

BÀI TẬP : SỬ DỤNG HÀM ĐẶC TRƯNG

Câu1: Cho phương trình

$$\sin x(2 - \cos 2x) - 2(2 \cos^3 x + m + 1)\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2}$$

Tính tích các giá trị nguyên của m để phương trình trên có đúng một nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$?

- A.** 12. **B.** -16. **C.** 24. **D.** 20.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình ban đầu tương đương với

$$\sin x(2 - \cos 2x) - 2(2 \cos^3 x + m + 1)\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^3 x + \sin x = 2(2 \cos^3 x + m + 2)\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} + \sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} \quad (1)$$

Xét hàm $f(t) = 2t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, (1) trở thành

$$f(\sin x) = f(\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2}) \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} \quad (2).$$

Với $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ thì $\sin x \geq 0$ nên phương trình (2) tương đương với

$$\sin^2 x = 2 \cos^3 x + m + 2 \Leftrightarrow m = -2 \cos^3 x - \cos^2 x - 1 \quad (3).$$

Đặt $t = \cos x$, do $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ nên $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$. Phương trình (3) trở thành $m = -2t^3 - t^2 - 1 \quad (4)$.

Xét hàm số $f(t) = -2t^3 - t^2 - 1$ với $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$f'(t) = -6t^2 - 2t \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

Bảng xét dấu

t	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	1		
f'		-	0	+	0	-
f		-1	$-\frac{28}{27}$	-1	-4	

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra (4) có đúng một nghiệm thuộc $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$ khi $m = -1$ hoặc

$-\frac{28}{27} \leq m \leq -4$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; -2; -3; -4\} \Rightarrow$ Tích các giá trị nguyên của m là 24.

GV: Đào Phương Thảo

Câu 2: Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn đẳng thức $(xy - 1)2^{xy-1} = (x^2 + y)2^{x^2+y}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của y .

A. $y_{\min} = 3$.

B. $y_{\min} = 2$.

C. $y_{\min} = 1$.

D. $y_{\min} = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có

$$(xy-1)2^{2xy-1} = (x^2+y)2^{x^2+y}$$

$$\Leftrightarrow 2(xy-1)2^{2xy-1} = 2(x^2+y)2^{x^2+y}$$

$$\Leftrightarrow (2xy-1-1)2^{2xy-1} = (x^2+y+1-1)2^{x^2+y+1} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = (t-1)2^t, t > 0$

Khi đó $f'(t) = 2^t + (t-1)2^t \ln 2 = 2^t(1+t \ln 2 - \ln 2) > 0, \forall t > 0$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow f(2xy-1) = f(x^2+y+1) \Leftrightarrow 2xy-1 = x^2+y+1$$

$$\Leftrightarrow 2xy - y = x^2 + 2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2+2}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}. \text{ Vì } y \text{ dương nên } x > \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	0.5	2	$+\infty$	
y'	+		-	-	0	+
y				$+\infty$	2	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y_{\min} = 2$.

GV: Đào Phương Thảo

Câu 3 : Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3}\sqrt[3]{m+3}\sin x = \sin x$ có nghiệm thực ?

A. 5.

B. 7.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\sqrt[3]{m+3}\sqrt[3]{m+3\sin x} = \sin x \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{m+3\sin x} = \sin^3 x - m$. (1)

Đặt $\sin x = u$. Điều kiện $-1 \leq u \leq 1$ và $\sqrt[3]{m+3\sin x} = v \Rightarrow m+3u = v^3$. (2)

Khi đó (1) trở thành $u^3 = m+3v$ (3)

Từ (3) và (2) suy ra $u^3 - 3v = v^3 - 3u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow u = v$.

(Do $u^2 + uv + v^2 + 3 = \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3v^2}{4} + 3 > 0, \forall u, v \in \mathbb{R}$)

Suy ra: $\sqrt[3]{m+3u} = u \Leftrightarrow m = u^3 - 3u$, với $u \in [-1; 1]$.

