



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



LÝ THUYẾT.

I. VEC-TƠ PHÁP TUYẾN VÀ CẶP VEC-TƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẪNG.

1. Định nghĩa.

Cho mặt phẳng (α) .

- ☐ Nếu vec-tơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là **vec-tơ pháp tuyến** của (α) .
- ☐ Nếu hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là **cặp vec-tơ chỉ phương** của (α) .

2. Chú ý.

- ☐ Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vec-tơ pháp tuyến hoặc một điểm và một cặp vec-tơ chỉ phương của mặt phẳng đó.
- ☐ Nếu $\vec{n}$ là một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

II. XÁC ĐỊNH VEC-TƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG KHI BIẾT MỘT CẶP VEC-TƠ CHỈ PHƯƠNG

1. Định lý.

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vec-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ làm cặp vec-tơ chỉ phương thì (α) nhận vec-tơ $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ làm vec-tơ pháp tuyến.

2. Chú ý.

- a) Vec-tơ $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ được gọi là *tích có hướng* của hai vec-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $[\vec{a}, \vec{b}]$
- b) Biểu thức $a_1b_2 - a_2b_1$ thường được kí hiệu $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Tương tự, $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$ và $\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = a_3b_1 - a_1b_3$. Như vậy: $[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$.
- c) Hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

III. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

1. Định nghĩa.

Trong không gian $Oxyz$, phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là **phương trình tổng quát** của mặt phẳng.

2. Nhận xét.

Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó,

Mặt phẳng (α) có một vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.

$$N(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0) đều là phương trình của một mặt phẳng xác định.

3. Một số dạng toán viết phương trình mặt phẳng cơ bản

a) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một vec-tơ pháp tuyến

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\text{hay } Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

b) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một cặp vec-tơ chỉ phương

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có cặp vec-tơ chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$, ta thực hiện như sau

Tìm một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

c) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau

Tìm cặp vec-tơ chỉ phương, chẳng hạn $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Tìm một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

d) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng theo đoạn chắn

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

4. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

a) Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vec-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó: $(\alpha_1) \parallel (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.

Chú ý.

$$- (\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} (k \in \mathbb{R}).$$

- (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.

b) Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vec-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó

$$(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức

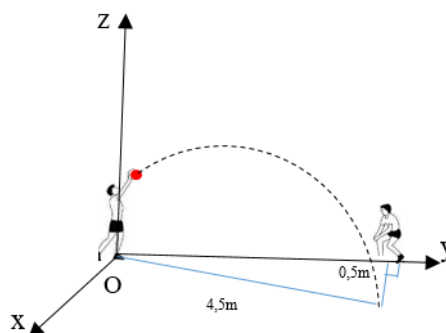
$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

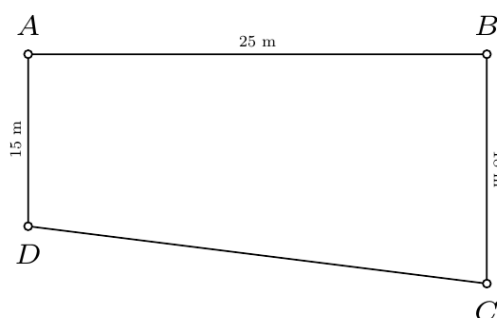
Câu 1: Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimét) vào một ngôi nhà 1 tầng, người ta thấy rằng mặt trên và mặt dưới của mái nhà thuộc các mặt phẳng vuông góc với trục Oz . Biết rằng các vị trí $A(3;4;33), D(9;8;35)$ lần lượt thuộc mặt dưới, mặt trên của mái nhà. Độ dày của mái nhà được tính bằng khoảng cách giữa mặt trên và mặt dưới của mái nhà đó. Hãy cho biết độ dày của mái nhà đó là bao nhiêu decimét?

Câu 2: Trong tiết thể dục học về kỹ thuật chuyên bóng hơi, Nam và An đang tập chuyên bóng cho nhau, Nam ném bóng cho An đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Nam và rơi xuống vị trí cách An $0,5m$ và cách Nam $4,5m$. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): ax + by + cx + d = 0$ và vuông góc với mặt đất. Khi đó giá trị của $a + b + c + d$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

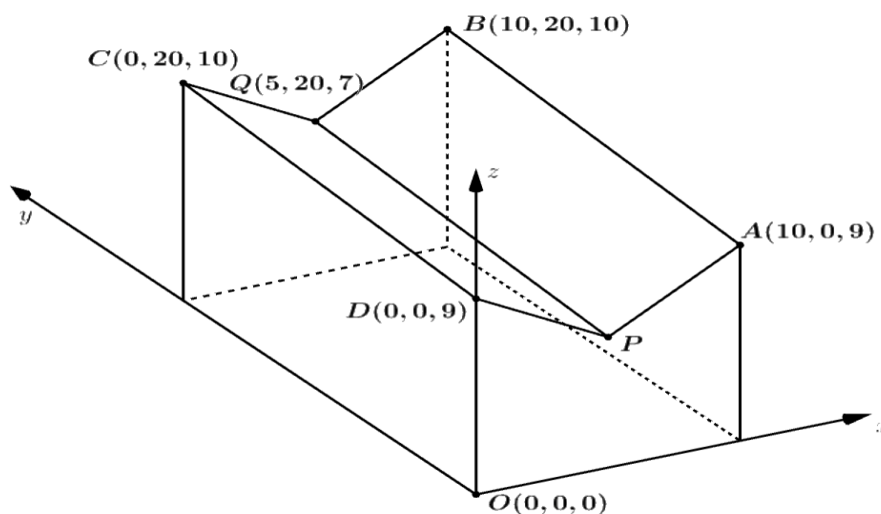


Câu 3: Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D , như hình vẽ.

