CỰC TRỊ HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:

- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là ***điểm cực trị của hàm số*** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp *K*.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là ***giá trị cực trị (hay cực trị)*** *của hàm số*.
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f.

*** Nhận xét:**

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập D; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $(a;b)$ nào đó chứa x_0 hay nói cách khác khi x_0 điểm cực đại (cực tiểu) sẽ tồn tại khoảng (a;b) chứa x_0 sao cho $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $(a;b)$.
- Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập K. Hàm số có thể không có cực trị trên một tập cho trước.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lí 1:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý:

- Đạo hàm $f'(x)$ *có thể* bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.
- Hàm số *có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
- Hàm số *chỉ có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí 2:

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

- Nếu trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

GV: ĐÀO PHƯƠNG THẢO-LT

4. Quy tắc tìm cực trị

Quy tắc 1:

- <u>*Bước 1:*</u> Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- <u>*Bước 2*</u>: Tìm các điểm x_i $(i=1;2;...)$ mà tại đó *đạo hàm của hàm số bằng* 0 hoặc hàm số *liên tục nhưng không có đạo hàm.*
- <u>*Bước 3:*</u> Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ *đổi dấu khi đi qua* x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Định lí 3:

Giả sử $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0-h;x_0+h)$ với $h>0$. Khi đó:

- Nếu $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0.
- Nếu $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

Quy tắc 2:

- <u>*Bước 1:*</u> Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- <u>*Bước 2*</u>: Tìm các nghiệm x_i $(i=1;2;...)$ của phương trình $f'(x)=0$.
- <u>*Bước 3:*</u> Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.
  - ∗ Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.
  - ∗ Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ HÀM SỐ

1. Cực trị của hàm đa thức bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

1.1. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn hoành độ cho trước

<u>Bài toán tổng quát</u>:

Cho hàm số $y=f(x;m)=ax^3+bx^2+cx+d$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1,x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

<u>Phương pháp</u>:

- <u>*Bước 1:*</u>
  - ∗ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
  - ∗ Đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c=Ax^2+Bx+C$
- <u>*Bước 2:*</u>

  Hàm số <u>có cực trị</u> (hay <u>có hai cực trị</u>, <u>hai cực trị phân biệt</u> hay <u>có cực đại và cực tiểu</u>)

⇔ $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua 2 nghiệm đó

⇔ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=3a\neq 0 \\ \Delta_{y'}=B^2-4AC=4b^2-12ac>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases} \Rightarrow m\in D_1.$$

- <u>*Bước 3:*</u>

  Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$.

  Khi đó: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{B}{A}=-\dfrac{2b}{3a} \\ x_1.x_2=\dfrac{C}{A}=\dfrac{c}{3a} \end{cases}$.

- <u>*Bước 4:*</u>

GV: ĐÀO PHƯƠNG THẢO -LT

Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P. Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

- *Bước 5:*
  Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

***Chú ý:** Hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Điều kiện	*Kết luận*
$b^2 - 3ac \leq 0$	Hàm số không có cực trị.
$b^2 - 3ac > 0$	Hàm số có hai điểm cực trị.

➢ ***Điều kiện để hàm số có cực trị cùng dấu, trái dấu.***

- *Hàm số có 2 cực trị trái dấu*
  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu
  $\Leftrightarrow A.C = 3ac < 0 \Leftrightarrow ac < 0$.
- *Hàm số có hai cực trị cùng dấu*
  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$$
- *Hàm số có hai cực trị cùng dấu dương*
  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$$
- *Hàm số có hai cực trị cùng dấu âm*
  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} < 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$$

➢ ***Tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn:***

$$\left[\begin{array}{l} x_1 < \alpha < x_2 \\ x_1 < x_2 < \alpha \\ \alpha < x_1 < x_2 \end{array}\right.$$

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < \alpha < x_2$
  $$\Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \Leftrightarrow x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 < 0$$
- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < \alpha$
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases}$$

GV: ĐÀO PHƯƠNG THẢO -LT

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $\alpha < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-\alpha)(x_2-\alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 - \alpha(x_1+x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases}$$

- Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng

khi có 1 nghiệm là $x = \dfrac{-b}{3a}$, có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân khi có 1 nghiệm là $x = -\sqrt[3]{\dfrac{d}{a}}$.

1.2. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng

<u>Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng</u>:

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.

Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) < 0$ thì hai điểm A, B nằm về hai phía so với đường thẳng Δ.

Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) > 0$ thì hai điểm A, B nằm cùng phía so với đường thẳng Δ.

