

Chuyên đề 1: VÉCTƠ-TỌA ĐỘ

Bài 1. VÉCTƠ

A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm mở đầu:

✓ Véc tơ là một đoạn thẳng:

- Một đầu được xác định là gốc, còn đầu kia là ngọn.
- Hướng từ gốc đến ngọn gọi là hướng của véc tơ.
- Độ dài của véc tơ là độ dài đoạn thẳng xác định bởi điểm đầu và điểm cuối của véc tơ.

Ví dụ: Véc tơ $\overrightarrow{AB}$:



- Điểm gốc: A
- Điểm ngọn: B
- Phương (giá): đường thẳng AB
- Hướng: từ A đến B
- Độ dài (môđun): độ dài đoạn AB

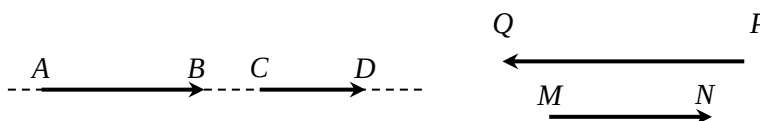
✓ Véc tơ có gốc A, ngọn B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$ và độ dài của véc tơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc tơ. Ngoài ra, véc tơ còn được kí hiệu bởi một chữ cái in thường phía trên có mũi tên như $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}, \vec{u}$ độ dài của $\vec{a}$ kí hiệu: $|\vec{a}|$.

✓ Véc tơ “không”, kí hiệu $\vec{0}$ là véc tơ có:

- Điểm gốc và điểm ngọn trùng nhau.
- Độ dài bằng 0.
- Hướng bất kỳ

✓ Hai véc tơ cùng phương khi chúng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.

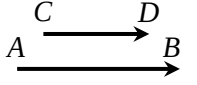
Hai cặp véc tơ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ và $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$ được gọi là cùng phương.



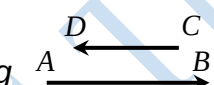
$$\overrightarrow{AB} \text{ cùng phương } \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ A, B, C, D \text{ thẳng hàng} \end{cases}$$

✓ **Hướng của hai vectơ:** Hai vectơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng. Ta chỉ xét hướng của hai vectơ khi chúng cùng phương.

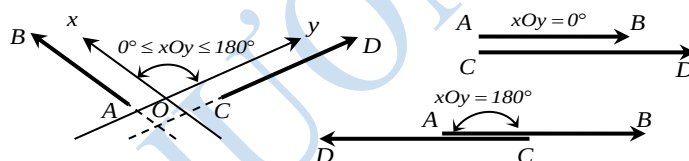
- Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ gọi là cùng hướng:

$$\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ \text{Hai tia } AB, CD \text{ cùng hướng} \end{cases}$$


- Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ gọi là ngược hướng:

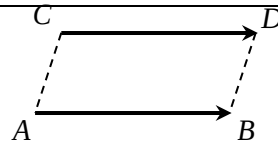
$$\overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ \text{Hai tia } AB, CD \text{ ngược hướng} \end{cases}$$


✓ **Góc của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$** là góc tạo bởi hai tia Ox, Oy lần lượt cùng hướng với hai tia AB và CD . Nghĩa là: $xOy = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

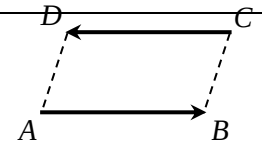


- Khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ không cùng hướng thì $0^\circ \leq xOy \leq 180^\circ$
- Khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng thì $xOy = 0^\circ$
- Khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng thì $xOy = 180^\circ$

✓ **Hai vectơ bằng nhau** khi và chỉ khi chúng cùng hướng và có độ dài bằng nhau.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{CD} \text{ cùng hướng} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \text{ hay } AB = CD \end{cases}$$


✓ **Hai vectơ đối nhau** khi và chỉ khi chúng ngược hướng và có độ dài bằng nhau.

