

CHƯƠNG

II

VECTƠ
TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO



LÝ THUYẾT.

I. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTO, PHÉP TRỪ HAI VECTO, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z');$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z');$$

$$k\vec{a} = (kx; ky; kz) \text{ với } k \text{ là một số thực.}$$

Nhận xét: Vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ cùng phương với vectơ $\vec{b} = (x'; y'; z') \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số

$$\text{thực } k \text{ sao cho } \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz' \end{cases} \quad (\text{Nếu } x'.y'.z' \neq 0 \text{ thì } \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'})$$

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$. Khi đó:

$$\text{Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng } AB \text{ là } \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right);$$

$$\text{Toạ độ trọng tâm của tam giác } ABC \text{ là } \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right).$$

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'$

Nhận xét:

$$- \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$$

$$- |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

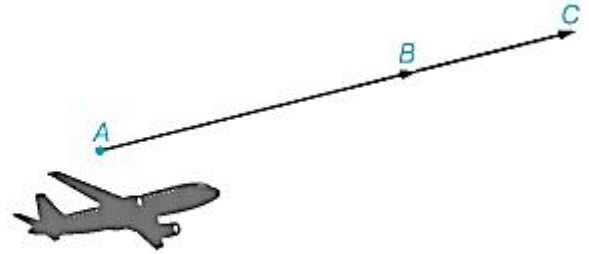
$$- \text{Nếu } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ thì } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

Chú ý: Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ thì $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Đặc biệt, khi B trùng O ta nhận được công thức $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$.

III. VẬN DỤNG TỌA ĐỘ CỦA VECTO TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

Ví dụ 5: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?



Hình 2.49

Lời giải

Gọi $C(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB = 2BC$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{940-800}{2}; \frac{550-500}{2}; \frac{8-7}{2} \right) = (70; 25; 0,5).$$

$$\text{Mặt khác, } \overrightarrow{BC} = (x-940; y-550; z-8) \text{ nên } \begin{cases} x-940 = 70 \\ y-550 = 25 \\ z-8 = 0,5. \end{cases}$$

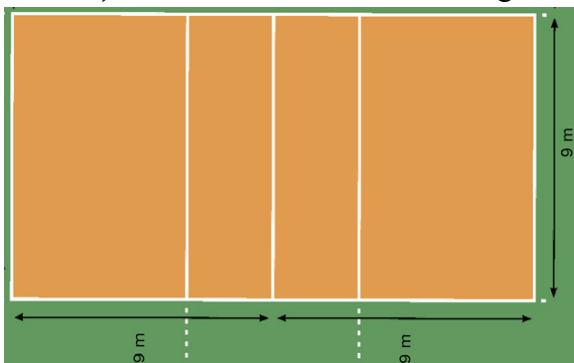
$$\text{Từ đó } \begin{cases} x = 1010 \\ y = 575 \\ z = 8,5 \end{cases} \text{ và vì vậy } C(1010; 575; 8,5).$$

Vậy toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(1010; 575; 8,5)$.

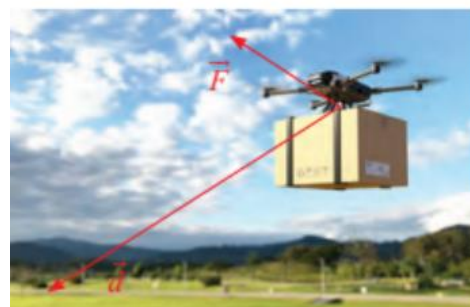


II HỆ THỐNG BÀI TẬP TOÁN THỰC TẾ.

Câu 1: Theo quy định của liên đoàn bóng chuyền quốc tế (FIVB), sân bóng chuyền có hình dạng chữ nhật. Kích thước tiêu chuẩn của sân bóng chuyền là $9m \times 18m$. Chiều cao của lưới bóng chuyền là $2,24m$ đối với nữ. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như hình vẽ thứ hai (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ để căng lưới bóng chuyền. Hãy xác định toạ độ của vector $\overrightarrow{AB}$.



