

DẤU TAM THỨC BẬC HAI

I/ Tam thức bậc hai

1. **Định nghĩa:** Tam thức bậc hai là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

2. **Định lý** (về dấu tam thức bậc hai)

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) và $\Delta = b^2 - 4ac$

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x .

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với $\forall x \neq -\frac{b}{2a}$.

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$):

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
Dấu của $f(x)$	Cùng dấu với a	Đổi dấu	Đổi dấu	Cùng dấu với a
		0	0	

* Chú ý : ta có thể thay Δ bởi Δ'

Ví dụ 1: xét dấu các tam thức sau

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$

Ví dụ 2: Xét dấu các biểu thức sau

a) $A = (2x^2 + 9x + 7)(x^2 + x - 6)$

b) $B = \frac{-2x^2 - 5x + 7}{-x^2 - 3x + 10}$

II/ Bất phương trình bậc hai

1. **Định nghĩa:** Bất phương trình bậc hai là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$$ax^2 + bx + c > 0; ax^2 + bx + c < 0; ax^2 + bx + c \leq 0; ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (a \neq 0).$$

2. **Cách giải:** Để giải bất phương trình bậc hai ta xét dấu tam thức bậc hai đó, kết hợp với chiều của bất phương trình ta sẽ tìm được nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau

a) $3x^2 + 2x + 5 > 0$

$S = \mathbb{R}$

b) $-2x^2 + 3x + 5 > 0$

$S = (-1; 5/2)$

c) $-3x^2 + 7x - 4 < 0$

$S = (-\infty; 1) \cup (4/3; +\infty)$

d) $4x^2 - 3x + 1 < 0$

Vô nghiệm

e) $9x^2 - 24x + 16 < 0$

$S = \mathbb{R} \setminus \{4/3\}$

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau

a) $A = (2x^2 + 9x + 7)(x^2 + x - 6) > 0$

b) $B =$

$$\frac{-2x^2 - 5x + 7}{-x^2 - 3x + 10} < 0$$

Ví dụ 3. Xác định m để phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$ có nghiệm

HD: $\Delta' = m^2 + 6m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -5$ hoặc $m \geq -1$

* **Chú ý:** Bài toán tìm m để $f(x) = ax^2 + bx + c$ không đổi dấu (>0 , <0 , ≥ 0 , ≤ 0) trên $\mathbb{R}$

+ Xét trường hợp $a=0$ (nếu a chứa tham số)

+ Nếu $a \neq 0$ thì:

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} ; \quad f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

* **Chú ý:** Bài toán tìm m để $f(x) = ax^2 + bx + c$ không đổi dấu ($>0, <0, \geq 0, \leq 0$) trên $\mathbb{R}$

+ Xét trường hợp $a=0$ (nếu a chứa tham số)

+ Nếu $a \neq 0$ thì:

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

* Xét dấu các nghiệm phương trình bậc hai

Giả sử phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1, x_2 thì:

$$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0 \quad (\text{hai nghiệm trái dấu})$$

$$x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P > 0 \\ \Delta \geq 0 \quad (\text{hai cùng âm}) \\ S < 0 \end{cases}$$

$$0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P > 0 \\ \Delta \geq 0 \quad (\text{hai cùng dương}) \\ S > 0 \end{cases}$$

BÀI TẬP : DẤU TAM THỨC BẬC HAI

BAI TẬP 1

1/ Xét dấu các tam thức bậc hai sau

a) $2x^2 + 5x + 2$ b) $4x^2 - 3x - 1$ c) $-3x^2 + 5x + 1$ d) $3x^2 + x + 5$

2/ Giải các bất phương trình sau

a) $x^2 - 2x + 3 > 0$ b) $x^2 + 9 > 6x$ c) $6x^2 - x - 2 \geq 0$ d) $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$

e) $\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 9x + 14} \geq 0$

f) $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x - 10} < 0$

g) $\frac{10 - x}{5 + x^2} > \frac{1}{2}$

h) $\frac{x+1}{x-1} + 2 > \frac{x-1}{x}$

i) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2}$

Đáp số: a)

e) $S = (-\infty; -7) \cup (-2; 2] \cup [7; +\infty)$

3/ Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 4m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có:

a) Hai nghiệm phân biệt.

