

ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG

1. Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong

Xét họ đường cong (C_m) có phương trình $y = f(x, m)$, trong đó f là hàm đa thức theo biến x với m là tham số sao cho bậc của m không quá 2. Tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi m thay đổi?

Phương pháp giải:

- Bước 1: Đưa phương trình $y = f(x, m)$ về dạng phương trình theo ẩn m có dạng sau: $Am + B = 0$ hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$.

- Bước 2: Cho các hệ số bằng 0, ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình: $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ hoặc

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

- Bước 3: Kết luận:

- Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong (C_m) không có điểm cố định.

- Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của (C_m) .

2. Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$ (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

Phương pháp giải:

- Bước 1: Thực hiện phép chia đa thức chia tử số cho mẫu số.
- Bước 2: Lập luận để giải bài toán.

3. Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm những điểm đối xứng nhau qua một điểm, qua đường thẳng.

Bài toán 1: Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I(x_I, y_I)$.

Phương pháp giải:

- Gọi $M(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D)$, $N(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua điểm I .
- Ta có
$$\begin{cases} a + b = 2x_I \\ A(a^3 + b^3) + B(a^2 + b^2) + C(a + b) + 2D = 2y_I \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được tọa độ M, N .

Bài toán 2: Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Phương pháp giải:

- Gọi $M(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D)$, $N(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

- Ta có
$$\begin{cases} a+b=0 \\ A(a^3+b^3)+B(a^2+b^2)+C(a+b)+2D=0 \end{cases}$$
- Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được tọa độ M, N .

Bài toán 3: Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = A_1x + B_1$.

Phương pháp giải:

- Gọi $M(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D)$, $N(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng d .
- Ta có:
$$\begin{cases} I \in d & (1) \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_d = 0 & (2) \end{cases}$$
 (với I là trung điểm của MN và $\vec{u}_d$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d).
- Giải hệ phương trình tìm được M, N .

4. Bài toán tìm điểm đặc biệt, khoảng cách

4.1. Lý thuyết:

- Cho hai điểm $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$, thì khoảng cách từ M đến d là
$$h(M; d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$
- Cho hàm phân thức: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ tiếp tuyến tại M cắt $TCĐ$, TCN ở A và B thì M là trung điểm của AB . Thì diện tích tam giác MAB không đổi: $S_{MAB} = \frac{2}{c^2} |ad - bc|$.

4.2. Các bài toán thường gặp

Bài toán 1: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) có đồ thị (C) . Hãy tìm trên (C) hai điểm A và B thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách AB ngắn nhất.

Phương pháp giải:

- (C) có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ do tính chất của hàm phân thức, đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng. Nên gọi hai số α, β là hai số dương.
- Nếu A thuộc nhánh trái: $x_A < -\frac{d}{c} \Rightarrow x_A = -\frac{d}{c} - \alpha < -\frac{d}{c}; y_A = f(x_A)$.
- Nếu B thuộc nhánh phải: $x_B > -\frac{d}{c} \Rightarrow x_B = -\frac{d}{c} + \beta > -\frac{d}{c}; y_B = f(x_B)$.
- Sau đó tính:
$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = [(a + \beta) - (a - \alpha)]^2 + (y_B - y_A)^2.$$
- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy sẽ tìm ra kết quả.

Bài toán 2: Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) để tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.

Phương pháp giải:

- Gọi $M(x; y)$ và tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là d thì $d = |x| + |y|$.
- Xét các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ khi M nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung.
- Sau đó xét tổng quát, những điểm M có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục thì loại đi không xét đến.
- Những điểm còn lại ta đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của đồ thị hàm số dựa vào đạo hàm rồi tìm được giá trị nhỏ nhất của d .

Bài toán 3: Cho đồ thị (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng k lần khoảng cách từ M đến trục Oy .

Phương pháp giải:

Theo đầu bài ta có $|y| = k|x| \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx \\ y = -kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = kx \\ f(x) = -kx \end{cases}$.

Bài toán 4: Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$). Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài MI ngắn nhất (với I là giao điểm hai tiệm cận).

Phương pháp giải:

- Tiệm cận đứng $x = \frac{-d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
- Ta tìm được tọa độ giao điểm $I\left(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ của hai tiệm cận.
- Gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm cần tìm, thì: $IM^2 = \left(x_M + \frac{d}{c}\right)^2 + \left(y_M - \frac{a}{c}\right)^2 = g(x_M)$
- Sử dụng phương pháp tìm GTLN - GTNN cho hàm số g để thu được kết quả.

Bài toán 5: Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x)$ và đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$. Tìm điểm I trên (C) sao cho khoảng cách từ I đến d là ngắn nhất.

Phương pháp giải:

- Gọi I thuộc $(C) \Rightarrow I(x_0; y_0); y_0 = f(x_0)$.
- Khoảng cách từ I đến d là $g(x_0) = h(I; d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
- Khảo sát hàm số $y = g(x)$ để tìm ra điểm I thỏa mãn yêu cầu.