

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K với K là một khoảng.

+) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu " $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ".

+) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu

" $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ".

+) Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K .

2. Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

+) Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K .

+) Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng K .

3. Lưu ý:

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì ta nói hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ thì ta nói hàm số nghịch biến trên đoạn $[a; b]$.

+) Tương tự với các khái niệm hàm số đồng biến, nghịch biến trên các nửa khoảng.

PHƯƠNG PHÁP XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định

Bước 1: Tìm tập xác định D .

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 3: Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị x làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4: Lập bảng biến thiên.

Bước 5: Kết luận.

Chú ý: Đối với bài toán trắc nghiệm, ta có thể sử dụng **Phương pháp sử dụng MTCT**.

Cách 1: Sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio. Quan sát bảng kết quả nhận được về tính tăng, giảm giá trị của $f(x)$ và dự đoán.

Cách 2: Tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm. Sử dụng tính năng giải bất phương trình INEQ của máy tính Casio (đối với bất phương trình bậc hai, bậc ba).



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHO BỞI BIỂU THỨC

Câu 1. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Câu 2. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 1$.

Câu 3. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 26x - 1$.

Câu 4. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x - 1$.

Câu 5. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

Câu 6. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 + 4x^2$.

Câu 7. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 - 7$.

Câu 8. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{3x+1}{1-x}$.

Câu 9. Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{3-2x}{x+7}$.

Câu 10. Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số: $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x+2}$.

Câu 11. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+1}$.

Câu 12. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số: $y = \frac{-x^2 - x + 5}{x+2}$.

Câu 13. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{-2x+1}{x^2-3x+2}$.

Chú ý: Các công thức tính nhanh.

1. Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$ với $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$ có $y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ m & p \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ n & p \end{vmatrix}}{(mx^2 + nx + p)^2}$.

2. Hàm số phân thức $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ có $y(x_0) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$ với x_0 là nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Câu 14. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-4x+4}$.

Câu 15. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+x+2}$.

Câu 16. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2$.

Câu 17. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - 1}$ trên $\left(0; \frac{\pi}{4} \right)$.

Câu 18. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số : $y = \begin{cases} -x+2 & \text{nếu } x < -1 \\ -2x^2+2x+7 & \text{nếu } -1 \leq x \leq 2 \\ 3x-3 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$.

Câu 19. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a) $y = |x^2 - 2x - 3|$. b) $y = |x^2 - 4x + 3| + 4x + 3$.

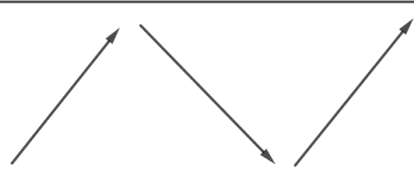
Câu 20. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số:

$$y = \sqrt{x+1} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(1+x)(8-x)}.$$

Câu 21. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x\sqrt{4-x^2}$.

DẠNG 2: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP CHO BỞI BBT HOẶC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ HOẶC $y = f'(x)$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

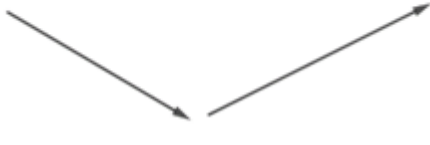
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(2x+1)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$					

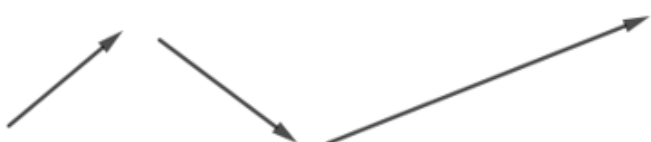
Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(-2x+6)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

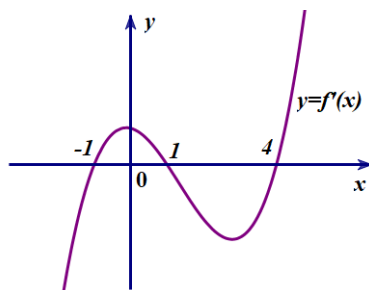
Hỏi hàm số $y = f\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6\right)$ nghịch biến trên các khoảng nào?

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$								

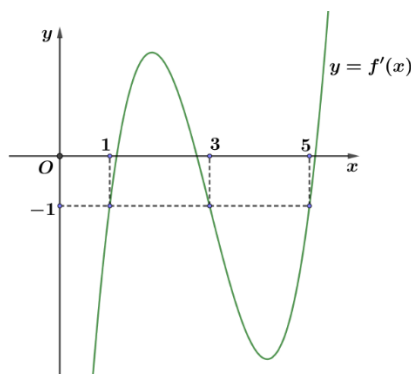
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(-x^2 + 2x)$?