- Câu 2:** Trong không gian với hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đã phát hiện một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(750;450;7)$ đến điểm $B(950;550;9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là gì?
- Câu 3:** Trong không gian với hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đã phát hiện một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(700;450;7)$ đến điểm $B(900;550;9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì sau bao nhiêu phút, máy bay bay từ điểm A đến điểm $C(1000;600;10)$?
- Câu 4:** Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(400; 50;8)$ đến điểm $B(100; 450;10)$ trong 10 phút. Sau đúng 5 phút tính từ lúc máy bay ở vị trí A thì máy bay ở vị trí có tổng hoành độ tung độ và cao độ là bao nhiêu?
- Câu 5:** Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm B trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(1010;575;10)$. Xác định tọa độ vị trí điểm B
- Câu 6:** Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một drone giao hàng đang ở tọa độ $A(1;0;1)$ di chuyển đến địa điểm nhận hàng là $B(4;4;6)$. Mỗi đơn vị trên phần mềm bằng $1km$ ngoài thực tế. Biết tốc độ của drone là $80km/h$; giả sử rằng từ vị trí giao hàng và nhận hàng không gặp chướng ngại vật, sức cản gió không đáng kể để drone bay theo đường thẳng. Thời gian drone bay từ vị trí ban đầu đến địa điểm giao hàng mất bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng thập phân)?
- Câu 7:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, (đơn vị đo: km), ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu Su-35 của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(300;150;7)$ đến điểm $N(800;550;13)$ trong 20 phút. Tính tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo nếu máy bay giữ nguyên vận tốc và hướng bay.
- Câu 8:** Tính công(đơn vị N) sinh bởi lực $\vec{F}(6;8;-10)$ tạo bởi một drone giao hàng khi thực hiện một độ dịch chuyển $\vec{d}(100;200;200)$.



- Câu 9:** Một em nhỏ cân nặng $20kg$ trượt trên cầu trượt dài $3m$. Biết rằng cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° . Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt biết gia tốc rơi tự do $g = 9,8m/s^2$.

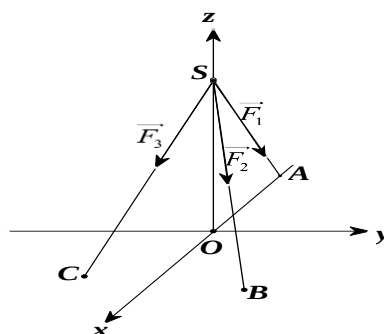


Câu 10: Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu X di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000;600;14)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$.



Tọa độ vị trí điểm $N(a;b;c)$, tính $S = a + b + 2c$

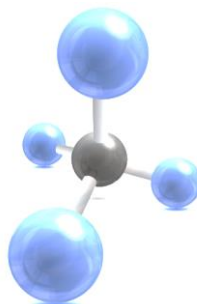
Một chiếc máy đo đạc trắc địa được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $S(0;0;4)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A(-2;0;0)$, $B(1;\sqrt{3};0)$, $C(1;-\sqrt{3};0)$. Biết rằng trọng lực tác dụng lên chiếc máy có độ lớn là $30N$ và được phân bố thành ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ có độ lớn bằng nhau như hình dưới. Tính tích vô hướng của $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$.



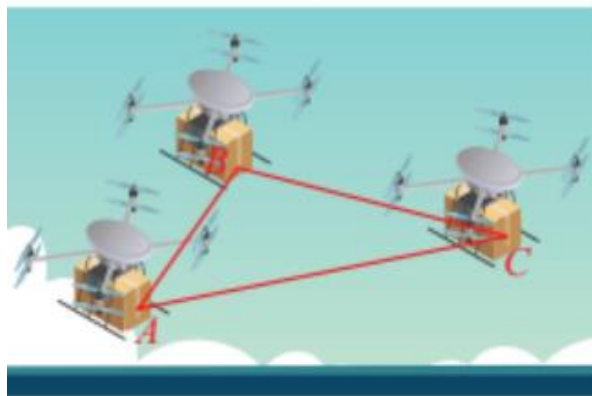
Câu 11: Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.



