

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du$. (*)

Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$).

Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u' dx$.

Bước 2. Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.** $I = \int P(x) \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx \end{cases}$.

• **Dạng 2.** $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$.

• **Dạng 3.** $I = \int P(x) \ln(mx+n) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$.

• **Dạng 4.** $I = \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} e^x dx$.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$.

BÀI TẬP

DẠNG 1.

Câu 1. Tìm $\int x \sin 2x dx$ ta thu được kết quả nào sau đây?

A. $x \sin x + \cos x + C$

B. $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + C$

C. $x \sin x + \cos x$

D. $\frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x$

Câu 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là:

A. $F(x) = -x \cos x - \sin x + C.$

B. $F(x) = x \cos x - \sin x + C.$

C. $F(x) = -x \cos x + \sin x + C.$

D. $F(x) = x \cos x + \sin x + C.$

Câu 3. Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}.$

B. $ab = \frac{1}{4}.$

C. $ab = -\frac{1}{8}.$

D. $ab = -\frac{1}{4}.$

Câu 4. Cho biết $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x \cos ax$.

A. $x \sin x - \cos x + C.$

B. $\frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

C. $x \sin x + \cos x + C.$

D. $\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

Câu 5. Nguyên hàm của $I = \int x \sin^2 x dx$ là:

A. $\frac{1}{8}(2x^2 - x \sin 2x - \cos 2x) + C.$

B. $\frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4}(x^2 + x \sin 2x) + C.$

C. $\frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x - x \sin 2x\right) + C.$

D. Đáp án A và C đúng.

Câu 6. Tìm nguyên hàm $I = \int (x-1) \sin 2x dx$

A. $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C.$

B. $I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C.$

C. $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C.$

D. $I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C.$

Câu 7. Tìm nguyên hàm $\int \sin \sqrt{x} dx$

A. $\int \sin \sqrt{x} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + C.$

B. $\int \sin \sqrt{x} dx = -\cos \sqrt{x} + C.$

C. $\int \sin \sqrt{x} dx = \cos \sqrt{x} + C.$

D. $\int \sin \sqrt{x} dx = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$

Câu 8. Nguyên hàm của $I = \int x \sin x \cos^2 x dx$ là:

A. $I_1 = -x \cos^3 x + t - \frac{1}{3}t^3 + C, t = \sin x.$

B. $I_1 = -x \cos^3 x + t - \frac{2}{3}t^3 + C, t = \sin x$

C. $I_1 = x \cos^3 x + t - \frac{1}{3}t^3 + C, t = \sin x.$

D. $I_1 = x \cos^3 x + t - \frac{2}{3}t^3 + C, t = \sin x.$

Câu 9. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ là :

A. $x \tan x - \ln |\cos x|$

B. $x \tan x + \ln (\cos x)$

C. $x \tan x + \ln |\cos x|$

D. $x \tan x - \ln |\sin x|$

Câu 10. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ là :

A. $x \cot x - \ln |\sin x|$

B. $-x \cot x + \ln (\sin x)$

C. $-x \tan x + \ln |\cos x|$

D. $x \tan x - \ln |\sin x|$

Câu 11. Cho $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn

$F(0) = 0$. Biết $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a = 3$. Tính $F(a) - 10a^2 + 3a$.

A. $-\frac{1}{2} \ln 10.$

B. $-\frac{1}{4} \ln 10.$

C. $\frac{1}{2} \ln 10.$

D. $\ln 10.$

DẠNG 2.

Câu 12. Họ nguyên hàm của $\int e^x (1+x) dx$ là:

A. $I = e^x + xe^x + C.$

B. $I = e^x + \frac{1}{2} xe^x + C.$

C. $I = \frac{1}{2} e^x + xe^x + C.$

D. $I = xe^x + C.$

Câu 13. Biết $\int xe^{2x} dx = axe^{2x} + be^{2x} + C$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính tích ab .

A. $ab = -\frac{1}{4}.$

B. $ab = \frac{1}{4}.$

C. $ab = -\frac{1}{8}.$

D. $ab = \frac{1}{8}.$

Câu 14. Cho biết $\int xe^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{2x} (ax+b) + C$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$ và C là hằng số bất kì. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. $a+2b=0.$

B. $b>a.$

C. $ab.$

D. $2a+b=0.$

Câu 15. Biết $F(x) = (ax+b)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $y = (2x+3)e^x$. Khi đó $a+b$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