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



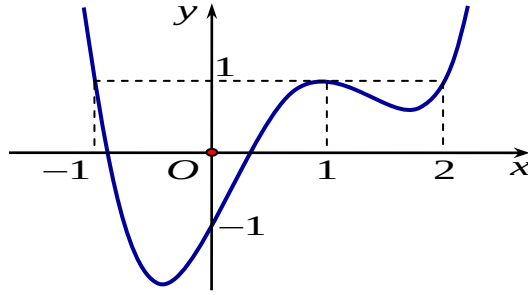
Xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(x) + 3$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



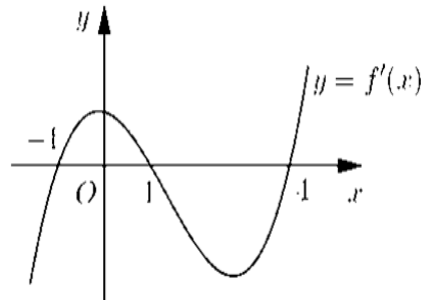
Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $g(x) = f(x) + x + 1$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



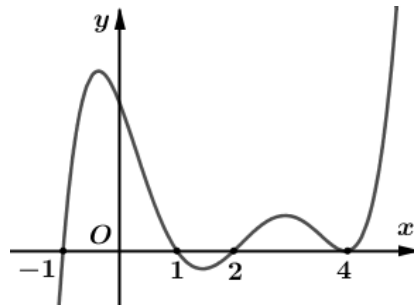
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = f(x) - x + 2020$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



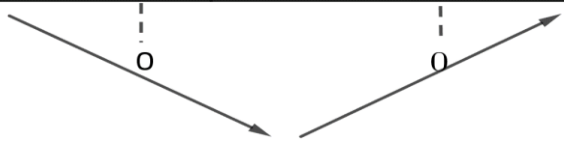
Hàm số $y = g(x) = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng nào?

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



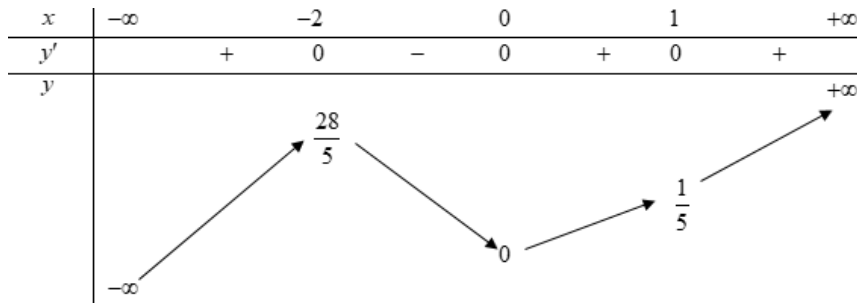
Hàm số $y = g(x) = f(2x - 4)$ nghịch biến trên khoảng nào?

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$					

Hỏi hàm số $y = f(f(x))$ đồng biến trên những khoảng nào?

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



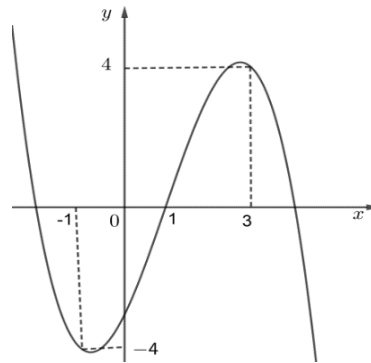
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = g(x) = f(4-2x) - \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 6x + 1$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

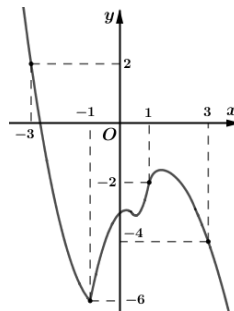
Biết $1 < f(x) < 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = g(x) = f(f(x)) + x^3 - 6x^2 - 1$ có ít nhất bao nhiêu khoảng đồng biến?