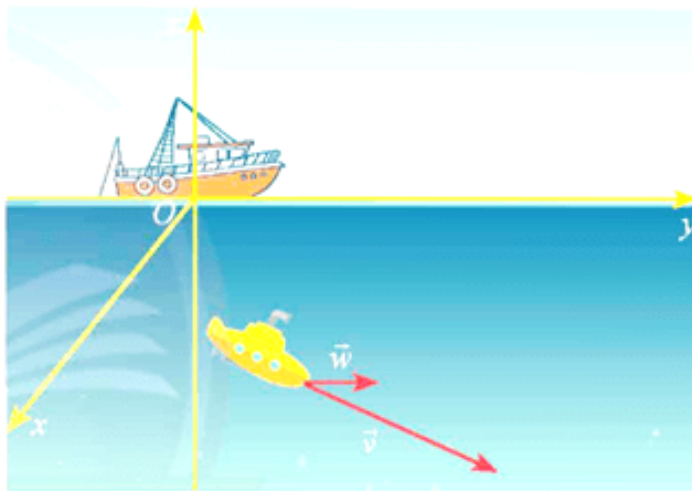
Câu 12: Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó. Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện. Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết $H - C - H$ là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Tìm độ lớn góc liên kết này.



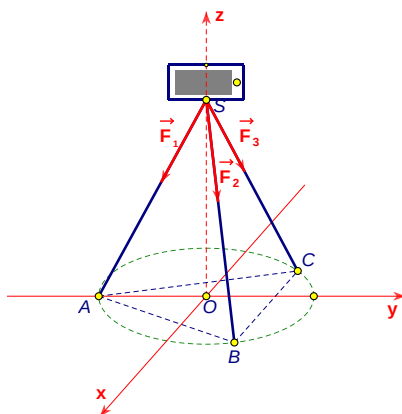
Câu 13: Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C đang có tọa độ là $A(1; -3; 2)$, $B(m; m-2; 6)$, $C(m-2; m; 5)$, trong đó m là tham số, đơn vị đo độ dài tính bằng kilomet. Biết kho hàng đang ở tại điểm $I(1; 1; 0)$. Vì lý do nhiên liệu nên các drone không được di chuyển quá xa kho hàng, cụ thể là các drone không được cách kho hàng quá 100 km. Xác định giá trị của tham số m để các drone cách kho hàng không quá 100 km.



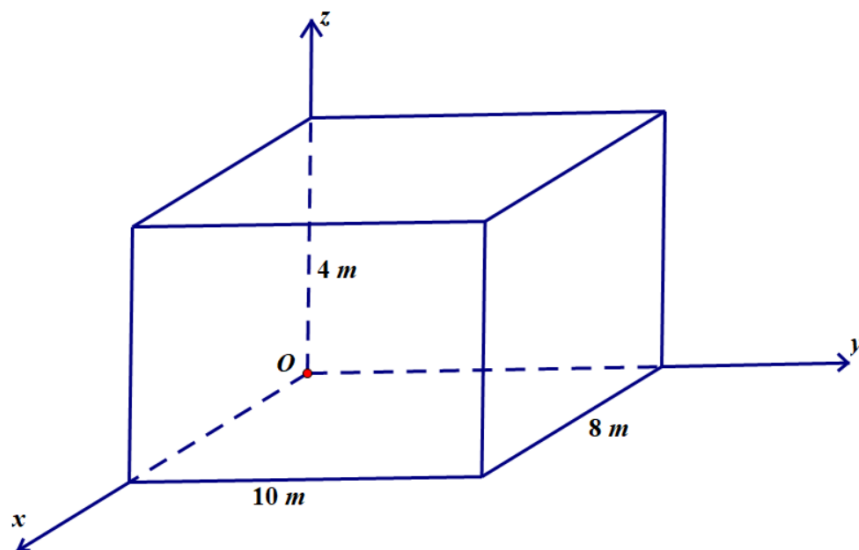
Câu 14: Một thiết bị thăm dò đáy biển đang lặn với vector vận tốc của thiết bị khi biển đứng yên là $\vec{v} = (11; 7; -4)$ (đơn vị: km/h). Cho biết vector vận tốc của dòng hải lưu của vùng biển là $\vec{w} = (4; 2; 0)$ (đơn vị: km/h). Tính tốc độ của thiết bị trong điều kiện có dòng hải lưu, các yếu tố khác không đáng kể (đơn vị km/h, làm tròn đến hàng phần chục).



