

KIẾN THỨC CHUNG

A - KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

I – KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP

Khối lăng trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ kể cả hình lăng trụ ấy.

Khối chóp là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp kể cả hình chóp ấy.

Khối chóp cụt là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cụt kể cả hình chóp cụt ấy.

II – KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Khái niệm về hình đa diện

Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

- Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi đa giác như trên được gọi là một mặt của hình đa diện.

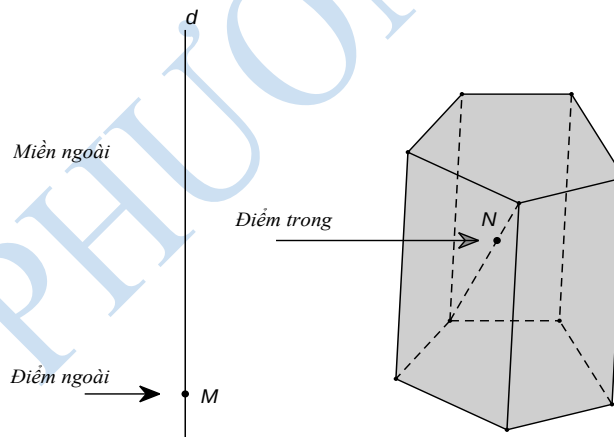
Các đỉnh, các cạnh của đa giác ấy theo thứ tự gọi là các đỉnh, các cạnh của hình đa diện.

2. Khái niệm về khối đa diện

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

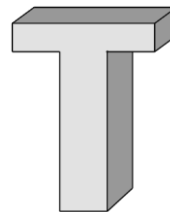
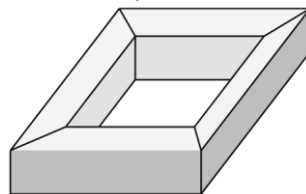
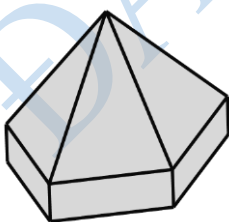
Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Tập hợp các điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện ứng với đa diện ấy được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong của khối đa diện.

Mỗi khối đa diện được xác định bởi một hình đa diện ứng với nó. Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của một khối đa diện theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của hình đa diện tương ứng.

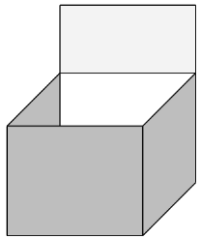


Ví dụ

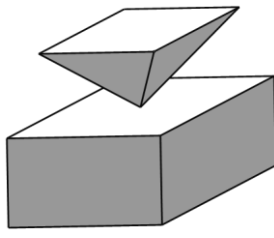
- Các hình dưới đây là những khối đa diện:



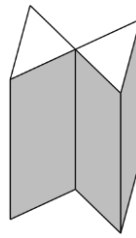
- Các hình dưới đây không phải là những khối đa diện:



Hình a



Hình b



Hình c

Giải thích: Hình a không phải là hình đa diện vì tồn tại cạnh không phải là cạnh chung của hai mặt; Hình b không phải là hình đa diện vì có một điểm đặc biệt trong hình, điểm đó không phải là đỉnh chung của hai đa giác; Hình c không phải là hình đa diện vì tồn tại một cạnh là cạnh chung của bốn đa giác.

III – HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

1. Phép dời hình trong không gian

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

a) **Phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$** , là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$. Ký hiệu là $T_{\vec{v}}$.

b) **Phép đối xứng qua mặt phẳng (P)** là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM' .

Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của (H) .

c) **Phép đối xứng tâm O** là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM' .

Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (H) .

d) **Phép đối xứng qua đường thẳng D** là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng D thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc D thành điểm M' sao cho D là đường trung trực của MM' .

Nếu phép đối xứng qua đường thẳng D biến hình (H) thành chính nó thì D được gọi là trục đối xứng của (H) .

Nhận xét

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện (H) thành đa diện (H') , biến đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H') .