b) Hai nghiệm trái dấu.

c) Hai nghiệm dương.

d) Hai nghiệm âm.

$$\text{HD: } \Delta' = -12m^2 - 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}$$

4/ Tìm m để các phương trình sau nghiệm đúng với mọi x

- a) $mx^2 - 4(m-1)x + m - 5 \leq 0$ $\Delta = 12m^2 - 12m + 16$
 b) $5x^2 - x + m > 0$ $\Delta = -20m + 1$
 c) $mx^2 - 10x - 5 < 0$ $\Delta = 5m + 25$
 d) $\frac{x^2 - mx - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$ Vì $x^2 - 3x + 4 > 0$ với mọi x nên qui

đồng bỏ mẫu

$$\Delta = m^2 + 6m - 7$$

- e) $m(m+2)x^2 + 2mx + 2 > 0$ $\Delta = -4m^2 - 16m$

Đáp số: a) không có m b) $m > 1/20$ c) $m < -5$ d) $-7 < m < 1$ e)

$m < -4$ hoặc $m \geq 0$

5/ Tìm m để các phương trình sau vô nghiệm

- a) $5x^2 - x + m \leq 0$ $mx^2 - 10x - 5 \geq 0$

6/ Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm **duy nhất** phân biệt

- a) $(m^2 + m + 1)x^2 + (2m - 3)x + m - 5 = 0$

- b) $x^2 - 6mx + 2 - 2m + 9m^2 = 0$

Đáp số: a) không có m b) $0 < m < 1$

BÀI TẬP 2

Bài 1: Xét dấu các tam thức bậc hai

- a) $3x^2 - 2x + 1$ b) $-x^2 + 4x + 5$
 c) $-4x^2 + 12x - 9$ d) $3x^2 - 2x - 8$.

Bài 2: Giải các bất phương trình sau

- a) $2x^2 - 5x + 2 < 0$ b) $-5x^2 + 4x + 12 < 0$
 c) $16x^2 + 40x + 25 > 0$ d) $-2x^2 + 3x - 7 > 0$
 e) $3x^2 - 4x + 4 \geq 0$ f) $x^2 - x - 6 \leq 0$.

Bài 3: Tìm các giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm

- a) $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$
 b) $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0$
 c) $(3-m)x^2 - 2(m+3)x + m + 2 = 0$.

Bài 4: Xác định m để các tam thức sau **duy nhất** với mọi x

- a) $3x^2 + 2(m-1)x + m + 4$ $\Delta = 4m^2 - 20m - 44 = 0 \Leftrightarrow m =$

$$\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{69}}{2}, \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{69}}{2}$$

- b) $x^2 + (m+1)x + 2m + 7$ $\Delta = m^2 - 6m - 27 = 0 \Leftrightarrow m = 9; -3$

- c) $2x^2 + (m-2)x - m + 4$ $\Delta = m^2 + 4m - 28 = 0 \Leftrightarrow m =$

$$-2 + 4\sqrt{2}, -2 - 4\sqrt{2}$$

Bài 5: Giải các bất phương trình sau

- a) $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} > 1$; Kq: $-2 < x < 2$

- b) $\frac{3}{x^2 - x + 1} \geq 1$; Kq: $-1 \leq x \leq 2$

Bài 6: Tìm m để

- a) $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Delta = -8m + 20$$

b) $(m^2 - m - 6)x^2 + 2(m+2)x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Delta = 20m + 40$$

BÀI TẬP THÊM

Bài 1 : Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - |x-1| - 1 = 0$; $x = 1 ; -2$.

b) $|-3x^2 + 4x + 4| = |4 - x^2|$; $x = -1 ; 0 ; 2$.

c) $|-2x + 3| - |-4x + 3| = 3 - |2x + 3|$; $x = 0$ hoặc $x \geq 3/2$.

d) $|x-1| + |x-2| = 3$; $x = 0 ; 3$.

e) $|3|x-2| - 3| = 3$; $x = 0 ; 2 ; 4$.

f) $|3x - 2| + x = 11$; $x = 13/4 ; -9/2$.