Câu 15: Một chiếc điện thoại iphone được đặt trên một giá đỡ có ba chân với điểm đặt $S(0; 0; 20)$ và các điểm chạm mặt đất của ba chân lần lượt là $A(0; -6; 0)$, $B(3\sqrt{3}; 3; 0)$, $C(-3\sqrt{3}; 3; 0)$ (đơn vị cm). Cho biết điện thoại có trọng lượng là 2 N và ba lực tác dụng lên giá đỡ được phân bố như hình vẽ là ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có độ lớn bằng nhau. Biết tọa độ của lực $\vec{F}_1 = (a; b; c)$, khi đó $T = 2a + 5b + 6c$ bằng?

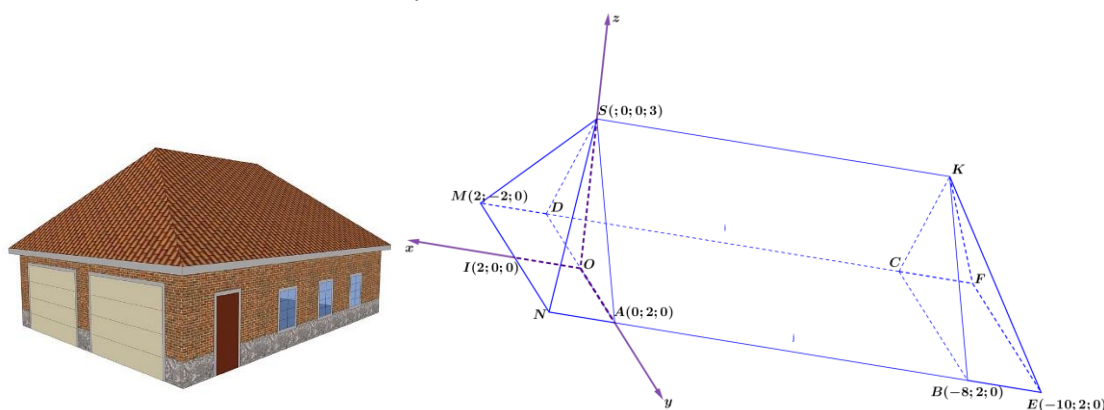


Câu 16: Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 10 m, chiều rộng là 8 m và chiều cao là 4 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (Hình vẽ).

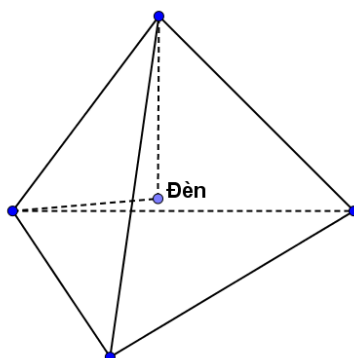


Tính khoảng cách từ điểm treo bóng đèn đến góc phòng học (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

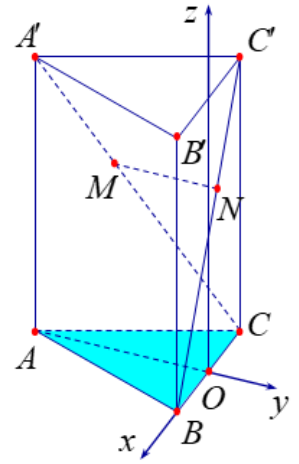
Câu 17: Phần mái của một căn nhà có dạng là khối đa diện được mô tả và gắn trên hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Tính thể tích khối đa diện của mái nhà.



Câu 18: Một đồ chơi có dạng hình tứ diện đều làm bằng thủy tinh có cạnh bằng 10cm. Bên trong đặt một đèn nhỏ. Đèn đặt trên đường nối từ đỉnh của tứ diện xuống tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và cách đỉnh một khoảng là $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ cm. Đèn được nối bởi hai dây qua hai đỉnh của tứ diện như hình vẽ. Cường độ lực tổng hợp của hai dây tác dụng lên đèn là bao nhiêu?