2. Hai hình bằng nhau

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Nhận xét

- Hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình đa diện này thành hình đa diện kia.
- Hai tứ diện có các cạnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

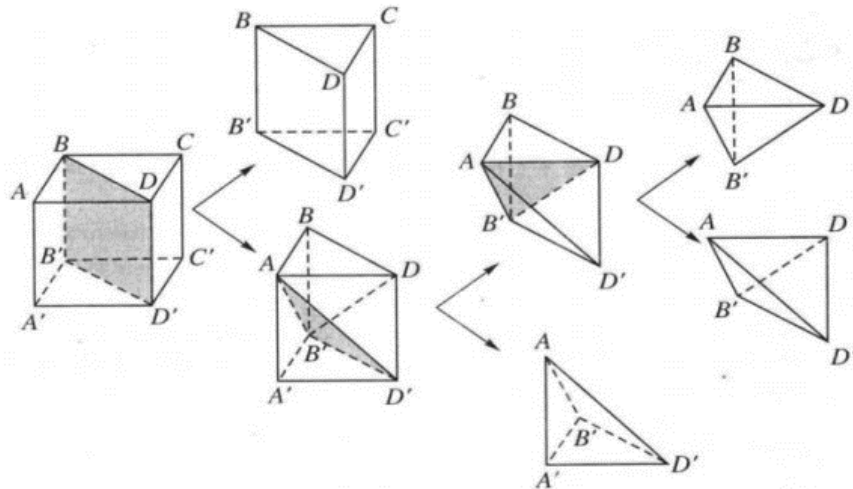
III. PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP KHỐI ĐA DIỆN

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện $(H_1), (H_2)$, sao cho (H_1) và (H_2) không có điểm trong chung thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) , hay có thể lắp ghép được hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được khối đa diện (H) .

Ví dụ. Xét khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $BDD'B'$ cắt khối lập phương đó theo một thiết diện là hình chữ nhật $BDD'B'$. Thiết diện này chia các điểm còn lại của khối lập phương ra làm hai phần. Mỗi phần cùng với hình chữ nhật $BDD'B'$ tạo thành khối lăng trụ, như vậy có hai khối lăng trụ:

$ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$. Khi đó ta nói mặt phẳng (P) chia khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$.

Tương tự trên ta có thể chia tiếp khối trụ $ABD.A'B'D'$ thành ba khối tứ diện: $ADBB', ADB'D'$ và $AA'B'D'$.



Nhận xét: Một khối đa diện bất kì luôn có thể phân chia được thành các khối tứ diện.

MỘT SỐ KẾT QUẢ

Kết quả 1: Một khối đa diện bất kì có ít nhất 4 mặt.

Kết quả 2: Mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh.

Kết quả 3: Mỗi hình đa diện có ít nhất 6 cạnh.

Kết quả 4: Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.

Kết quả 5: Không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.

Kết quả 6: Cho (H) là đa diện mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Nếu số mặt của (H) là lẻ thì p phải là số chẵn.

Chứng minh: Gọi M là số các mặt của khối đa diện (H) . Vì mỗi mặt của (H) có p cạnh nên M mặt sẽ có $p.M$ cạnh. Nhưng do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai đa giác nên số cạnh của (H) bằng $C = \frac{pM}{2}$. Vì M lẻ nên p phải là số chẵn.

Kết quả 7 (Suy ra từ chứng minh kết quả 6): Cho (H) là đa diện có M mặt, mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Khi đó số cạnh của (H) là $C = \frac{pM}{2}$.

Kết quả 8: Mỗi khối đa diện có các mặt là các tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn.

Chứng minh: Gọi số cạnh và số mặt của khối đa diện lần lượt là C và M .

Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên ta có số cạnh của đa diện là $C = \frac{3M}{2}$. Vì C là số chẵn nên M phải là số chẵn.

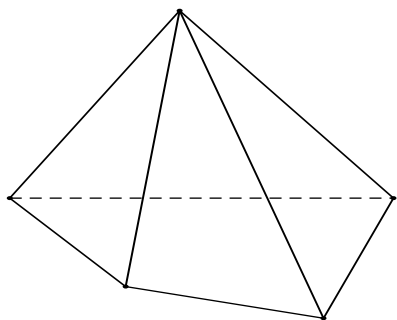
Kết quả 9: Mỗi khối đa diện bất kì luôn có thể được phân chia được thành những khối tứ diện.

