

CHUYÊN ĐỀ : BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC (PHẦN -TỰ LUẬN)

1. Tính chất

Điều kiện	Nội dung	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	(1)
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	(2a)
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	(2b)
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	(3)
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	(4)
n nguyên dương	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	(5a)
	$0 < a < b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}$	(5b)
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	(6a)
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	(6b)

2. Một số bất đẳng thức thông dụng

a) $a^2 \geq 0, \forall a$; $a^2 + b^2 \geq 2ab$

b) **Bất đẳng thức Cô-si:**

- Với $a, b \geq 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.
- Với $a, b, c \geq 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Hệ quả:

- Nếu $x, y > 0$ có $S = x + y$ không đổi thì $P = xy$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$.
- Nếu $x, y > 0$ có $P = xy$ không đổi thì $S = x + y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$.

c) **Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối**

Điều kiện	Nội dung
	$ x \geq 0, x \geq x, x \geq -x$
$a > 0$	$ x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
	$ x \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -a \\ x \geq a \end{cases}$
	$ a - b \leq a - b \leq a + b $

d) **Bất đẳng thức về các cạnh của tam giác**

Với a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, ta có:

GV: Đào Phương Thảo

+) $a, b, c > 0$

+) $|a-b| < c < a+b; |b-c| < a < b+c; |c-a| < b < c+a.$

e) Bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki

Với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, ta có: $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow ax=by$.

DẠNG 1: Chứng minh BĐT dựa vào định nghĩa và tính chất cơ bản

• Để chứng minh một BDT ta có thể sử dụng các cách sau:

- Biến đổi BDT cần chứng minh tương đương với một BDT đã biết.
- Sử dụng một BDT đã biết, biến đổi để dẫn đến BDT cần chứng minh.

• Một số BDT thường dùng:

+) $A^2 \geq 0.$

+) $AB \geq 0$ với $A, B \geq 0.$

+) $A^2 + B^2 \geq 0.$

+) $A^2 + B^2 \geq 2AB.$

Chú ý:

- Trong quá trình biến đổi, ta thường chú ý đến các hằng đẳng thức.
- Khi chứng minh BDT ta thường tìm điều kiện để dấu đẳng thức xảy ra. Khi đó ta có thể tìm GTNN và GTLN của biểu thức.

DẠNG 2: Chứng minh BDT dựa vào BDT Cô-si

1. Bất đẳng thức Cô-si:

- Với $a, b \geq 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

- Với $a, b, c \geq 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

2. Hệ quả:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab; \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc.$$

3. Ứng dụng tìm GTLN, GTNN:

- Nếu $x, y > 0$ có $S = x+y$ không đổi thì $P = xy$ lớn nhất $\Leftrightarrow x=y$.
- Nếu $x, y > 0$ có $P = xy$ không đổi thì $S = x+y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=y$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

c) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$

d) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab+bc-ca)$

e) $a^4 + b^4 + c^2 - 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$

f) $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$

g) $a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc$

h) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$

GV: Đào Phương Thảo**Bài 2:** Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$; với $a, b \geq 0$

b) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$

c) $a^4 + 3 \geq 4a$

d) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$; với $a, b, c > 0$

e) $a^4 + b^4 \leq \frac{a^6}{b^2} + \frac{b^6}{a^2}$; với $a, b \neq 0$

f) $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$; với $ab \geq 1$

g) $\frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}} \geq 2$

h) $(a^5 + b^5)(a+b) \geq (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)$; với $ab > 0$

Bài 3: Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$

b) $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 8abc$

c) $(a^2 + 4)(b^2 + 4)(c^2 + 4)(d^2 + 4) \geq 256abcd$

Bài 4: Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

b) $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$

c) $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3$

d) $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$; với $a, b, c > 0$

e) $a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc$

f) $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$; với $a, b, c > 0$

g) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$; với $a, b, c > 0$

Bài 5: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq (a+b+c)^2$

b) $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$

c) $9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b+c)^3$

Bài 6: Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$; với $a, b, c > 0$

b) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq 2 \left(\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \right)$; với $a, b, c > 0$

GV: Đào Phương Thảo

c) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4$. Chứng minh: $\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \leq 1$

d) $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$; với $a, b, c > 0$

e) Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $x + 2y + 4z = 12$. Chứng minh: $\frac{2xy}{x+2y} + \frac{8yz}{2y+4z} + \frac{4xz}{4z+x} \leq 6$

f) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Bài 7: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$

b) Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$

c) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $a + b + c \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ab}$$

d) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh: $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30$

Bài 8: Áp dụng bất đẳng thức Cô- si để tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}; x > 0$

b) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}; x > 1$

c) $y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{x+1}; x > -1$

d) $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{2x-1}; x > \frac{1}{2}$

e) $y = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}; 0 < x < 1$

f) $y = \frac{x^3+1}{x^2}; x > 0$

g) $y = \frac{x^2+4x+4}{x}; x > 0$

h) $y = x^2 + \frac{2}{x^3}; x > 0$

Bài 9: Áp dụng bất đẳng thức Cô- si để tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $y = (x+3)(5-x); -3 \leq x \leq 5$

b) $y = x(6-x); 0 \leq x \leq 6$

c) $y = (x+3)(5-2x); -3 \leq x \leq \frac{5}{2}$

d) $y = (2x+5)(5-x); \frac{-5}{2} \leq x \leq 5$

GV: Đào Phương Thảo

e) $y = (6x + 3)(5 - 2x) : \frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

f) $y = \frac{x}{x^2 + 2}; x > 0$