- Câu 16.** Biết $\int (x+3) \cdot e^{-2x} dx = -\frac{1}{m} e^{-2x} (2x+n) + C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$. Tính $S = m^2 + n^2$.
- A.** $S = 10$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = 65$. **D.** $S = 41$.
- Câu 17.** Tìm nguyên hàm $I = \int (2x-1)e^{-x} dx$.
- A.** $I = -(2x+1)e^{-x} + C$. **B.** $I = -(2x-1)e^{-x} + C$.
C. $I = -(2x+3)e^{-x} + C$. **D.** $I = -(2x-3)e^{-x} + C$.
- Câu 18.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(1)$.
- A.** $F(1) = 11e - 3$. **B.** $F(1) = e + 3$. **C.** $F(1) = e + 7$. **D.** $F(1) = e + 2$.
- Câu 19.** Cho hàm số $f(x) = (2x-3)e^x$. Nếu $F(x) = (mx+n)e^x$ ($m, n \in \mathbb{Q}$) là một nguyên hàm của $f(x)$ thì hiệu $m-n$ bằng
- A.** 7. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.
- Câu 20.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0) = 2$. Hãy tính $F(-1)$.
- A.** $6 - \frac{15}{e}$. **B.** $4 - \frac{10}{e}$. **C.** $\frac{15}{e} - 4$. **D.** $\frac{10}{e}$.
- DẠNG 3.**

- Câu 21.** Kết quả của $\int \ln x dx$ là:
- A.** $x \ln x + x + C$ **B.** Đáp án khác
C. $x \ln x + C$ **D.** $x \ln x - x + C$
- Câu 22.** Nguyên hàm của $I = \int x \ln x dx$ bằng với:
- A.** $\frac{x^2}{2} \ln x - \int x dx + C$. **B.** $\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{2} x dx + C$.
C. $x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx + C$. **D.** $x^2 \ln x - \int x dx + C$.
- Câu 23.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln(x+2)$.
- A.** $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{4} + C$.
B. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2-4x}{4} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C$.
D. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C$.
- Câu 24.** Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của $g(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}$?

A. $\frac{-\ln 2x - x \ln 2}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 1999.$

B. $\frac{-\ln x}{x+1} - \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 1998.$

C. $\frac{\ln x}{x+1} - \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 2016.$

D. $\frac{\ln x}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 2017.$

Câu 25. Họ nguyên hàm của $I = \int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} dx$ là:

A. $\cot x \cdot \ln(\cos x) + x + C.$

B. $-\cot x \cdot \ln(\cos x) - x + C.$

C. $\cot x \cdot \ln(\cos x) - x + C.$

D. $-\cot x \cdot \ln(\cos x) + x + C.$

Câu 26. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x.$

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 1) + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

Câu 27. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0.$

Giá trị của $F(-1) + F(2)$ bằng

A. $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5.$ B. 0. C. $\frac{7}{3} \ln 2.$ D. $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5.$

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 \ln \left(\frac{4-x^2}{4+x^2} \right)?$

A. $x^4 \ln \left(\frac{4-x^2}{4+x^2} \right) - 2x^2.$

B. $\left(\frac{x^4-16}{4} \right) \ln \left(\frac{4-x^2}{4+x^2} \right) - 2x^2.$

C. $x^4 \ln \left(\frac{4-x^2}{4+x^2} \right) + 2x^2.$

D. $\left(\frac{x^4-16}{4} \right) \ln \left(\frac{4-x^2}{4+x^2} \right) + 2x^2.$

Câu 29. Tìm $H = \int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2} ?$

A. $H = \frac{x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} + \tan x + C.$

B. $H = \frac{x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} - \tan x + C.$

C. $H = \frac{-x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} + \tan x + C.$

D. $H = \frac{-x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} - \tan x + C.$

Câu 30. $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$ có dạng $\frac{a}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{6}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a bằng:
A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Câu 31. Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tính $\int_1^e f'(x) \ln x dx$ bằng:
A. $I = \frac{e^2-3}{2e^2}$. **B.** $I = \frac{2-e^2}{e^2}$. **C.** $I = \frac{e^2-2}{e^2}$. **D.** $I = \frac{3-e^2}{2e^2}$.

Câu 32. Cho $F(x) = \frac{a}{x}(\ln x + b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + b$.
A. $S = -2$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 0$.

Câu 33. Cho các số thực a, b khác không. Xét hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$ với mọi x khác -1 . Biết $f'(0) = -22$ và $\int_0^1 f(x) dx = 5$. Tính $a + b$?
A. 19. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 34. Cho a là số thực dương. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ và $F(2018) = e^{2018}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $a \in \left(\frac{1}{2018}; 1\right)$. **B.** $a \in \left[0; \frac{1}{2018}\right]$. **C.** $a \in [1; 2018)$. **D.** $a \in [2018; +\infty)$.

DẠNG 4:

Câu 35. Phát biểu nào sau đây là đúng?
A. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$. **B.** $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$.
C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$. **D.** $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$.

Câu 36. Tìm $J = \int e^x \cdot \sin x dx$?
A. $J = \frac{e^x}{2}(\cos x - \sin x) + C$. **B.** $J = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$.
C. $J = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$. **D.** $J = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x + 1) + C$.