CHÖÔNG III

PHÖÔNG PHAÙP TOAÏ ÑOÄ TRONG KHOAÂNG GIAN

I. VECTO TRONG KHONG GIAN

1. Ñònh nghóa vaø caùc pheùp toaùn

• Ñònh nghóa, tính chaát, caùc pheùp toaùn veà vectô trong khoâng gian ñöôïc xaây döïng hoaøn toaøn töông töï nhö trong maët phaúng.

• Löu yù:

+ **Qui taéc ba ñieåm:** Cho ba ñieåm A, B, C baát kyø, ta coù: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui taéc hình bình haønh:** Cho hình bình haønh ABCD, ta coù: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

+ **Qui taéc hình hoäp:** Cho hình hoäp ABCD.A′B′C′D′, ta coù: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

+ **Heäï thöùc trung ñieåm ñoaïn thaúng:** Cho I laø trung ñieåm cuûa ñoaïn thaúng AB, O tuyø yù.

Ta coù: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$

+ **Heä thöùc troïng taâm tam giaùc:** Cho G laø troïng taâm cuûa tam giaùc ABC, O tuyø yù.

Ta coù: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

+ **Heä thöùc troïng taâm töù dieän:** Cho G laø troïng taâm cuûa töù dieän ABCD, O tuyø yù.

Ta coù: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$

+ **Ñieàu kieän hai vectô cuøng phöông:** $\vec{a}$ *vaø* $\vec{b}$ *cuøng phöông* $(\vec{a}\neq\vec{0})\Leftrightarrow \exists!\, k\in R: \vec{b}=k\vec{a}$

+ **Ñieåm M chia ñoaïn thaúng AB theo tæ soá k** ($k\neq 1$), O tuyø yù.

Ta coù: $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$

2. Söï ñoàng phaúng cuûa ba vectô

• Ba vectô ñöôïc goïi laø ñoàng phaúng neáu caùc giaù cuûa chuùng cuøng song song vôùi moät maët phaúng.

• **Ñieàu kieän ñeå ba vectô ñoàng phaúng:** Cho ba vectô $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, trong ñoù $\vec{a}$ *vaø* $\vec{b}$ khoâng cuøng phöông. Khi ñoù: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ñoàng phaúng ⇔ ∃! m, n ∈ R: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$

• Cho ba vectô $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khoâng ñoàng phaúng, $\vec{x}$ tuyø yù.

Khi ñoù: ∃! m, n, p ∈ R: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

3. Tích voâ höôùng cuûa hai vectô

• **Goùc giöõa hai vectô trong khoâng gian:**

$$\overrightarrow{AB}=\vec{u},\ \overrightarrow{AC}=\vec{v}\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})=BAC\ (0^0\leq BAC\leq 180^0)$$

• **Tích voâ höôùng cuûa hai vectô trong khoâng gian:**

+ Cho $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$. Khi ñoù: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

+ Vôùi $\vec{u}=\vec{0}$ *hoaëc* $\vec{v}=\vec{0}$. Qui öôùc: $\vec{u}.\vec{v}=0$

+ $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

+ $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}^2}$

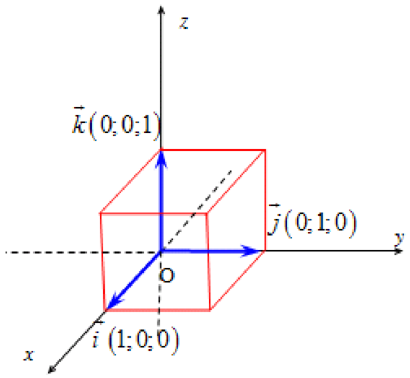
II. HE TOA DO TRONG KHONG GIAN

1. Heä toïa ñoä Ñeâcac vuoâng goùc trong khoâng gian:

Cho ba truïc Ox, Oy, Oz vuoâng goùc vôùi nhau töøng ñoâi moät vaø chung moät ñieåm goác O. Goïi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ laø caùc vectô ñôn vò, töông öùng treân caùc truïc Ox, Oy, Oz. Heä ba truïc nhö vaäy goïi laø heä toïa ñoä Ñeâcac vuoâng goùc Oxyz hoaëc ñôn giaûn laø heä toïa ñoä Oxyz.

<u>*Chuù yù*</u>: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ vaø $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$.