Xét hàm số $f(u) = u^3 - 3u$ trên đoạn $[-1; 1]$. Ta có $f'(u) = 3u^2 - 3$;
 $f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \pm 1$.

Suy ra $\max_{[-1; 1]} f(u) = 2, \min_{[-1; 1]} f(u) = -2$.

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-2 \leq m \leq 2$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$

.

Thử cách làm hàm đặc trưng nhé

GV: Đào Phương Thảo

Câu 4. Cho x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-9) + y(y-9) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức $Q = \frac{5x+4y+11}{x+y+10}$ khi x, y thay đổi.

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A.

Từ giả thiết $\log_3 \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-9) + y(y-9) + xy$ ta có

$$\log_3 [9(x+y)] + 9(x+y) = \log_3 (x^2+y^2+xy+2) + (x^2+y^2+xy+2) \quad (*)$$

Vì hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên từ $(*)$ ta có

$$x^2 + y^2 + xy + 2 = 9(x+y) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy + 2 = 9(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + xy + \frac{y^2}{4}\right) + \frac{3}{4}(y^2 - 6y + 9) - 9\left(x + \frac{y}{2}\right) - \frac{19}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - 9\left(x + \frac{y}{2}\right) - \frac{19}{4} + \frac{3}{4}(y-3)^2 = 0$$

$$\text{Suy ra } \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - 9\left(x + \frac{y}{2}\right) - \frac{19}{4} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x + \frac{y}{2} \leq \frac{19}{2} \text{ hay } -1 \leq 2x + y \leq 19.$$

$$\text{Khi đó } Q = \frac{5x+4y+11}{x+y+10} = \frac{3(x+y+10) + (2x+y-19)}{x+y+10} = 3 + \frac{2x+y-19}{x+y+10} \leq 3.$$

Vậy $\max Q = 3$ khi $x = 8; y = 3$.

GV: Đào Phương Thảo

Câu 5. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x, y \geq 0$; $z \geq -1$ và $\log_2 \frac{x+y+1}{4x+y+3} = 2x-y$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{(x+z+1)^2}{3x+y} + \frac{(y+2)^2}{x+2z+3} \text{ tương ứng bằng:}$$

A. $4\sqrt{2}$.

B. 6 .

C. $6\sqrt{3}$.

D. 4 .

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có: $\log_2 \frac{x+y+1}{4x+y+3} = 2x-y \Leftrightarrow 1 + \log_2 \frac{x+y+1}{4x+y+3} = 2x-y+1$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{2x+2y+2}{4x+y+3} = 2x-y+1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2x+2y+2}{4x+y+3} = (4x+y+3) - (2x+2y+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x+2y+2) + (2x+2y+2) = \log_2 (4x+y+3) + (4x+y+3)$$

$$\Leftrightarrow f(2x+2y+2) = f(4x+y+3) \Leftrightarrow 2x+2y+2 = 4x+y+3 \Leftrightarrow y = 2x+1$$

(Với hàm $f(t) = \log_2 t + t$ là đơn điệu trên $(0; +\infty)$)

$$\text{Thay vào biểu thức } T \text{ ta được: } T = \frac{(x+z+1)^2}{3x+y} + \frac{(y+2)^2}{x+2z+3} = \frac{(x+z+1)^2}{5x+1} + \frac{(2x+3)^2}{x+2z+3}$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$T = \frac{(x+z+1)^2}{5x+1} + \frac{(2x+3)^2}{x+2z+3} \geq \frac{(x+z+1+2x+3)^2}{5x+1+x+2z+3} = \frac{(3x+z+4)^2}{6x+2z+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3x+z+4)^2}{3x+z+2}$$

$$\text{Đặt } t = 3x+z+2 \Rightarrow T \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(t+2)^2}{t} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{4}{t} + 4 \right) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} + 4 \right) = 4$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} y = 2x+1 \\ t = 2 = 3x+z+2 \\ \frac{x+z+1}{5x+1} = \frac{2x+3}{x+2z+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức T là $T_{\min} = 4$. Vậy ta **chọn đáp án D**.