Bước đầu chúng được lấy “thăng bằng” để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25m$, $AD = 15m$, $BC = 18m$. Do yêu cầu kỹ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là $10cm$, $a\text{ cm}$, $6cm$ tương ứng sao cho bốn điểm A, B', C', D' đồng phẳng. Giá trị của a là



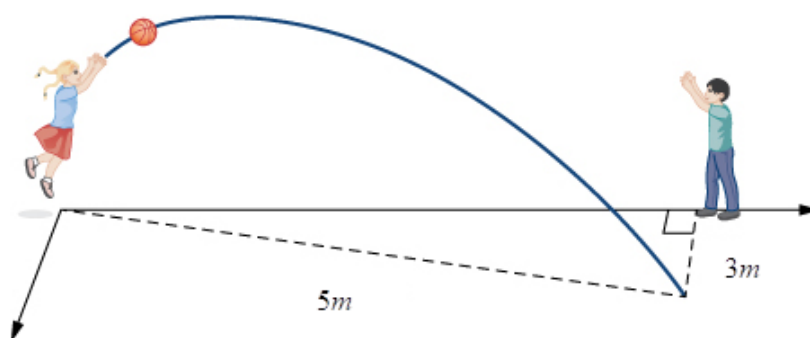
Câu 4: Hình bên dưới minh họa hình ảnh hai mái nhà của một nhà kho trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất. Biết rằng tọa độ của điểm $P(a;b;c)$. Khi đó giá trị $a + b + c$ bằng bao nhiêu?



- Câu 5:** Trên thiết kế đồ họa 3D của một cánh đồng điện mặt trời trong không gian $Oxyz$, một tấm pin nằm trên mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z + 2 = 0$; một tấm pin khác nằm trên mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và song song với mặt phẳng (P) . Biết rằng phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $ax + 2y + bz + c = 0$. Khi đó giá trị $a + b + c$ bằng bao nhiêu?



- Câu 6:** Trong một trò chơi mô phỏng bắn súng, một người chơi đặt điểm ngắm tại điểm O là giao điểm của AC và BD trong căn phòng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AB = 50(m)$, $AD = 35(m)$, $AA' = 10(m)$. Người chơi có nhiệm vụ từ điểm ngắm đã đặt bắn trúng một mục tiêu di động trên mặt phẳng $(CB'D')$. Tính khoảng cách ngắn nhất từ điểm ngắm đó đến mục tiêu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).
- Câu 7:** Khi gán hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilomet) vào một trận địa pháo phòng không, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất. Trong tập luyện, một vùng mặt phẳng trong tầm hoạt động của pháo được giữ bởi 3 điểm pháo $A(3; 0; 0)$; $B(0; 1, 5; 0)$; $C(0; 0; -1, 5)$. Một mục tiêu bay từ $M(5; 2; 4)$ tới $N(1; 0; -2)$. Khoảng cách từ điểm pháo A tới vị trí va chạm của mục tiêu khi tới mặt phẳng là bao nhiêu?
- Câu 8:** Hai đứa trẻ đang chơi với một quả bóng. Bé gái ném quả bóng cho bé trai. Quả bóng di chuyển trong không khí, uốn cong $3m$ về bên phải và rơi cách bé gái $5m$ (xem hình sau).



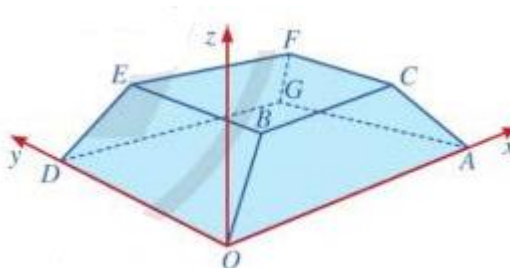
Biết mặt phẳng chứa quỹ đạo của quả bóng vuông góc với mặt đất và phương trình tổng quát của nó có dạng $ax + by + c = 0$. Tính $a + b + c$?

Câu 9: Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Ba bức tường $(P), (Q), (R)$ (như hình vẽ) của tòa nhà lần lượt có phương trình: $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$, $(Q): 2x + y + 2z - 3 = 0$, $(R): 2x + 4y - 4z - 22 = 0$.



Tính độ rộng bức tường (Q) của tòa nhà là

Câu 10: Một nhà hàng được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA = 100m$, chiều rộng $OD = 60m$ và tọa độ điểm $B(10; 10; 8)$.



Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$ là

Câu 11: Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và có tâm của mặt đáy trên lần lượt là $A(3; 2; 3), B(6; 3; 3), C(9; 4; 2), D\left(6; 0; \frac{5}{2}\right)$.



Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) .