2. Toïa ñoä cuûa vectô:



a) Ñònh nghóa: $\vec{u} = (x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

b) Tính chaát: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3), k \in R$

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{0} = (0;0;0), \vec{i} = (1;0;0), \vec{j} = (0;1;0), \vec{k} = (0;0;1)$
- $\vec{a}$ cuøng phöông $\vec{b}(\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}\ (k \in R)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},\ (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

- $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ *(vôùi $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$)*

3. Toïa ñoä cuûa ñieåm:

a) Ñònh nghóa: $M(x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$ *(x : hoaønh ñoä, y : tung ñoä, z : cao ñoä)*

Chuù yù: *• M ∈ (Oxy) ⇔ z = 0; M ∈ (Oyz) ⇔ x = 0; M ∈ (Oxz) ⇔ y = 0*

• M ∈ Ox ⇔ y = z = 0; M ∈ Oy ⇔ x = z = 0; M ∈ Oz ⇔ x = y = 0

b) Tính chaát: Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A),\ B(x_B;\ y_B;\ z_B)$

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Toaï ñoä ñieåm M chia ñoaïn AB theo tæ soá *k (k≠1):*

$$M\left(\frac{x_A - kx_B}{1-k}; \frac{y_A - ky_B}{1-k}; \frac{z_A - kz_B}{1-k}\right)$$

- Toaï ñoä trung ñieåm M cuûa ñoaïn thaúng AB: $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Toaï ñoä troïng taâm G cuûa tam giaùc ABC:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

- Toaï ñoä troïng taâm G cuûa töù dieän ABCD:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\frac{z_A+z_B+z_C+z_C}{4}\right)$$

4. Tích coù höôùng cuûa hai vectô: *(Chöông trình naâng cao)*

a) Ñònh nghóa: Cho $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\wedge\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$$

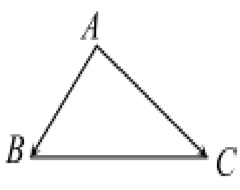
Chuù yù: *Tích coù höôùng cuûa hai vectô laø moät vectô, tích voâ höôùng cuûa hai vectô laø moät soá.*

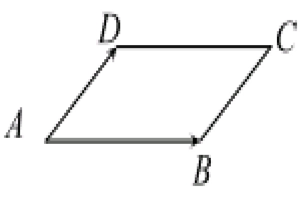
b) Tính chaát:

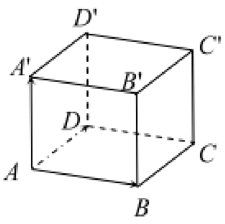
- $\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k}$; $\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}$; $\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}$
- $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{a}$; $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{b}$
- $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$
- $\vec{a},\vec{b}$ cuøng phöông $\Leftrightarrow [\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}$

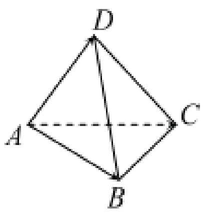
c) ÖÙng duïng cuûa tích coù höôùng:

- ***Ñieàu kieän ñoàng phaúng cuûa ba vectô:*** $\vec{a},\vec{b}$ vaø $\vec{c}$ ñoàng phaúng $\Leftrightarrow [\vec{a},\vec{b}].\vec{c}=0$
- ***Dieän tích hình bình haønh ABCD:*** $S_{\square ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$
- ***Dieän tích tam giaùc ABC:*** $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
- ***Theå tích khoái hoäp ABCD.A'B'C'D':*** $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$
- ***Theå tích töù dieän ABCD:*** $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$









Chuù yù:

*– **Tích voâ höôùng** cuûa hai vectô thöôøng söû duïng ñeå chöùng minh hai ñöôøng thaúng vuoâng goùc, tính goùc giöõa hai ñöôøng thaúng.*

*– **Tích coù höôùng** cuûa hai vectô thöôøng söû duïng ñeå tính dieän tích tam giaùc; tính theå tích khoái töù dieän, theå tích hình hoäp; chöùng minh caùc vectô ñoàng phaúng – khoâng ñoàng phaúng, chöùng minh caùc vectô cuøng phöông.*

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$$
$$\vec{a} \text{ vaø } \vec{b} \text{ cuøng phöông} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{0}$$
$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ ñoàng phaúng} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c} = 0$$

5. Phöông trình maët caàu:

- Phöông trình maët caàu (S) taâm *I(a; b; c)*, baùn kính *R*:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

- Phöông trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ vôùi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ laø phöông trình maët caàu taâm *I(–a; –b; –c)* vaø baùn kính *R* = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

VAÁN ÑEÀ 1: Caùc pheùp toaùn veà toaï ñoä cuûa vectô vaø cuûa ñieåm

– Söû duïng caùc coâng thöùc veà toaï ñoä cuûa vectô vaø cuûa ñieåm trong khoâng gian.
– Söû duïng caùc pheùp toaùn veà vectô trong khoâng gian.

Baøi 1. Vieát toïa ñoä cuûa caùc vectô sau ñaây:

$\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{b} = 7\vec{i} - 8\vec{k}$; $\vec{c} = -9\vec{k}$; $\vec{d} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$

Baøi 2. Vieát döôùi daïng $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ moãi vectô sau ñaây:

$\vec{a} = \left(0; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)$; $\vec{b} = (4; -5; 0)$; $\vec{c} = \left(\dfrac{4}{3}; 0; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\vec{d} = \left(\pi; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Baøi 3. Cho: $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$. Tìm toaï ñoä cuûa caùc vectô $\vec{u}$ vôùi:

a) $\vec{u} = 4\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b} + 3\vec{c}$ b) $\vec{u} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$ c) $\vec{u} = -4\vec{b} + \dfrac{2}{3}\vec{c}$

d) $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ e) $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\vec{a} - \dfrac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ f) $\vec{u} = \vec{a} - \dfrac{3}{4}\vec{b} - \dfrac{2}{3}\vec{c}$