Kết quả 10: Nếu khối đa diện có mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn. (Tổng quát: Một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng số đỉnh là một số chẵn).

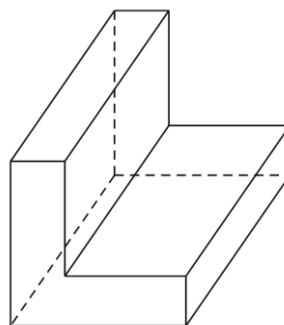
B - KHÁI ĐA DIỆN LỖI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

I – KHỐI ĐA DIỆN LỖI

Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lỗi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H) . Khi đó đa diện giới hạn (H) được gọi là đa diện lỗi.

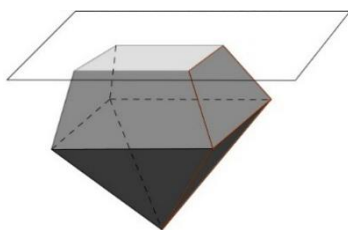


Khối đa diện lồi



Khối đa diện không lồi

Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng đi qua một mặt của nó.



II – KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

Định nghĩa

Khối đa diện đều là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây:

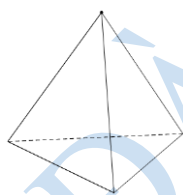
- Các mặt là những đa giác đều n cạnh.
- Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng p cạnh.

Khối đa diện đều như vậy gọi là khối đa diện đều loại $\{n, p\}$.

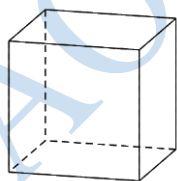
Định lí

Chỉ có năm khối đa diện đều. Đó là:

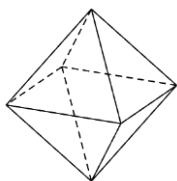
- ✓ Loại $\{3; 3\}$: khối tứ diện đều.
- ✓ Loại $\{4; 3\}$: khối lập phương.
- ✓ Loại $\{3; 4\}$: khối bát diện đều.
- ✓ Loại $\{5; 3\}$: khối 12 mặt đều.
- ✓ Loại $\{3; 5\}$: khối 20 mặt đều.



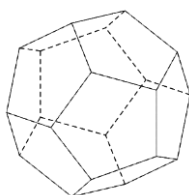
Khối tứ diện đều



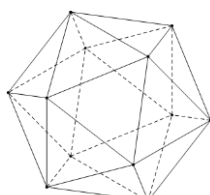
Khối lập phương



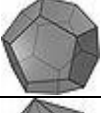
Bát diện đều



Hình 12 mặt đều

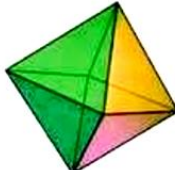
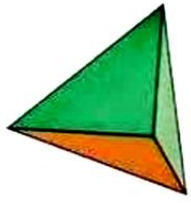


Hình 20 mặt đều

Khối đa diện đều		Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Loại
Tứ diện đều		4	6	4	$\{3;3\}$
Khối lập phương		8	12	6	$\{4;3\}$
Bát diện đều		6	12	8	$\{3;4\}$
Mười hai mặt đều		20	30	12	$\{5;3\}$
Hai mươi mặt đều		12	30	20	$\{3;5\}$

Chú ý. Gọi $\mathcal{D}$ là tổng số đỉnh, C là tổng số cạnh và M là tổng các mặt của khối đa diện đều loại $\{n; p\}$. Ta có

$$p\mathcal{D} = 2C = nM$$

A. Bát diện đều: có 8 mặt là các tam giác đều	
B. Nhị thập diện đều: có 20 mặt là các tam giác đều	
C. Tứ diện đều: có 4 mặt là các tam giác đều	
D. Thập nhị diện đều: có 12 mặt là các ngũ giác đều	