)$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{3}$

D. Đáp án

khác

Câu 35. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x} + \sqrt[3]{8x^3+x-1}}{\sqrt[4]{x^4+3}}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{3}$

D. 4

Câu 36. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2} + \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{3}{2}$

D. 0

Câu 37. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x^2+1} + 2x + 1}{\sqrt[3]{2x^3+x+1+x}}$:

GV : Đào Phương Thảo

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{4}{3}$

D. 0

Câu 38. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{2}{nx}$ là:

A. Không tồn tại.

B. 0 .

C. 1.

D. $+\infty$.

DẠNG 4: GIỚI HẠN MỘ BÊN VÀ CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH KHÁC

Phương pháp:

1. Giới hạn một bên : Áp dụng định lý giới hạn của một tích và một thương..

2. Dạng $\infty - \infty$: Giới hạn này thường có chứa căn

Ta thường sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp của tử và mẫu, Sau đó tìm cách biến đổi đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

3. Dạng $0 \cdot \infty$:

Ta cũng thường sử dụng các phương pháp như các dạng ở trên.

Câu 1. Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)$:

- A. $-\infty$. B. 0. C. $+\infty$. D. Không tồn tại.

Câu 2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^3 - x^2}}{\sqrt{x-1} + 1 - x}$ bằng:

- A. -1. B. 0. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 3. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$ bằng:

- A. $-\infty$. B. -1. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 4. Giá trị đúng của $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$

- A. Không tồn tại. B. 0. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 5. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x \right)$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 0

Câu 6. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2 - x + 1} \right)$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{1}{4}$ D. 0

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1}$. Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$:

- A. $-\infty$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $+\infty$.

Câu 8. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} - x]$:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ D.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2n}$$

GV : Đào Phương Thảo

Câu 9. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x)$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $-\frac{1}{2}$

D. 0

Câu 10. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{4x^2 + 1} - x)$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{1}{4}$

D. 0

Câu 11. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1})$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{1}{4}$

D. Đáp án

khác

Câu 12. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 2x} - 2x)$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{1}{4}$

D. 0

Câu 13. Tìm giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{16x^4 + 3x + 1} - \sqrt{4x^2 + 2})$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{1}{4}$

D. 0

Câu 14. Tìm giới hạn $F = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt[3]{1 - x^3})$:

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. $\frac{1}{4}$

D. 0

GV : Đào Phương Thảo