Baøi 4. Tìm toïa ñoä cuûa vectô $\vec{x}$, bieát raèng:

a) $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$ vôùi $\vec{a} = (1; -2; 1)$ b) $\vec{a} + \vec{x} = 4\vec{a}$ vôùi $\vec{a} = (0; -2; 1)$

c) $\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$ vôùi $\vec{a} = (5; 4; -1)$, $\vec{b} = (2; -5; 3)$

Baøi 5. Cho $\vec{a} = (1; -3; 4)$.

a) Tìm *y* vaø *z* ñeå $\vec{b} = (2; y; z)$ cuøng phöông vôùi $\vec{a}$.

b) Tìm toaï ñoä cuûa vectô $\vec{c}$, bieát raèng $\vec{a}$ vaø $\vec{c}$ ngöôïc höôùng vaø $|\vec{c}| = 2|\vec{a}|$.

Baøi 6. Cho ba vectô $\vec{a} = (1; -1; 1)$, $\vec{b} = (4; 0; -1)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$. Tìm:

a) $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ b) $\vec{a}^2(\vec{b}.\vec{c})$ c) $\vec{a}^2\vec{b} + \vec{b}^2\vec{c} + \vec{c}^2\vec{a}$

d) $3\vec{a} - 2(\vec{a}.\vec{b})\vec{b} + \vec{c}^2\vec{b}$ e) $4\vec{a}.\vec{c} + \vec{b}^2 - 5\vec{c}^2$

Baøi 7. Tính goùc giöõa hai vectô $\vec{a}$ vaø $\vec{b}$:

a) $\vec{a} = (4; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 2; 3)$ b) $\vec{a} = (2; 5; 4)$, $\vec{b} = (6; 0; -3)$

c) $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (0; -\sqrt{2}; \sqrt{2})$ d) $\vec{a} = (3; 2; 2\sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; -1)$

e) $\vec{a} = (-4; 2; 4)$, $\vec{b} = (2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}; 0)$ f) $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$

Baøi 8. Tìm vectô $\vec{u}$, bieát raèng:

a) $\begin{cases} \vec{a} = (2; -1; 3), \vec{b} = (1; -3; 2), \vec{c} = (3; 2; -4) \\ \vec{a}.\vec{u} = -5, \quad \vec{u}.\vec{b} = -11, \quad \vec{u}.\vec{c} = 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \vec{a} = (2; 3; -1), \vec{b} = (1; -2; 3), \vec{c} = (2; -1; 1) \\ \vec{u} \perp \vec{a}, \quad \vec{u} \perp \vec{b}, \quad \vec{u}.\vec{c} = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \vec a = (2;3;1), \vec b = (1;-2;-1), \vec c = (-2;4;3) \\ \vec a.\vec u = 3, \quad \vec b.\vec u = 4, \quad \vec c.\vec u = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \vec a = (5;-3;2), \vec b = (1;4;-3), \vec c = (-3;2;4) \\ \vec a.\vec u = 16, \quad \vec b.\vec u = 9, \quad \vec c.\vec u = -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \vec a = (7;2;3), \vec b = (4;3;-5), \vec c = (1;1;-1) \\ \vec a.\vec u = -5, \quad \vec b.\vec u = -7, \quad \vec c \perp \vec u \end{cases}$

Baøi 9. Cho hai vectô $\vec a, \vec b$. Tìm *m* ñeå:

a) $\begin{cases} \vec a = (2;1;-2),\ \vec b = (0;-\sqrt{2};\sqrt{2}) \\ \vec u = 2\vec a + 3m\vec b \text{ vaø } \vec v = m\vec a - \vec b \text{ vuoâng goùc} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \vec a = (3;-2;1),\ \vec b = (2;1;-1) \\ \vec u = m\vec a - 3\vec b \text{ vaø } \vec v = 3\vec a + 2m\vec b \text{ vuoâng goùc} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \vec a = (3;-2;1),\ \vec b = (2;1;-1) \\ \vec u = m\vec a - 3\vec b \text{ vaø } \vec v = 3\vec a + 2m\vec b \text{ cuøng phöông} \end{cases}$

Baøi 10. Cho hai vectô $\vec a, \vec b$. Tính *X, Y* khi bieát:

a) $\begin{cases} |\vec a| = 4,\ |\vec b| = 6 \\ X = |\vec a - \vec b| \end{cases}$ b) $\begin{cases} \vec a = (2;-1;-2),\ |\vec b| = 6,\ |\vec a - \vec b| = 4 \\ Y = |\vec a + \vec b| \end{cases}$

c) $\begin{cases} |\vec a| = 4,\ |\vec b| = 6,\ (\vec a, \vec b) = 120^0 \\ X = |\vec a - \vec b|,\ Y = |\vec a + \vec b| \end{cases}$ d) $\begin{cases} \vec a = (2;-1;-2),\ |\vec b| = 6,\ (\vec a, \vec b) = 60^0 \\ X = |\vec a - \vec b|, Y = |\vec a + \vec b| \end{cases}$