g) $|x| - |x-2| = 2$; $x \geq 2$.

h) $|x-3| + 2|x-1| = 4$; $x = 3 ; 1/3$.

i) $3|x^2 - 4x + 2| = 5x + 16$; $x = \frac{17 \pm \sqrt{409}}{6}$

j) $\sqrt{2x+3} + 6 = 3x$; $x = 3$.

k) $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2-x}$; $x = -1 ; -2$.

l) $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$; $x = 3$.

m) $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$; $x = -1$.

n) $\sqrt{3x+12} - \sqrt{5x+6} = 2$; $x = -1$.

o) $\sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} = \sqrt{2x+16}$; $x = -4 ; 0$.

p) $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+4} = \sqrt{x-4}$; $x = 5$.

q) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$; $x = 5$.

r) $\sqrt{11-x} - \sqrt{x-1} = 2$; $x = 2$.

Bài 2 : Giải các bất phương trình sau :

a) $|1 - x^2| \leq (1+x)^2$; $x = -1$ hoặc $x \geq 0$.

b) $|x^2 - x + 1| \leq |3x - 4 - x^2|$; $x \leq 3/2$.

c) $|x^2 - 3x + 2| > |x^2 + 3x + 2|$; $x < 0$.

d) $|x^2 + 6x - 7| < x + 6$; $S = \left(\frac{-7 + \sqrt{53}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{77}}{2} \right)$.

e) $2|x+1| > x + 4$; $x < -2$ hoặc $x > 2$.

f) $|x^2 + x| - 5 < 0$; $S = \left(\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \right)$.

g) $x^2 - |5x + 8| > 0$; $S = \left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{57}}{2}, +\infty \right)$.

h) $x^2 + 4 \geq |3x + 2| - 7x$; $S = (-\infty; -5 - \sqrt{19}] \cup [-2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

i) $\frac{|x+3|+x}{x+2} > 1$; $S = (-5 ; -2) \cup (-1 ; +\infty)$.

j) $|x+1| + |x-4| > 7$; $x < -2$ hoặc $x > 5$.

k) $\sqrt{x^2 - 6x + 2} > x + 1$; $x < 1/8$.

l) $\sqrt{x^2 + x - 12} < x + 1$; $S = (-169/25 ; -1] \cup [0 ; +\infty)$.

m) $\sqrt{x^2 - x - 12} < 7 - x$; $x \leq -3$ hoặc $4 < x < 61/13$.

- n) $\sqrt{x^2 - 3x + 10} \geq x - 2$; $S = R$.
- o) $2\sqrt{1 - x^2} < x + 2$; $-1 \leq x < -4/5$ hoặc $0 < x \leq 1$.
- p) $\sqrt{1 - 4x} < \sqrt{2x + 1}$; $0 < x < 1/4$.
- q) $\sqrt{x^2 - 2x} > \sqrt{2x - 3}$; $x > 3$.
- r) $\sqrt{x + 1} < \sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 2}$; $S = (\frac{2 + 2\sqrt{7}}{3}; +\infty)$.
- s) $\sqrt{7 - x} - \sqrt{-3 - 2x} < \sqrt{2 - x}$; $x < -2$.
- t) $\sqrt{x - 5} - \sqrt{9 - x} > 1$; $\frac{14 + \sqrt{7}}{2} < x \leq 9$.

Bài 3 : Giải các phương trình, bất phương trình sau (Đặt ẩn số phụ)

- a) $x^2 - 4x = \sqrt{2x^2 - 8x + 12} - 6$; $x = 2$.
- b) $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$; $x = 1$; $-1/3$.
- c) $\sqrt{x^2 + x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 19}$; $x = -2; 1$.
- d) $(x + 1)(x + 4) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$; $x = -7$; 2 .
- e) $x^2 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 11} \leq 3x + 4$; $x \in [1; 2]$.
- f) $(x + 5)(x - 2) + 3\sqrt{x(x + 3)} > 0$; $x < -4$ hoặc $x > 1$.
- g) $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} \geq 1$; $x \in [-2; -1] \cup [-2/3; 1/3]$.

ĐÀO PHƯƠNG THẢO