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



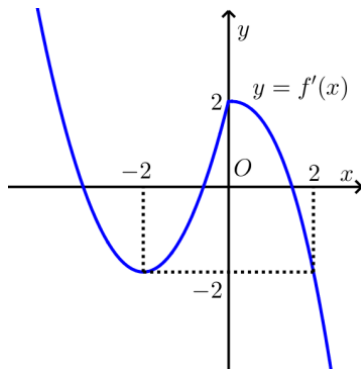
Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x) - x^2 + 2x$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



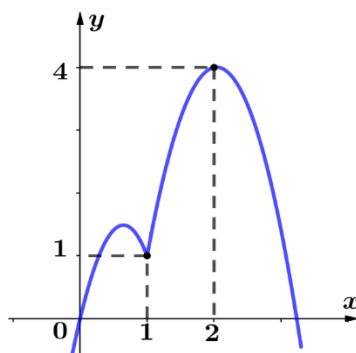
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2 + 2x - 2019$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



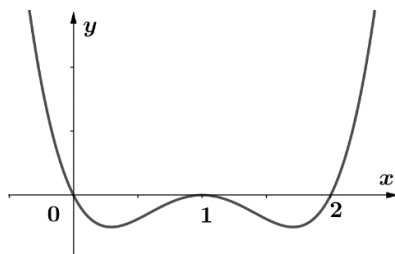
Hàm số $y = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + 6x$ đồng biến trên khoảng nào?

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



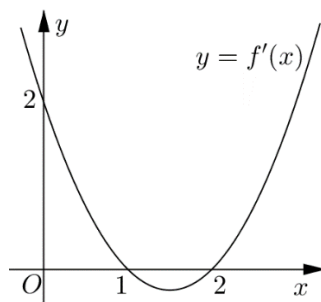
Hàm số $g(x) = 3f(x) - x^3$ đồng biến trên khoảng nào?

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



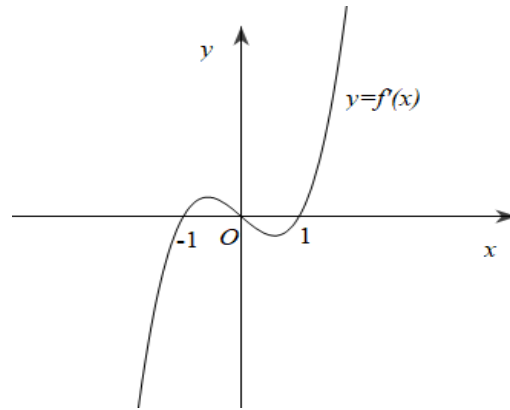
Hàm số $g(x) = f\left(\frac{5x}{x^2 + 4}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào?

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



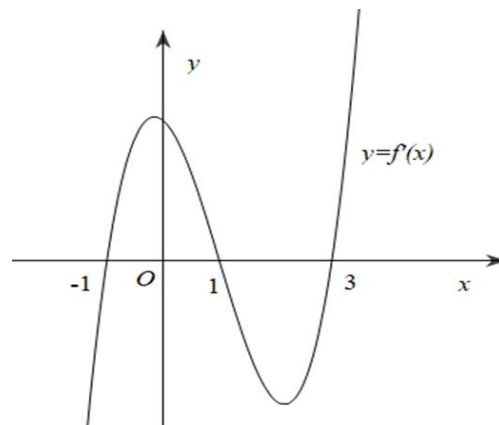
Hàm số $y = g(x) = f(1 + 2x - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



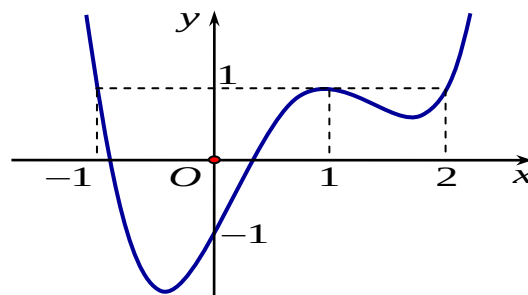
Hàm số $y = g(x) = f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào?

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



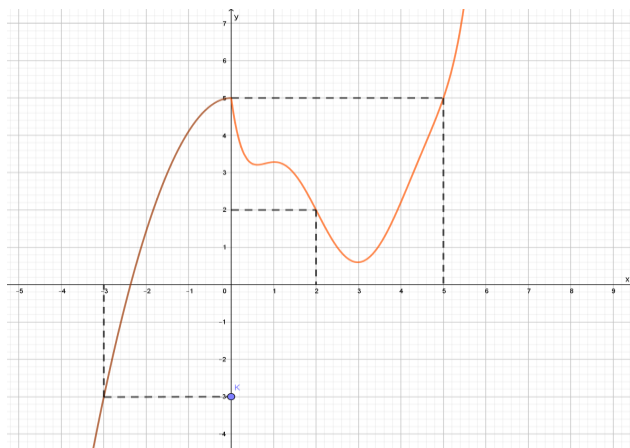
Hàm số $y = g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ đồng biến trên khoảng nào?

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



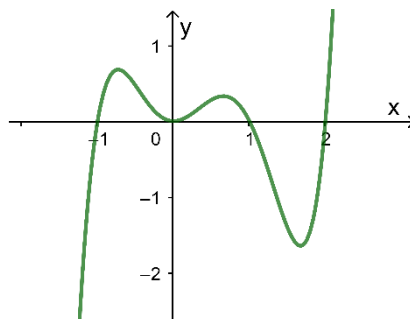
Hàm số $y = g(x) = f(x-1) + \frac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào?