Baøi 11. Cho ba vectô $\vec a,\ \vec b,\ \vec c$. Tìm *m, n* ñeå $\vec c = [\vec a, \vec b]$:

a) $\vec a = (3;-1;-2)$, $\vec b = (1;2;m)$, $\vec c = (5;1;7)$

b) $\vec a = (6;-2;m)$, $\vec b = (5;n;-3)$, $\vec c = (6;33;10)$

c) $\vec a = (2;3;1)$, $\vec b = (5;6;4)$, $\vec c = (m;n;1)$

Baøi 12. Xeùt söï ñoàng phaúng cuûa ba vectô $\vec a,\ \vec b,\ \vec c$ trong moãi tröôøng hôïp sau ñaây:

a) $\vec a = (1;-1;1)$, $\vec b = (0;1;2)$, $\vec c = (4;2;3)$ b) $\vec a = (4;3;4)$, $\vec b = (2;-1;2)$, $\vec c = (1;2;1)$

c) $\vec a = (-3;1;-2)$, $\vec b = (1;1;1)$, $\vec c = (-2;2;1)$ d) $\vec a = (4;2;5)$, $\vec b = (3;1;3)$, $\vec c = (2;0;1)$

e) $\vec a = (2;3;1), \vec b = (1;-2;0), \vec c = (3;-2;4)$ f) $\vec a = (5;4;-8), \vec b = (-2;3;0), \vec c = (1;7;-7)$

g) $\vec a = (2;-4;3), \vec b = (1;2;-2), \vec c = (3;-2;1)$ h) $\vec a = (2;-4;3), \vec b = (-1;3;-2), \vec c = (3;-2;1)$

Baøi 13. Tìm *m* ñeå 3 vectô $\vec a, \vec b, \vec c$ ñoàng phaúng:

a) $\vec a = (1;m;2)$, $\vec b = (m+1;2;1)$, $\vec c = (0;m-2;2)$

b) $\vec a = (2m+1;1;2m-1)$; $\vec b = (m+1;2;m+2)$, $\vec c = (2m;m+1;2)$

c) $\vec a = (m+1;m;m-2)$, $\vec b = (m-1;m+2;m)$, $\vec c = (1;2;2)$

d) $\vec a = (1;-3;2)$, $\vec b = (m+1;m-2;1-m)$, $\vec c = (0;m-2;2)$

Baøi 14. Cho caùc vectô $\vec a, \vec b, \vec c, \vec u$. Chöùng minh ba vectô $\vec a, \vec b, \vec c$ khoâng ñoàng phaúng. Bieåu dieãn vectô $\vec u$ theo caùc vectô $\vec a, \vec b, \vec c$:

a) $\begin{cases} \vec a = (2;1;0),\ \vec b = (1;-1;2),\ \vec c = (2;2;-1) \\ \vec u = (3;7;-7) \end{cases}$ b) $\begin{cases} \vec a = (1;-7;9),\ \vec b = (3;-6;1),\ \vec c = (2;1;-7) \\ \vec u = (-4;13;-6) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \vec a = (1;0;1),\ \vec b = (0;-1;1),\ \vec c = (1;1;0) \\ \vec u = (8;9;-1) \end{cases}$ d) $\begin{cases} \vec a = (1;0;2),\ \vec b = (2;-3;0),\ \vec c = (0;-3;4) \\ \vec u = (-1;-6;22) \end{cases}$

e) $\begin{cases} \vec a = (2;-3;1),\ \vec b = (-1;2;5),\ \vec c = (2;-2;6) \\ \vec u = (3;1;2) \end{cases}$ f) $\begin{cases} \vec a = (2;-1;1),\ \vec b = (1;-3;2),\ \vec c = (-3;2;-2) \\ \vec u = (4;3;-5) \end{cases}$

Baøi 15. Chöùng toû boán vectô $\vec a, \vec b, \vec c, \vec d$ ñoàng phaúng:

a) $\vec a = (-2;-6;1)$, $\vec b = (4;-3;-2)$, $\vec c = (-4;-2;2)$, $\vec d = (-2;-11;1)$

b) $\vec a = (2;6;-1)$, $\vec b = (2;1;-1)$, $\vec c = (-4;3;2)$, $\vec d = (2;11;-1)$

Baøi 16. Cho ba vectô $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khoâng ñoàng phaúng vaø vectô $\vec{d}$. Chöùng minh boä ba vectô sau khoâng ñoàng phaúng:

a) $\vec{b},\ \vec{c},\vec{d} = m\vec{a}+n\vec{b}$ (vôùi *m, n* $\neq 0$) b) $\vec{a},\ \vec{c},\vec{d} = m\vec{a}+n\vec{b}$ (vôùi *m, n* $\neq 0$)

c) $\vec{a},\vec{b},\vec{d} = m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$, (vôùi *m, n, p* $\neq 0$) d) $\vec{b},\vec{c},\vec{d} = m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$, (vôùi *m, n, p* $\neq 0$)

e) $\vec{a},\vec{c},\vec{d} = m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$, (vôùi *m, n, p* $\neq 0$)

VAÁN ÑEÀ 2: Xaùc ñònh ñieåm trong khoâng gian. Chöùng minh tính chaát hình hoïc. Dieän tích – Theå tích.