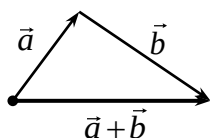
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{CD} \text{ ngược hướng} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \text{ hay } AB = CD \end{cases}$$


2. Các phép toán trên vectơ:

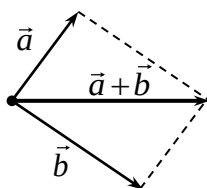
a) Tổng của hai vectơ:

- **Định nghĩa** phép cộng 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + \vec{b}$, được xác định tùy theo vị trí của 2 vectơ này. Có 3 trường hợp:

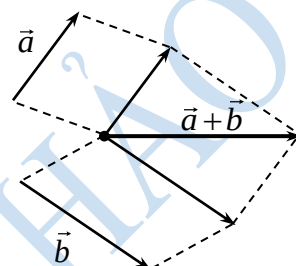
① $\vec{a} + \vec{b}$ nối đuôi



② $\vec{a} + \vec{b}$ cùng điểm gốc



③ $\vec{a} + \vec{b}$ là 2 vectơ bất kỳ



$\vec{a} + \vec{b}$ được cộng theo
quy tắc 3 điểm

$\vec{a} + \vec{b}$ được cộng theo
quy tắc hình bình hành

$\vec{a} + \vec{b}$ được cộng theo
2 trường hợp trên

✓ Quy tắc ba điểm: (Quy tắc tam giác hay quy tắc Chasles)

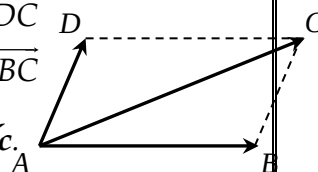
- Với ba điểm bất kỳ A, B, C ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
- Quy tắc 3 điểm còn được gọi là hệ thức Chasles dùng để cộng các vectơ liên tiếp, có thể mở rộng cho trường hợp nhiều vectơ như sau:

$$\overrightarrow{A_1 A_n} = \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \overrightarrow{A_3 A_4} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1} A_n}$$

✓ Quy tắc hình bình hành:

Cho hình bình hành ABCD thì" $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \end{cases}$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$

- Quy tắc hình bình hành dùng để cộng các vectơ chung gốc.



⚠ Lưu ý: phép cộng vectơ không phải là phép cộng độ dài các vectơ.

• Tính chất:

- ✓ Giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- ✓ Kết hợp: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}$
- ✓ Cộng với vectơ đối: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
- ✓ Cộng với vectơ không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

b) Hiệu của hai véctor:

✓ Véctor đối:

- Véctor đối véctor $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Tổng hai véctor đối là $\vec{0}$: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

✓ **Định nghĩa:** hiệu hai véctor $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cho 2 kết quả $\vec{a} - \vec{b}$ hoặc $\vec{b} - \vec{a}$ được xác định:

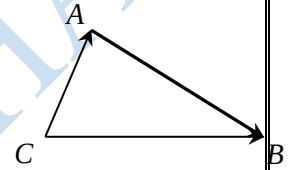
- $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (\text{véctor đối của } \vec{b}) = \vec{a} + (-\vec{b})$
- $\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (\text{véctor đối của } \vec{a}) = \vec{b} + (-\vec{a})$

✓ **Tính chất:**

$$\textcircled{1} \forall \vec{a}: \vec{a} - \vec{a} = \vec{0} \quad \textcircled{2} \forall \vec{a}: \vec{a} - \vec{0} = \vec{a} \quad \textcircled{3} -\vec{AB} = \vec{BA}$$

✓ Quy tắc tam giác đối với hiệu hai véctor:

Với ba điểm bất kỳ A, B, C ta có: $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$.



c) Tích của một số đối với một véctor:

✓ **Định nghĩa:** Cho số thực k ($k \neq 0$) và một véctor $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$)

Tích $k \cdot \vec{a}$ là một véctor $\begin{cases} \text{cùng hướng với } \vec{a} \text{ nếu } k > 0 \\ \text{ngược hướng với } \vec{a} \text{ nếu } k < 0 \end{cases}$

✓ **Tính chất:**

$$\begin{aligned} & \bullet k(\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} & \bullet (k + h) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + h \cdot \vec{a} & \bullet k \cdot (h \cdot \vec{a}) = (k \cdot h) \cdot \vec{a} \\ & \bullet (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a} & \bullet 1 \cdot \vec{a} = \vec{a} & \bullet 0 \cdot \vec{a} = \vec{0} \end{aligned}$$

✓ **Điều kiện để hai véctor cùng phương:**

- Điều kiện cần và đủ để hai véctor $\vec{a}; \vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là tồn tại một số k để $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$.