Câu 19: Một kiến trúc sư muốn xây dựng 1 tòa nhà biểu tượng độc lạ cho thành phố. Trên bản thiết kế tòa nhà có hình dạng là một khối lăng trụ tam giác đều, có cạnh bên bằng cạnh đáy và dài 300 mét (tham khảo hình vẽ). Kiến trúc sư muốn xây dựng một cây cầu MN bắc xuyên tòa nhà (điểm đầu thuộc cạnh $A'C$, điểm cuối thuộc cạnh BC') và cây cầu này sẽ được dát vàng với đơn giá 5 tỷ đồng trên 1 mét dài. Vì vậy để đáp ứng bài toán kinh tế, kiến trúc sư phải chọn vị trí cây cầu sao cho MN ngắn nhất (Gợi ý: đoạn thẳng nối hai đường ngắn nhất chính là đường vuông góc chung). Khi đó giá xây cây cầu này hết bao nhiêu tiền?

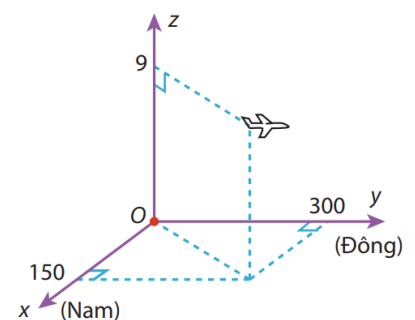


Câu 20: Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 80 m sử dụng radar có phạm vi theo dõi 500 km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam, trục Oz hướng thẳng đứng lên phía trên (Hình 2) (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét). Một máy bay tại vị trí A cách mặt đất 10 km, cách 300 km về phía đông và 200 km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?



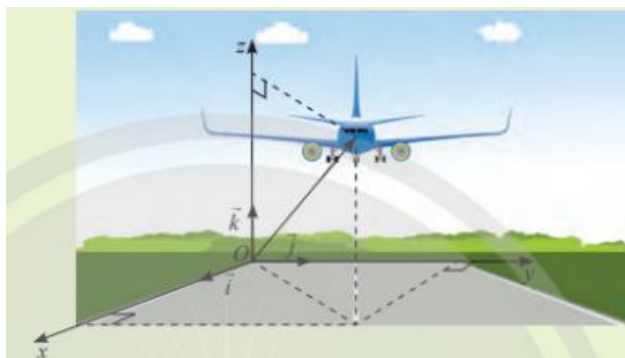
- Radar ở vị trí có tọa độ $(0;0;0)$.
- Vị trí A có tọa độ $(300;200;10)$.
- Khoảng cách từ máy bay đến radar là khoảng 360,69 km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Radar của trung tâm kiểm soát không lưu không phát hiện được máy bay tại vị trí A .

Câu 21: Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9h30 phút. Biết các đơn vị trên hình tính theo đơn vị km. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?



- Máy bay đang ở độ cao 9km.
- Tọa độ của máy bay $(300;150;9)$.
- Phi công để máy bay ở chế độ tự động với vận tốc theo hướng đông là 750km/h , độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc 10m/s . Giả sử vận tốc và hướng gió không đổi thì lúc 10h30 phút máy bay ở tọa độ $(150;1086;9)$.
- Sau khi bay đến vị trí lúc 10h30 thì máy bay bay ngược lại với vận tốc 800km/h với độ cao không đổi, biết lúc đó trời lặng gió thì lúc 11h máy bay ở tọa độ $(686;150;9)$.

Câu 22: Một chiếc máy bay đang bay trên không trung. Xét hệ trục tọa độ Oxyz được gắn như hình vẽ, trong đó gốc O là vị trí của trạm kiểm soát không lưu và $M(x; y; z)$ (km) biểu thị vị trí máy bay trên không trung. Tại thời điểm 8h máy bay đang ở vị trí $(50; 120; 4)$ và chuyển động với vận tốc $\vec{v} = (300; 400; 3)$ (km/h)



- Tại thời điểm 8h, khoảng cách giữa máy bay và trạm kiểm soát không lưu nói trên xấp xỉ 130 km (sai số không quá 1km).
- Tại thời điểm 9h độ cao của máy bay so với mặt đất là 8km.
- Tại thời điểm 10h, khoảng cách giữa máy bay và một tháp truyền hình F có tọa độ $(1250; 1020; 0)$ xấp xỉ 700km (sai số không quá 10km).
- Khi đạt độ cao 10km, máy bay đổi vận tốc mới là $\vec{v}_2 = (400; 300; -5)$ để hướng đến sân bay B . Tọa độ của máy bay khi vừa đáp xuống sân bay B là $(1450; 1520; 0)$.