– Söû duïng caùc coâng thöùc veà toaï ñoä cuûa vectô vaø cuûa ñieåm trong khoâng gian.
– Söû duïng caùc pheùp toaùn veà vectô trong khoâng gian.
– Coâng thöùc xaùc ñònh toaï ñoä cuûa caùc ñieåm ñaëc bieät.
– Tính chaát hình hoïc cuûa caùc ñieåm ñaëc bieät:

• *A, B, C thaúng haøng* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ *cuøng phöông* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = \vec{0}$

• *ABCD laø hình bình haønh* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

• *Cho ΔABC coù caùc chaân E, F cuûa caùc ñöôøng phaân giaùc trong vaø ngoaøi cuûa goùc A cuûa ΔABC treân BC. Ta coù:* $\overrightarrow{EB} = -\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FB} = \dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{FC}$

• *A, B, C, D khoâng ñoàng phaúng* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ *khoâng ñoàng phaúng* $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0$

Baøi 1. Cho ñieåm M. Tìm toïa ñoä hình chieáu vuoâng goùc cuûa ñieåm M:

• Treân caùc maët phaúng toïa ñoä: Oxy, Oxz, Oyz • Treân caùc truïc toïa ñoä: Ox, Oy, Oz

a) $M(1;2;3)$ b) $M(3;-1;2)$ c) $M(-1;1;-3)$ d) $M(1;2;-1)$
e) $M(2;-5;7)$ f) $M(22;-15;7)$ g) $M(11;-9;10)$ h) $M(3;6;7)$

Baøi 2. Cho ñieåm M. Tìm toïa ñoä cuûa ñieåm M′ ñoái xöùng vôùi ñieåm M:

• Qua goác toaï ñoä • Qua mp(Oxy) • Qua truïc Oy

a) $M(1;2;3)$ b) $M(3;-1;2)$ c) $M(-1;1;-3)$ d) $M(1;2;-1)$
e) $M(2;-5;7)$ f) $M(22;-15;7)$ g) $M(11;-9;10)$ h) $M(3;6;7)$

Baøi 3. Xeùt tính thaúng haøng cuûa caùc boä ba ñieåm sau:

a) $A(1;3;1), B(0;1;2), C(0;0;1)$ b) $A(1;1;1), B(-4;3;1), C(-9;5;1)$
c) $A(10;9;12), B(-20;3;4), C(-50;-3;-4)$ d) $A(-1;5;-10), B(5;-7;8), C(2;2;-7)$

Baøi 4. Cho ba ñieåm A, B, C.

• Chöùng toû ba ñieåm A, B, C taïo thaønh moät tam giaùc.
• Tìm toaï ñoä troïng taâm G cuûa ΔABC.
• Xaùc ñònh ñieåm D sao cho ABCD laø hình bình haønh.
• Xaùc ñònh toaï ñoä caùc chaân E, F cuûa caùc ñöôøng phaân giaùc trong vaø ngoaøi cuûa goùc A cuûa ΔABC treân BC. Tính ñoä daøi caùc ñoaïn phaân giaùc ñoù.
• Tính soá ño caùc goùc trong ΔABC.
• Tính dieän tích ΔABC. Töø ñoù suy ra ñoä daøi ñöôøng cao AH cuûa ΔABC.

a) $A(1;2;-3), B(0;3;7), C(12;5;0)$ b) $A(0;13;21), B(11;-23;17), C(1;0;19)$
c) $A(3;-4;7), B(-5;3;-2), C(1;2;-3)$ d) $A(4;2;3), B(-2;1;-1), C(3;8;7)$

e) $A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3)$ f) $A(4;1;4), B(0;7;-4), C(3;1;-2)$

g) $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$ h) $A(1;-2;6), B(2;5;1), C(-1;8;4)$

Baøi 5. Treân truïc Oy *(Ox)*, tìm ñieåm caùch ñeàu hai ñieåm:

a) $A(3;1;0)$, $B(-2;4;1)$ b) $A(1;-2;1), B(11;0;7)$ c) $A(4;1;4), B(0;7;-4)$

d) $A(3;-1;2), B(1;2;-1)$ e) $A(3;-4;7), B(-5;3;-2)$ f) $A(4;2;3), B(-2;1;-1)$

Baøi 6. Treân maët phaúng Oxy *(Oxz, Oyz)*, tìm ñieåm caùch ñeàu ba ñieåm:

a) $A(1;1;1), B(-1;1;0), C(3;1;-1)$ b) $A(-3;2;4), B(0;0;7), C(-5;3;3)$

c) $A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3)$ d) $A(0;13;21), B(11;-23;17), C(1;0;19)$

e) $A(1;0;2), B(-2;1;1), C(1;-3;-2)$ f) $A(1;-2;6), B(2;5;1), C(-1;8;4)$

Baøi 7. Cho hai ñieåm A, B. Ñöôøng thaúng AB caét maët phaúng Oyz *(Oxz, Oxy)* taïi ñieåm M.

