



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG



LÝ THUYẾT.

I. VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG.

1. Định nghĩa:

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng (Δ) .

2. Nhận xét:

- Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta \Rightarrow k\vec{u}$ ($k \neq 0$) cũng là VTCP của đường thẳng Δ . Vậy đường thẳng (Δ) có vô số VTCP và các VTCP này cùng phương với nhau.
- Nếu Δ đi qua hai điểm A và B thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP của đường thẳng Δ .
- Nếu Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau (P) và (Q) thì $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q]$ - là một VTCP của đường thẳng Δ (với $\vec{n}_P; \vec{n}_Q$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của 2 mặt phẳng $(P); (Q)$).

II. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG.

1. Định nghĩa:

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$

a) **Phương trình tham số** của đường thẳng Δ là:
$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

b) **Phương trình chính tắc** của đường thẳng Δ là:
$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \text{ (với } u_1 u_2 u_3 \neq 0 \text{)}.$$

2. Chú ý:

Cho đường thẳng Δ có phương trình là:
$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ - là một VTCP của Δ .

$$M \in \Delta \Leftrightarrow M(x_0 + u_1 t; y_0 + u_2 t; z_0 + u_3 t)$$

III. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG; GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐƯỜNG THẲNG.

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng α có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = A; B; C$ và đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = u_1; u_2; u_3$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng α , $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, ta có:

$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{n}; \vec{u}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}$$

2. Góc giữa hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ và đường thẳng Δ' có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (u'_1; u'_2; u'_3)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và đường thẳng Δ' , $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, ta có:

$$\cos \varphi = \left| \cos \vec{u}; \vec{u}' \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|}$$

IV. KHOẢNG CÁCH.

1. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M và đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, có VTCP $\vec{u} = u_1; u_2; u_3$. Khoảng cách giữa M và Δ là:

$$d(M; \Delta) = \frac{|\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song: bằng khoảng cách từ một điểm tùy ý thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, có VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ và đường thẳng Δ' đi qua điểm $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$, có VTCP $\vec{u}' = u'_1; u'_2; u'_3$

Giả sử $\Delta // \Delta'$, khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' là:

$$d(\Delta; \Delta') = d(M_0; \Delta') = d(M'_0; \Delta)$$

3 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, có VTCP $\vec{u} = u_1; u_2; u_3$ và đường thẳng Δ' đi qua điểm $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = u'_1; u'_2; u'_3$

Giả sử Δ và Δ' là hai đường thẳng chéo nhau, khi đó khoảng cách giữa chúng là:

$$d(\Delta; \Delta') = \frac{|\overrightarrow{[u; u']} \cdot \overrightarrow{MM_0}|}{|\overrightarrow{[u; u']}|}$$

V. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG; VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG.

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng Δ và Δ' biết rằng:

$$\Delta \text{ đi qua điểm } M_0(x_0; y_0; z_0) \text{ và có VTCP } \vec{u} = u_1; u_2; u_3 \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \\ z = z_0 + u_3t \end{cases}$$

$$\Delta' \text{ đi qua điểm } M'_0(x'_0; y'_0; z'_0) \text{ và có VTCP } \vec{u'} = u'_1; u'_2; u'_3 \Rightarrow \Delta': \begin{cases} x = x'_0 + u'_1t' \\ y = y'_0 + u'_2t' \\ z = z'_0 + u'_3t' \end{cases}$$

Cách 1:

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x_0 + u_1t = x'_0 + u'_1t' \\ y_0 + u_2t = y'_0 + u'_2t' \\ z_0 + u_3t = z'_0 + u'_3t' \end{cases} \text{ (ẩn } t, t') \text{ (1).}$$

- a) $\Delta // \Delta' \Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) vô nghiệm và hai vector $\vec{u}, \vec{u'}$ cùng phương.
- b) Δ và Δ' chéo nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) vô nghiệm và hai vector $\vec{u}, \vec{u'}$ không cùng phương.
- c) Δ và Δ' trùng nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) có vô số nghiệm.
- d) Δ và Δ' cắt nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) có đúng một nghiệm.

Cách 2:

- a) $\Delta // \Delta' \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{u'}$ cùng phương và $M_0 \notin \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u'}] = \vec{0} \\ [\vec{u}, \overrightarrow{M_0M'_0}] \neq \vec{0} \end{cases}$
- b) Δ và Δ' trùng nhau $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{u'}$ cùng phương và $M_0 \in \Delta' \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u'}] = [\vec{u}, \overrightarrow{M_0M'_0}] = \vec{0}$.
- c) Δ và Δ' cắt nhau $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{u'}$ không cùng phương và ba vector $\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{M_0M'_0}$ đồng phẳng.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u'}] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}, \vec{u'}] \cdot \overrightarrow{M_0M'_0} = 0 \end{cases}$$
- d) Δ và Δ' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{u'}$ không cùng phương và $\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{M_0M'_0}$ không đồng phẳng

$$\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u'}] \cdot \overrightarrow{M_0M'_0} \neq 0.$$

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ và đường thẳng Δ có

phương trình:
$$\begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \\ z = z_0 + u_3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Gọi $\vec{n} = A; B; C$ là VTPT của mặt phẳng α và $\vec{u} = u_1; u_2; u_3$ là VTCP của đường thẳng Δ .

