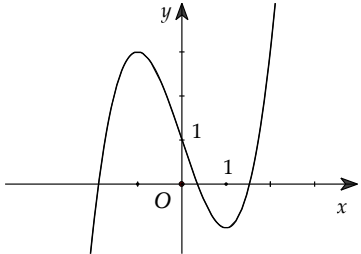
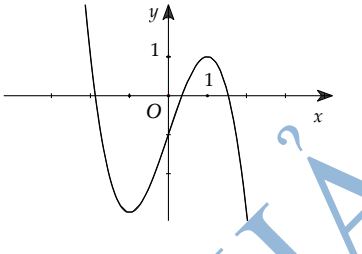
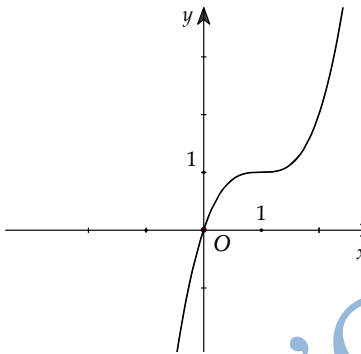
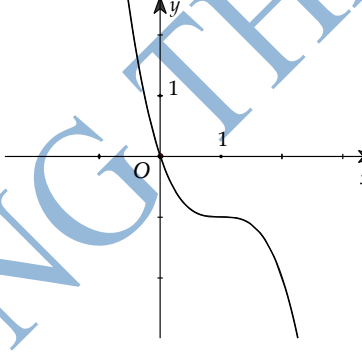
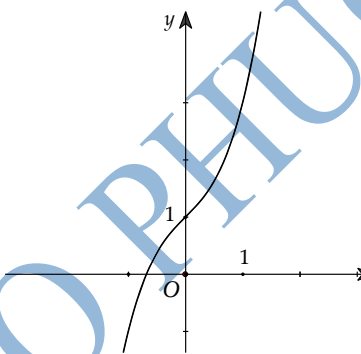
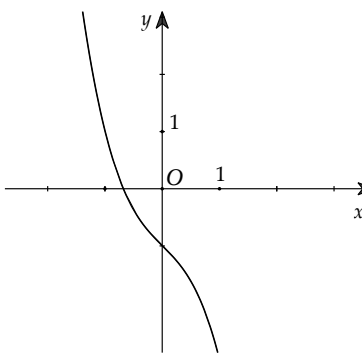


KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Khảo sát một số hàm đa thức và hàm phân thức

1.1. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

1.2. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

+) Đạo hàm: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{cases}$

+) Để hàm số có 3 cực trị: $ab < 0$

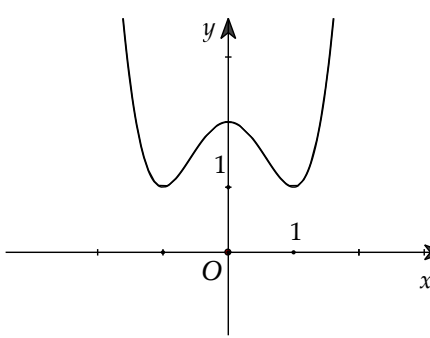
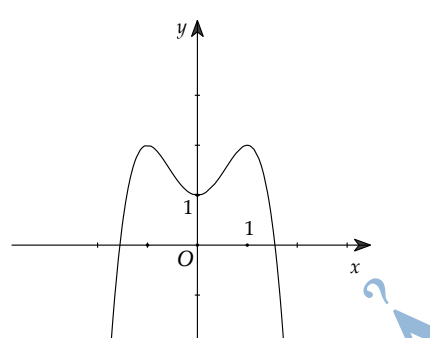
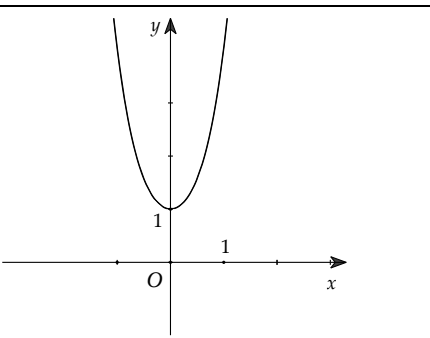
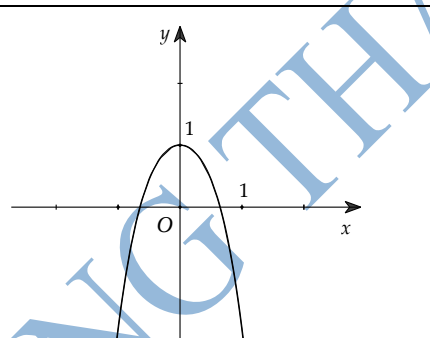
- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu

- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu

+) Để hàm số có 1 cực trị $ab \geq 0$

- Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực tiểu và không có cực đại

- Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ hàm số có 1 cực đại và không có cực tiểu

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt ($ab < 0$)		
Phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm.		

1.3. Hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

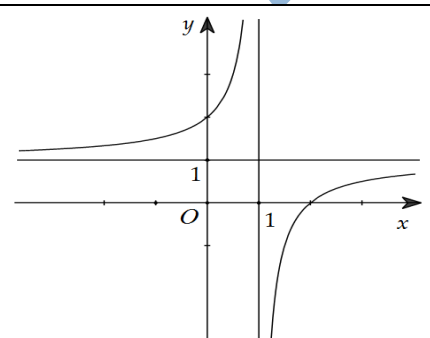
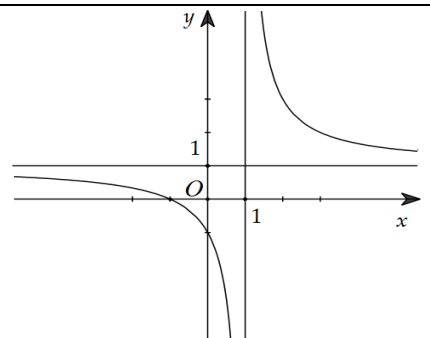
+) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

+) Đạo hàm: $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

- Nếu $ad - bc > 0$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 2 và 4.
- Nếu $ad - bc < 0$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 1 và 3.

+) Đồ thị hàm số có: TCĐ: $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$

+) Đồ thị có tâm đối xứng: $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

2. Một số phép biến đổi đồ thị

2.1. Dạng 1

Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(|x|)$.

Ta có: $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

và $y = f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị (C') nhận Oy làm trục đối xứng.

***8 Cách vẽ (C') từ (C):**

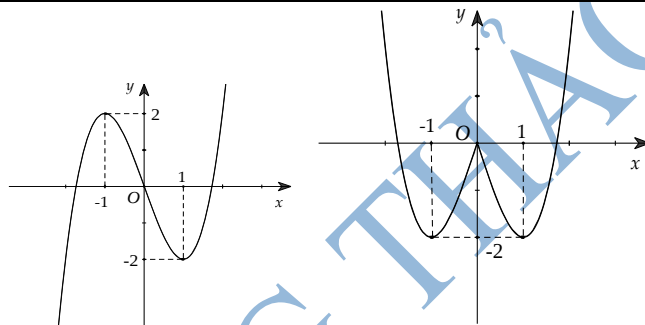
- Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị (C): $y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C), lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.

Ví dụ: Từ đồ thị (C): $y = f(x) = x^3 - 3x$ suy

ra đồ thị (C'): $y = |x|^3 - 3|x|$.

Biến đổi (C):

- Bỏ phần đồ thị của (C) bên trái Oy, giữ nguyên (C) bên phải Oy.
- Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.



$$(C'): y = |x|^3 - 3|x|$$

2.2. Dạng 2

Từ đồ thị (C): $y = f(x)$ suy ra đồ thị (C'): $y = |f(x)|$.

Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$

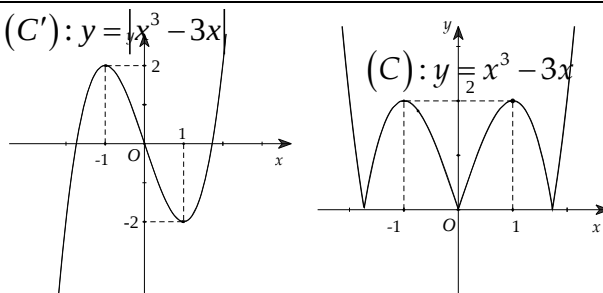
*** Cách vẽ (C') từ (C):**

- Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị (C): $y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C), lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

Ví dụ: Từ đồ thị (C): $y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị (C'): $y = |x^3 - 3x|$.

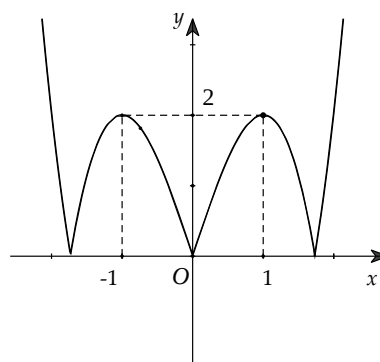
Biến đổi (C):

- Bỏ phần đồ thị của (C) dưới Ox, giữ nguyên (C) phía trên Ox.
- Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.



Chú ý: Với dạng $y = |f(x)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(|x|)$ và $y = |f(x)|$

Ví dụ: Từ đồ thị (C): $y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = |x|^3 - 3|x|$. Biến đổi (C) để được đồ thị (C'): $y = |x|^3 - 3|x|$. Biến đổi (C'): $y = |x|^3 - 3|x|$ ta được đồ thị (C''): $y = ||x|^3 - 3|x||$.



2.3. Dạng 3

Từ đồ thị (C): $y = u(x) \cdot v(x)$ suy ra đồ thị (C'): $y = |u(x)| \cdot v(x)$.

$$\text{Ta có: } y = |u(x)| \cdot v(x) = \begin{cases} u(x) \cdot v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x) \cdot v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) < 0 \end{cases}$$

* Cách vẽ (C') từ (C):

- Giữ nguyên phần đồ thị trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị (C): $y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C), lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

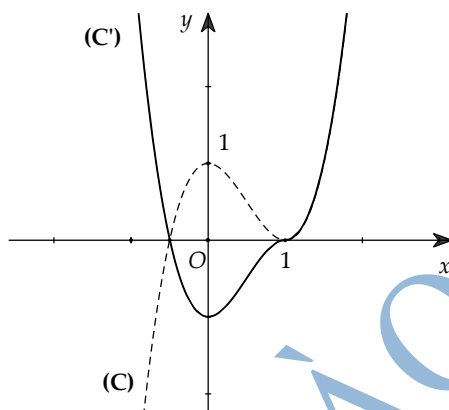
Ví dụ

a) Từ đồ thị (C): $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị (C'): $y = |x-1|(2x^2 - x - 1)$

$$y = |x-1|(2x^2 - x - 1) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 1 \\ -f(x) & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Đồ thị (C'):

- Giữ nguyên (C) với $x \geq 1$.
- Bỏ (C) với $x < 1$. Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.



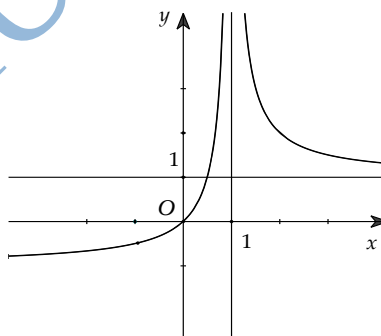
Nhận xét: Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên lấy đối xứng các điểm đặc biệt của (C): giao điểm với Ox, Oy, CĐ, CT...

b) Từ đồ thị (C): $y = f(x) = \frac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị (C'): $y = \frac{x}{|x-1|}$

$$y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{khi } x \in (1; +\infty) \\ -\frac{x}{x-1} & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \end{cases} \cdot \text{Đồ thị}$$

(C'):

- Bỏ phần đồ thị của (C) với $x < 1$, giữ nguyên (C) với $x > 1$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.



Nhận xét: Đối với hàm phân thức thì nên lấy đối xứng các đường tiệm cận để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.