• Ñieåm M chia ñoaïn thaúng AB theo tæ soá naøo ? • Tìm toïa ñoä ñieåm M.

a) $A(2;-1;7)$, $B(4;5;-2)$ b) $A(4;3;-2), B(2;-1;1)$ c) $A(10;9;12), B(-20;3;4)$

d) $A(3;-1;2), B(1;2;-1)$ e) $A(3;-4;7), B(-5;3;-2)$ f) $A(4;2;3), B(-2;1;-1)$

Baøi 8. Cho boán ñieåm A, B, C, D.

• Chöùng minh A, B, C, D laø boán ñænh cuûa moät töù dieän.

• Tìm toïa ñoä troïng taâm G cuûa töù dieän ABCD.

• Tính goùc taïo bôûi caùc caïnh ñoái dieän cuûa töù dieän ABCD.

• Tính theå tích cuûa khoái töù dieän ABCD.

• Tính dieän tích tam giaùc BCD, töø ñoù suy ra ñoä daøi ñöôøng cao cuûa töù dieän veõ töø A.

a) $A(2;5;-3)$, $B(1;0;0)$, $C(3;0;-2)$, $D(-3;-1;2)$ b) $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(-2;1;-1)$

c) $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$ d) $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;4;6)$

e) $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8)$ f) $A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4), D(1;5;0)$

g) $A(2;4;1), B(-1;0;1), C(-1;4;2), D(1;-2;1)$ h) $A(-3;2;4), B(2;5;-2), C(1;-2;2), D(4;2;3)$

i) $A(3;4;8), B(-1;2;1), C(5;2;6), D(-7;4;3)$ k) $A(-3;-2;6), B(-2;4;4), C(9;9;-1), D(0;0;1)$

Baøi 9. Cho hình hoäp ABCD.A'B'C'D'.

• Tìm toaï ñoä caùc ñænh coøn laïi.

• Tính theå tích khoái hoäp.

a) $A(1;0;1), B(2;1;2), D(1;-1;1), C'(4;5;-5)$ b) $A(2;5;-3), B(1;0;0), C(3;0;-2), A'(-3;-1;2)$

c) $A(0;2;1), B(1;-1;1), D(0;0;0;), A'(-1;1;0)$ d) $A(0;2;2), B(0;1;2), C(-1;1;1), C'(1;-2;-1)$

Baøi 10. Cho boán ñieåm S(3; 1; –2), A(5; 3; 1), B(2; 3; –4), C(1; 2; 0).

a) Chöùng minh SA $\perp$ (SBC), SB $\perp$ (SAC), SC $\perp$ (SAB).

b) Chöùng minh S.ABC laø moät hình choùp ñeàu.

c) Xaùc ñònh toaï ñoä chaân ñöôøng cao H cuûa hình choùp. Suy ra ñoä daøi ñöôøng cao SH.

Baøi 11. Cho boán ñieåm S(1; 2; 3), A(2; 2; 3), B(1; 3; 3), C(1; 2; 4).

a) Chöùng minh SA $\perp$ (SBC), SB $\perp$ (SAC), SC $\perp$ (SAB).

b) Goïi M, N, P laàn löôït laø trung ñieåm cuûa BC, CA, AB. Chöùng minh SMNP laø töù dieän ñeàu.

c) Veõ SH $\perp$ (ABC). Goïi S′ laø ñieåm ñoái xöùng cuûa H qua S. Chöùng minh S′ABC laø töù dieän ñeàu.

Baøi 12. Cho hình hoäp chöõ nhaät OABC.DEFG. Goïi I laø taâm cuûa hình hoäp.

a) Phaân tích caùc vectô $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{AG}$ theo caùc vectô $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$.

b) Phaân tích vectô $\overrightarrow{BI}$ theo caùc vectô $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FI}$.

Baøi 13. Cho hình laäp phöông ABCD.EFGH.

a) Phaân tích vectô $\overrightarrow{AE}$ theo caùc vectô $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}$.

b) Phaân tích vectô $\overrightarrow{AG}$ theo caùc vectô $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}$.

Baøi 14. Cho hình hoäp ABCD.A'B'C'D'. Goïi M, N laàn löôït laø trung ñieåm cuûa AD vaø BB′. Chöùng minh raèng MN ⊥ A′C.

Baøi 15. Cho hình laäp phöông ABCD.A'B'C'D' vôùi caïnh baèng 1. Treân caùc caïnh BB′, CD, A′D′ laàn löôït laáy caùc ñieåm M, N, P sao cho B′M = CN = D′P = *x (0 < x < 1)*. Chöùng minh AC′ vuoâng goùc vôùi maët phaúng (MNP).