<u>Một số trường hợp đặc biệt</u>:

- Các điểm cực trị của đồ thị nằm *<u>cùng về 1 phía đối với trục Oy</u>*
  $\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị cùng dấu
  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu
- Các điểm cực trị của đồ thị nằm *<u>cùng về 2 phía đối với trục Oy</u>*
  $\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị trái dấu
  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu
- Các điểm cực trị của đồ thị nằm *<u>cùng về 1 phía đối với trục Ox</u>*
  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CĐ}.y_{CT} > 0$

Đặc biệt:

- Các điểm cực trị của đồ thị nằm *<u>cùng về phía trên đối với trục Ox</u>*
  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \\ y_{CĐ} + y_{CT} > 0 \end{cases}$
- Các điểm cực trị của đồ thị nằm *<u>cùng về phía dưới đối với trục Ox</u>*
  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \\ y_{CĐ} + y_{CT} < 0 \end{cases}$
- Các điểm cực trị của đồ thị nằm *<u>về 2 phía đối với trục Ox</u>*
  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CĐ}.y_{CT} < 0$

(*áp dụng khi không nhẩm được nghiệm và viết được phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số*)

Hoặc: Các điểm cực trị của đồ thị nằm *<u>về 2 phía đối với trục Ox</u>*

- $\Leftrightarrow$ đồ thị cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt
  $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (*áp dụng khi nhẩm được nghiệm*)

1.3. Phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị

$\boxed{g(x) = \left(\dfrac{2c}{3} - \dfrac{2b^2}{9a}\right)x + d - \dfrac{bc}{9a}}$ *hoặc* $\boxed{g(x) = y - \dfrac{y'.y''}{18a}.}$ *hoặc* $\boxed{g(x) = y - \dfrac{y'.y''}{3y'''}}$

1.4. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc 3 là

GV: ĐÀO PHƯƠNG THẢO - LT

$$AB=\sqrt{\frac{4e+16e^3}{a}} \text{ với } e=\frac{b^2-3ac}{9a}$$

2. Cực trị của hàm bậc 4 trùng phương $y=ax^4+bx^2+c,\quad (a\neq 0)$

2.1. Một số kết quả cần nhớ

- Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow ab\geq 0$.
- Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow ab<0$.
- Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b\geq 0 \end{cases}$.
- Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b\leq 0 \end{cases}$.
- Hàm số có hai cực tiểu và một cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases}$.
- Hàm số có một cực tiểu và hai cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$.

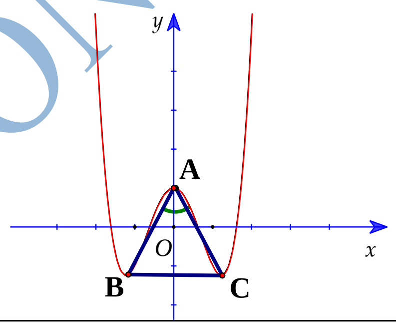
2.2. Một số công thức tính nhanh

Giả sử hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị: $A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

tạo thành tam giác ABC thỏa mãn dữ kiện: $ab<0$

Đặt: $BAC=\alpha$

Tổng quát: $\boxed{\cot^2\frac{\alpha}{2}=\frac{-b^3}{8a}}$



Dữ kiện	Công thức thỏa mãn $ab<0;c\neq 0$
Tam giác ABC vuông cân tại A	$b^3=-8a$
Tam giác ABC đều	$b^3=-24a$
Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC}=S_0$	$32a^3(S_0)^2+b^5=0$
Tam giác ABC có diện tích $max(S_0)$	$S_0=\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC}=r_0$	$r=\frac{b^2}{4\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\frac{b^3}{8a}}\right)}$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC}=R$	$R=\frac{b^3-8a}{8\lvert a\rvert b}$
Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC=m_0$	$am_0^2+2b=0$

GV: ĐÀO PHƯƠNG THẢO -LT

Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
Tam giác ABC có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 = 4ac$
Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 = 6ac$
Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
Tam giác ABC cùng điểm O tạo thành hình thoi	$b^2 = 2ac$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3.k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2}\|ac\|$
Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 = 8ac$
Đồ thị hàm số $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng	$b^2 = \frac{100}{9}ac$
Định tham số để hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ và trục hoành có diện tích phần trên và phần dưới bằng nhau.	$b^2 = \frac{36}{5}ac$
Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$	

GV: ĐÀO PHƯƠNG THẢO -LT