Cách 1:

Xét phương trình: $Ax_0 + u_1t + By_0 + u_2t + Cz_0 + u_3t = 0$ (t là ẩn) (2)

a) Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì Δ và α không có điểm chung $\Leftrightarrow \Delta // \alpha$.

b) Nếu phương trình (2) có đúng một nghiệm $t = t_0$ thì đường thẳng Δ cắt mặt phẳng α tại điểm $N(x_0 + u_1t_0; y_0 + u_2t_0; z_0 + u_3t_0)$.

c) Nếu phương trình (2) có vô số nghiệm thì Δ thuộc $\alpha \Leftrightarrow \Delta \subset (\alpha)$.

Cách 2:

a) Δ cắt $\alpha \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$

b) $\Delta // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ M \in \Delta \Rightarrow M \notin (\alpha) \end{cases}$

c) Δ thuộc $\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ M \in \Delta \Rightarrow M \in \alpha \end{cases}$

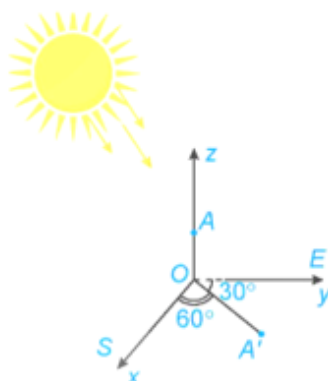


HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét), một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có sàn nhà nằm trên mặt phẳng (Oxy) . Hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): x - 2y + 5 = 0$ và $(Q): x - 2y - 3z + 20 = 0$. Hỏi chiều cao của ngôi nhà tính từ sàn nhà lên nóc nhà (điểm cao nhất của mái nhà) là bao nhiêu?



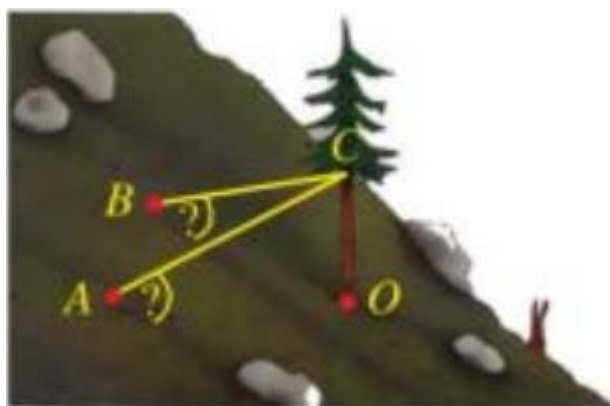
Câu 2: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột thẳng cao 6 m vuông góc với mặt đất, có chân cột đặt tại vị trí O trên mặt đất. Tại một thời điểm, dưới ánh nắng mặt trời, bóng của đỉnh cột dưới mặt đất cách chân cột 3 m về hướng $S60^\circ E$ (hướng tạo với hướng nam góc 60° tạo với hướng đông góc 30°) (hình bên dưới). Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ là O , tia Ox chỉ hướng nam, tia Oy chỉ hướng đông, tia Oz chứa cây cột, đơn vị đo là mét. Tính góc tạo bởi đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét với mặt đất.



Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(11; 4; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (-3; -4; 0)$ với tốc độ là 5 m/s (Đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét); giả sử sau $t(\text{s})$ kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$), cabin đến điểm M ; Một người đứng tại điểm O quan sát cabin chạy trên cáp treo, sau thời gian bao nhiêu thì khoảng cách giữa người quan sát và cabin gần nhau nhất?

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là ki – lô - mét), đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $(-64; 128; 64)$. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát không quá 500 km thì sẽ hiển thị trên màn hình radar. Một máy bay N xuất hiện trên màn hình radar và một máy bay M nằm trong mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1458 = 0$ sao cho hai máy bay M, N thuộc đường thẳng có vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 1)$. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai máy bay M, N là bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

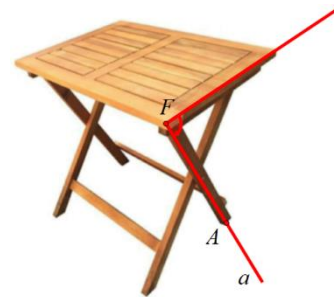
Câu 5: Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như hình vẽ. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm gốc O (gốc cây thông) và A, B (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là $O(0; 0; 0)$, $A(5; -3; 1)$, $B(-3; -4; 2)$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm $C(0; 0; 5)$ và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng. Khi đó, góc tạo bởi dây neo CA và mặt phẳng sườn núi là bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?



Câu 6: Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), tọa độ của A và B lần lượt là $(3; 2; 5; 15)$ và $(21; 27; 5; 10)$. Biết tọa độ du khách khi ở độ cao 12 mét là $(a; b; c)$. Tính $P = 5a + b + c$.