VAÁN ÑEÀ 3: Phöông trình maët caàu

Ñeå vieát phöông trình maët caàu (S), ta caàn xaùc ñònh ***taâm I*** *vaø* ***baùn kính R*** *cuûa maët caàu.*

Daïng 1: *(S)* coù taâm *I(a; b; c)* vaø baùn kính *R:*

$$(S):\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Daïng 2: *(S)* coù taâm *I(a; b; c)* vaø ñi qua ñieåm A:

Khi ñoù baùn kính R = IA.

Daïng 3: *(S)* nhaän ñoaïn thaúng AB cho tröôùc laøm ñöôøng kính:

– Taâm I laø trung ñieåm cuûa ñoaïn thaúng AB: $x_I=\frac{x_A+x_B}{2};\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2};\ z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$.

– Baùn kính R = IA = $\frac{AB}{2}$.

Daïng 4: *(S)* ñi qua boán ñieåm A, B, C, D *(maët caàu ngoaïi tieáp töù dieän ABCD):*

– Giaû söû phöông trình maët caàu (S) coù daïng: $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ (*).

– Thay laàn löôït toaï ñoä cuûa caùc ñieåm A, B, C, D vaøo (*), ta ñöôïc 4 phöông trình.

– Giaûi heä phöông trình ñoù, ta tìm ñöôïc a, b, c, d $\Rightarrow$ *Phöông trình maët caàu (S).*

Daïng 5: *(S)* ñi qua ba ñieåm A, B, C vaø coù taâm I naèm treân maët phaúng (P) cho tröôùc:

Giaûi töông töï nhö daïng 4.

Daïng 6: *(S)* coù taâm I vaø tieáp xuùc vôùi maët caàu *(T)* cho tröôùc:

– Xaùc ñònh taâm J vaø baùn kính R′ cuûa maët caàu (T).

– Söû duïng ñieàu kieän tieáp xuùc cuûa hai maët caàu ñeå tính baùn kính R cuûa maët caàu (S).

(Xeùt hai tröôøng hôïp tieáp xuùc trong vaø tieáp xuùc ngoaøi)

Chuù yù: *Vôùi phöông trình maët caàu (S):*

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0 \qquad \text{vôùi } a^2+b^2+c^2-d>0$$

thì (S) coù taâm *I(–a; –b; –c)* vaø baùn kính *R =* $\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Baøi 1. Tìm taâm vaø baùn kính cuûa caùc maët caàu sau:

a) $x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$

b) $x^2+y^2+z^2+4x+8y-2z-4=0$

c) $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$ d) $x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-86=0$

e) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0$ f) $x^2+y^2+z^2-6x-12y+12z+72=0$

g) $x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-4=0$ h) $x^2+y^2+z^2-3x+4y=0$

i) $3x^2+3y^2+3z^2+6x-3y+15z-2=0$ k) $x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+10=0$

Baøi 2. Xaùc ñònh *m, t,* α*, …* ñeå phöông trình sau xaùc ñònh moät maët caàu, tìm taâm vaø baùn kính cuûa caùc maët caàu ñoù:

a) $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$

b) $x^2+y^2+z^2-2(3-m)x-2(m+1)y-2mz+2m^2+7=0$

c) $x^2+y^2+z^2+2(\cos\alpha+1)x-4y-2\cos\alpha.z+\cos2\alpha+7=0$

d) $x^2+y^2+z^2+2(3-2\cos^2\alpha)x+4(\sin^2\alpha-1)y+2z+\cos4\alpha+8=0$

e) $x^2+y^2+z^2-2\ln t.x+2y-6z+3\ln t+8=0$

f) $x^2+y^2+z^2+2(2-\ln t)x+4\ln t.y+2(\ln t+1)z+5\ln^2 t+8=0$

Baøi 3. Vieát phöông trình maët caàu coù taâm I vaø baùn kính R:

a) $I(1;-3;5),\quad R=\sqrt{3}$ b) $I(5;-3;7),\quad R=2$ c) $I(1;-3;2),\quad R=5$ d) $I(2;4;-3),\quad R=3$

Baøi 4. Vieát phöông trình maët caàu coù taâm I vaø ñi qua ñieåm A:

a) $I(2;4;-1),\ A(5;2;3)$ b) $I(0;3;-2),\ A(0;0;0)$ c) $I(3;-2;1),\ A(2;1;-3)$

d) $I(4;-4;-2),\ A(0;0;0)$ e) $I(4;-1;2),\ A(1;-2;-4)$

Baøi 5. Vieát phöông trình maët caàu coù ñöôøng kính AB, vôùi:

a) $A(2;4;-1),\ B(5;2;3)$ b) $A(0;3;-2),\ B(2;4;-1)$ c) $A(3;-2;1),\ B(2;1;-3)$

d) $A(4;-3;-3),\ B(2;1;5)$ e) $A(2;-3;5),\ B(4;1;-3)$ f) $A(6;2;-5),\ B(-4;0;7)$

Baøi 6. Vieát phöông trình maët caàu ngoaïi tieáp töù dieän ABCD, vôùi:

a) $A(1;1;0),\ B(0;2;1),\ C(1;0;2),\ D(1;1;1)$ b) $A(2;0;0),\ B(0;4;0),\ C(0;0;6),\ D(2;4;6)$

c) $A(2;3;1),B(4;1;-2),C(6;3;7),D(-5;-4;8)$ d) $A(5;7;-2),B(3;1;-1),C(9;4;-4),D(1;5;0)$

e) $A(6;-2;3),B(0;1;6),C(2;0;-1),D(4;1;0)$ f) $A(0;1;0),B(2;3;1),C(-2;2;2),D(1;-1;2)$