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



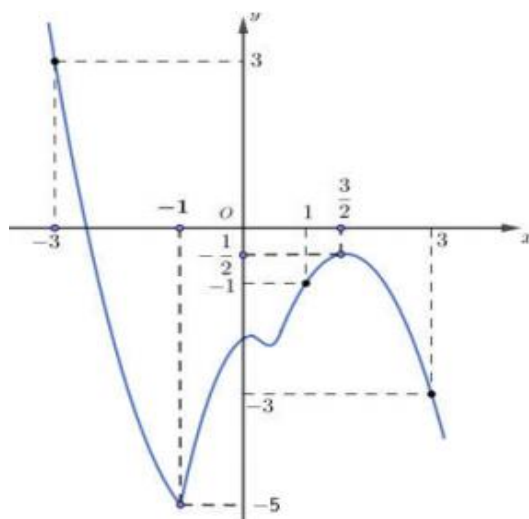
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4)$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



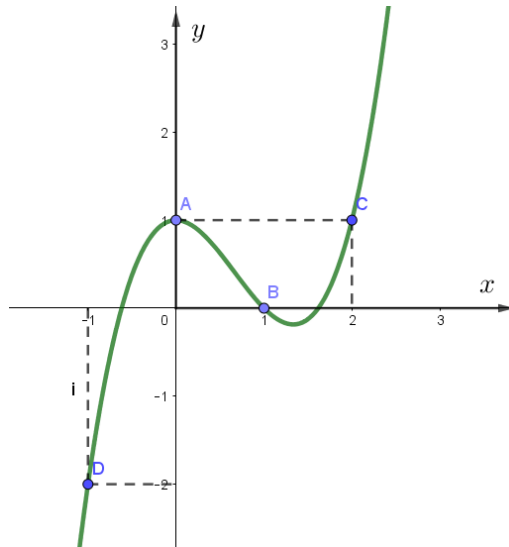
Hàm số $g(x) = f(x-2) + \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 12x + 1$ có ít nhất bao nhiêu khoảng nghịch biến?

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng nào?

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x^2 - 3x + 2019$ đồng biến trong khoảng nào?

DẠNG 3: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Phương pháp: Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(u(x))$.

- Tìm tập xác định D .
- Đổi biến $t = u(x)$. Tìm điều kiện cần và đủ của t , giả sử $t \in K$.
- Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $f(t)$ trên K .
- Kết luận khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(u(x))$.

Chú ý:

- 1) Nếu hàm số $t = u(x)$ đồng biến trên khoảng $(\alpha; \beta)$, ta có:
 - Hàm số $y = f(u(x))$ đồng biến trên khoảng $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên khoảng $(u(\alpha); u(\beta))$.
 - Hàm số $y = f(u(x))$ nghịch biến trên khoảng $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(u(\alpha); u(\beta))$.
- 2) Nếu hàm số $t = u(x)$ nghịch biến trên khoảng $(\alpha; \beta)$, ta có:
 - Hàm số $y = f(u(x))$ đồng biến trên khoảng $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(u(\alpha); u(\beta))$.
 - Hàm số $y = f(u(x))$ nghịch biến trên khoảng $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên khoảng $(u(\alpha); u(\beta))$.

Câu 1. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = x^2 - 6x + 6\sqrt{2x+1} - 1$.

DẠNG 4: TÌM ĐK CỦA THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN MỘT MIỀN.

Câu 1. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$1) y = x^3 + 3x^2 + mx + m \quad 2) y = mx^3 - (2m+1)x^2 + (m+2)x - 2$$

Câu 2. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-3)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x-m}{2x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Câu 4. Tìm m để hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định?

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 3(m^2-1)x$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$?

Câu 6. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 7. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3(m^2-1)x - 2m + 3$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 6(m^2-2)x$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2-4x}{x+m}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 + (m+2)x - 3m + 1}{x-1}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 13. Tìm m để hàm số $y = \frac{\sin x + m}{\sin x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

Câu 14. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m - 3$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 3?

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ sao cho hàm số $y = x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 16. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2+1} - mx - 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-3)^2(x^2 + mx + 16)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x) = f(5-x)$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{2\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2\cos x + 3}{2\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m + 1}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 22. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x + m}{m \tan x + 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 23. Tìm giá trị m để hàm số $y = \frac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$?

Câu 24. Tìm m để hàm số $y = \frac{2\cot x + 1}{\cot x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.