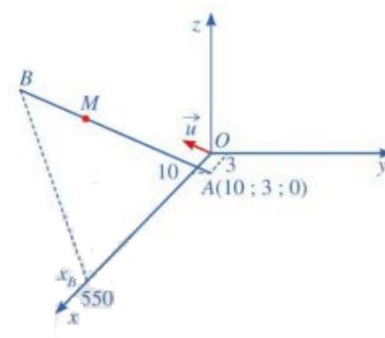
- Câu 7:** Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ Oxyz. Điểm A là chân bàn tiếp xúc với mặt đất thuộc đường thẳng $a: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{4}$ cắt mặt bàn (P): $x + y - 2z + 6 = 0$ tại điểm F. Độ dài chân bàn $FA = 40\sqrt{3} \text{ cm}$, khi đó độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là:



- Câu 8:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, một Cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ kết thúc tại điểm B có hoành độ $x_B = 550$ chuyển động đều theo đường cáp có Vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -2; 1)$ (Hình bên dưới).

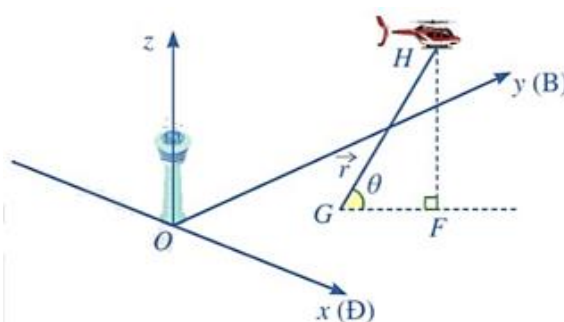


(Nguồn: <https://shutterstock.com>)



- Tính độ dài đường cáp AB?
- Câu 9:** Trong hệ trục tọa độ Oxyz, sàn nhà của một công trình thuộc mặt phẳng Oxy, tay vịn của lan can cầu thang là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(5;1;9)$ và $B(2;1;12)$. Góc tạo bởi tay vịn của lan can cầu thang và mặt sàn nhà bằng bao nhiêu độ?
- Câu 10:** Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 6 m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 2 m; 3 m; 4 m. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ?
- Câu 11:** Bản vẽ thiết kế của một công trình được vẽ trong một hệ trục tọa độ Oxyz. Sàn nhà của công trình thuộc mặt phẳng (Oxz), đường ống thoát nước thẳng và đi qua hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-1;4;-2)$. Tính góc tạo bởi đường ống thoát nước và mặt sàn.

- Câu 12:** Hình bên dưới minh họa đường bay của một chiếc trực thăng H cất cánh từ một sân bay. Xét hệ trục tọa độ Oxyz có gốc tọa độ O là chân tháp điều khiển của sân bay; trục Ox là hướng đông (Đ), trục Oy là hướng bắc (B) và trục Oz là trục thẳng đứng, đơn vị trên mỗi trục là kilômét. Trực thăng cất cánh từ điểm G. Vectơ $\vec{r}$ chỉ vị trí của trực thăng tại thời điểm t phút sau khi cất cánh ($t \geq 0$) có tọa độ là: $\vec{r} = (1+t; 0,5+2t; 2t)$.



- Tìm góc θ mà đường bay tạo với phương ngang.
- Lập phương trình đường thẳng GF, trong đó F là hình chiếu của điểm H lên mặt phẳng (Oxy).
- Trực thăng bay vào mây ở độ cao 2 km. Tìm tọa độ điểm mà máy bay trực thăng bắt đầu đi vào đám mây.
- Giả sử một đỉnh núi nằm ở điểm $M(5;4;5;3)$. Tìm giá trị của t khi HM vuông góc với đường bay GH. Tìm khoảng cách từ máy bay trực thăng đến đỉnh núi tại thời điểm đó.

- Câu 13:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A(3,5;-2;0,4)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3,5;5,5;0)$ trên đường băng EG (Hình 37).
- Viết phương trình đường thẳng AB .
 - Hãy cho biết góc trượt (góc giữa đường thẳng bay AB và mặt phẳng nằm ngang (Oxy)) có nằm trong phạm vi cho phép từ $2,5^\circ$ đến $3,5^\circ$ hay không?
 - Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(5;0;0)$, $N(0;-5;0)$, $P(0;0;0,5)$. Tìm tọa độ của điểm C là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh.
 - Tìm tọa độ của điểm D trên đoạn thẳng AB là vị trí mà máy bay ở độ cao 120 m.
 - Theo quy định an toàn bay, người phi công phải nhìn thấy điểm đầu $E(3,5;6,5;0)$ của đường băng ở độ cao tối thiểu là 120 m. Hỏi sau khi ra khỏi đám mây, người phi công có đạt được quy định an toàn đó hay không? Biết rằng tầm nhìn của người phi công sau khi ra khỏi đám mây là 900 m

(Nguồn: R.Larson and B. Edwards, Calculus 10e Cengage, 2014)