Baøi 7. Vieát phöông trình maët caàu ñi qua ba ñieåm A, B, C vaø coù taâm naèm trong maët phaúng (P) cho tröôùc, vôùi:

a) $\begin{cases} A(1;2;0),B(-1;1;3),C(2;0;-1) \\ (P)\equiv(Oxz) \end{cases}$ b) $\begin{cases} A(2;0;1),B(1;3;2),C(3;2;0) \\ (P)\equiv(Oxy) \end{cases}$

Baøi 8. Vieát phöông trình maët caàu (S) coù taâm I vaø tieáp xuùc vôùi maët caàu (T), vôùi:

a) $\begin{cases} I(-5;1;1) \\ (T): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} I(-3;2;2) \\ (T): x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z+5=0 \end{cases}$

VAÁN ÑEÀ 4: Vò trí töông ñoái giöõa hai maët caàu maët caàu

Cho hai maët caàu $S_1(I_1, R_1)$ vaø $S_2(I_2, R_2)$.

- $I_1I_2<|R_1-R_2|$ ⇔ *(S_1), (S_2) trong nhau*
- $I_1I_2>R_1+R_2$ ⇔ *(S_1), (S_2) ngoaøi nhau*
- $I_1I_2=|R_1-R_2|$ ⇔ *(S_1), (S_2) tieáp xuùc trong*
- $I_1I_2=R_1+R_2$ ⇔ *(S_1), (S_2) tieáp xuùc ngoaøi*
- $|R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2$ ⇔ *(S_1), (S_2) caét nhau theo moät ñöôøng troøn.*

Baøi 1. Xeùt vò trí töông ñoái cuûa hai maët caàu:

a) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-8x+4y-2z-4=0 \\ x^2+y^2+z^2+4x-2y-4z+5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9 \\ x^2+y^2+z^2-6x-10y-6z-21=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+4y-10z+5=0 \\ x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z-2=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-8x+4y-2z-15=0 \\ x^2+y^2+z^2+4x-12y-2z+25=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z+5=0 \\ x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z-2=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z-3=0 \\ x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-2=0 \end{cases}$

Baøi 2. Bieän luaän theo *m* vò trí töông ñoái cuûa hai maët caàu:

a) $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=64 \\ (x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=(m+2)^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=81 \\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=(m-3)^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25 \\ (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=(m-1)^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x+3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=16 \\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=(m+3)^2 \end{cases}$

VAÁN ÑEÀ 5: Taäp hôïp ñieåm laø maët caàu – Taäp hôïp taâm maët caàu

1. Taäp hôïp ñieåm laø maët caàu

Giaû söû tìm taäp hôïp ñieåm M thoaû tính chaát (P) naøo ñoù.

– Tìm heä thöùc giöõa caùc toaï ñoä x, y, z cuûa ñieåm M. Chaúng haïn coù daïng:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

hoaëc: $$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$$

– Tìm giôùi haïn quó tích (neáu coù).

2. Tìm taäp hôïp taâm maët caàu

– Tìm toaï ñoä cuûa taâm I, chaúng haïn: $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases}$ *(*)*

– Khöû t trong (*) ta coù phöông trình taäp hôïp ñieåm.

– Tìm giôùi haïn quó tích (neáu coù).

Baøi 1. Cho hai ñieåm A(1; 2; 1), B(3; 1; –2). Tìm taäp hôïp caùc ñieåm M(x; y; z) sao cho:

a) $MA^2+MB^2=30$ b) $\dfrac{MA}{MB}=2$ c) $MA^2+MB^2=k^2\ (k>0)$

Baøi 2. Cho hai ñieåm A(2; –3; –1), B(–4; 5; –3). Tìm taäp hôïp caùc ñieåm M(x; y; z) sao cho:

a) $MA^2+MB^2=124$ b) $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $AMB=90^0$

d) MA = MB e) $MA^2+MB^2=2(k^2+1)\ (k>0)$

Baøi 3. Tìm taäp hôïp caùc taâm I cuûa maët caàu sau khi *m* thay ñoåi:

a) $x^2+y^2+z^2-4x-6y+2(m-3)z+19-2m=0$

b) $x^2+y^2+z^2+2(m-2)x+4y-2z+2m+4=0$

c) $x^2+y^2+z^2+2x-4y+2(m+1)z+2m^2+6=0$

d) $x^2+y^2+z^2-4(2+\cos m)x-2(5+2\sin m)y-6z+\cos 2m+1=0$

e) $x^2+y^2+z^2+2(3-4\cos m)x-2(4\sin m+1)y-4z-5-2\sin^2 m=0$