- **Hệ quả:** Điều kiện cần và đủ để 3 điểm A, B, C thẳng hàng là $\vec{AB} = k \vec{AC}$

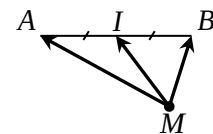
d) Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm tam giác:

✓ **Trung điểm của đoạn thẳng:**

- I là trung điểm của AB :

$$\Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \text{ hay } \vec{AI} = \vec{IB} = \frac{1}{2} \vec{AB} \text{ hay } \vec{IA} = -\vec{IB}$$

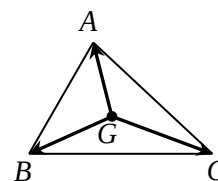
- I là trung điểm của AB , với M bất kì, ta có: $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$



✓ **Trọng tâm của tam giác:**

G là trọng tâm của $\triangle ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

- Với M bất kì: $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$



B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. KHÁI NIỆM VÉCTƠ

I - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- **Véctơ** là 1 đoạn thẳng có hướng (có điểm đầu, điểm cuối)
- 1 đoạn thẳng AB xác định 2 véctơ: $\vec{AB}$, $\vec{BA}$.
- Véctơ dùng để giải các bài toán hình học và vật lý mà có tính chất “độ dài + hướng” (như các bài toán về chuyển động, lực, ...)
- **Độ dài véctơ (modul)** là độ dài đoạn thẳng tạo thành véctơ đó. Độ dài véctơ cũng là khoảng cách giữa hai điểm đầu mút. Kí hiệu: $AB = |\vec{AB}| = |\vec{BA}|$.
- **2 véctơ cùng phương** khi giá chứa chúng song song hoặc cùng nằm trên đường thẳng.
- **2 véctơ bằng nhau** khi chúng cùng hướng và cùng độ dài.
- **2 véctơ đối nhau** khi chúng ngược hướng và cùng độ dài. Véctơ đối của $\vec{a}$ là $-\vec{a}$.
- **Véctơ không** là véctơ có điểm gốc và điểm ngọn trùng nhau, độ dài là 0, phương hướng tùy ý. Như vậy với mọi điểm $A, B, C, \dots$ bất kỳ thì $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{CC} = \dots = \vec{0}$.

Vấn đề 2. TỔNG – HIỆU VÉCTƠ

Dạng 1. Chứng minh một đẳng thức véctơ

I – PHƯƠNG PHÁP

- Chứng minh đẳng thức là chứng minh 2 vế / 2 biểu thức bằng nhau
- Cách chứng minh:
 - ✓ Cách thường dùng: biến đổi 1 vế cho đến khi ra vế còn lại.
 - ✓ Cách bắc cầu: biến đổi 2 vế cho ra cùng 1 kết quả (suy ra vế này bằng vế kia)

- Một số kinh nghiệm về chứng minh đẳng thức vectơ:
 - ✓ 2 vế là phép cộng, trừ có cùng số lượng vectơ thì thường dùng quy tắc 3 điểm.
 - ✓ Vế trái là tổng nhiều vectơ, vế phải là vectơ $\vec{0}$ thì biến đổi vế trái thành tổng các cặp vectơ đối nhau.

Dạng 2. Tính độ dài của vectơ tổng, vectơ hiệu

I-PHƯƠNG PHÁP

- Biến đổi vectơ tổng, vectơ hiệu đã cho thành một vectơ duy nhất $\vec{u}$. Tính độ dài của vectơ $\vec{u}$. Từ đó suy ra độ dài đối vectơ tổng, vectơ hiệu.
- ⚠ Lưu ý: thường thì $|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ và $|\vec{a} - \vec{b}| \neq |\vec{a}| - |\vec{b}|$ như vậy biến đổi $|\overrightarrow{AB} \pm \overrightarrow{AC}|$ thành $AB \pm AC$ là sai.

Dạng 2. Xác định một điểm thỏa một đẳng thức vectơ cho trước

I-PHƯƠNG PHÁP

Để xác định một điểm M thỏa một đẳng thức vectơ cho trước, ta làm như sau:

- Biến đổi đẳng thức vectơ đã cho về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$, trong đó A là một điểm cố định, $\vec{v}$ là vectơ cố định.
- Lấy điểm A làm điểm gốc, dựng vectơ $\vec{v}$ thì điểm ngọn chính là điểm M cần dựng